УДК 517.948

Л. П. Костишин (Прикарпат. ун-т, Івано-Франківськ),
Б. А. Шувар (Нац. ун-т „Львів. політехніка")

АГРЕГАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНІ СПОСОБИ АПРОКСИМАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

We construct a special aggregate-iterative algorithm — the two-parameter method of ite aggregation for a differential equation with two-point boundary conditions. We establish conditi the convergence of the method. We present partial cases of two-parameter aggregate-iterative algo

Побудовано спеціальний агрегаційно-ітеративний алгоритм — двопараметричний метод тивного агрегування для диференціального рівняння з двоточковими крайовими умо Встановлено умови збіжності методу. Наведено частинні випадки двопараметричного а ційно-ітеративного алгоритму.

Малодосліджені методи ітеративного агрегування [1] часто використов для наближеного розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь [2, 3]. ній статті деякі агрегаційно-ітеративні алгоритми застосовуються до край задач з використанням методики дослідження цих методів із [4, 5].

Розглянемо задачу

$$x''(t) = a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t)$$

з крайовими умовами

$$x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2$$

за припущення, що дійсні функції $a_1(t)$, $a_0(t)$, $b(t)$ задовольняють необ вимоги щодо їх неперервності і гладкості на сегменті $[t_1, t_2]$. Елементар перетвореннями задачу (1), (2) можна звести до інтегрального рівняння виг

$$x(t) = f(t) + \int_{t_1}^{t} k_1(t,s)x(s)ds + \int_{t_2}^{t} k_2(t,s)x(s)ds,$$

у якому

$$f(t) = \frac{t_2-t}{t_2-t_1}x_1 + \frac{t_1-t}{t_1-t_2}x_2 + \frac{t_2-t}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t}(t_1-s)b(s)ds + \frac{t_1-t}{t_1-t_2}\int_{t_2}^{t}(t_2-s)b(s)ds,$$

$$k_1(t,s) = \frac{t_2-t}{t_2-t_1}[a_1(s) + (t_1-s)(a_0(s)-a_1'(s))],$$

$$k_2(t,s) = \frac{t_1-t}{t_1-t_2}[a_1(s) + (t_2-s)(a_0(s)-a_1'(s))].$$

Очевидно, що $f(t)$ можна подати також у вигляді

$$f(t) = x_1 + \frac{t_1-t}{t_1-t_2}(x_2-x_1) + \int_{t_1}^{t}(t-s)b(s)ds - \frac{t_1-t}{t_1-t_2}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)b(s)ds.$$

Для побудови ітераційного процесу перепишемо рівняння (3) у вигляді

$$x(t) = f(t) + \int_{t_0}^{t} k(t,s)x(s)ds - \int_{t_0}^{t_1} k_1(t,s)x(s)ds - \int_{t_0}^{t_2} k_2(t,s)x(s)ds,$$

де

$$k(t,s) = a_1(s) + (t-s)(a_0(s) - a_1'(s)),$$

t_0 — довільне фіксоване число, наприклад, $t_0 \in [t_1, t_2]$, функції $f(t)$, $k_1(t,s)$, $k_2(t,s)$ означено за формулами (4), (5). Запис рівняння (3) у вигляді (7) спричинений доцільністю побудови спеціального агрегаційно-ітеративного алгоритму — двопараметричного методу ітеративного агрегування з двоточковими крайовими умовами (2). Приєднаємо до рівняння (7) допоміжні рівняння

$$y_1 = \lambda_1 y_1 - \int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)dt \int_{t_0}^{t} k(t,s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)dt \int_{t_0}^{t_2} k_2(t,s)x(s)ds, \tag{9}$$

$$y_2 = \lambda_2 y_2 - \int_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t)dt \int_{t_0}^{t} k(t,s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t)dt \int_{t_0}^{t_1} k_1(t,s)x(s)ds. \tag{10}$$

З рівностей (7) і (9) випливає

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)x(t)dt + y_1 = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)dt \int_{t_0}^{t} k(t,s)x(s)ds - \int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)dt \int_{t_0}^{t_1} k_1(t,s)x(s)ds -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)dt \int_{t_0}^{t_2} k_2(t,s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)f(t)dt + \lambda_1 y_1 -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)dt \int_{t_0}^{t} k(t,s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)dt \int_{t_0}^{t_2} k_2(t,s)x(s)ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)f(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)dt \int_{t_0}^{t_1} k_1(t,s)x(s)ds + \lambda_1 y_1.$$

Звідси, припускаючи, що

$$-\int_{t_0}^{t_1} k_1(t,s)\varphi_1(t)dt = \lambda_1 \varphi_1(s), \tag{11}$$

отримуємо

$$y_1 + \int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)x(t)dt = \frac{1}{1-\lambda_1} \int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)f(t)dt, \qquad \lambda_1 \neq 1. \tag{12}$$

Аналогічно з (7) і (10) отримуємо рівність

$$y_2 + \int_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t)x(t)dt = \frac{1}{1-\lambda_2} \int_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t)f(t)dt, \qquad \lambda_2 \neq 1, \tag{13}$$

за припущення, що справджується рівність

$$-\int_{t_0}^{t_2} k_2(t,s)\varphi_2(t)dt = \lambda_2 \varphi_2(s). \tag{14}$$

Рівності (11) і (14) означають, що числа λ_1, λ_2 та функції $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ є відповідно власними числами та власними функціями ядер $-k_1(t,s)$, $-k_2(t,s)$. Оскільки власні числа та власні функції цих ядер можуть бути невідомими, то замість (11) та (14) можна розглядати рівності

$$-\int_{t_0}^{t_1} k_1(t,s)\varphi_1(t)dt = \lambda_1 \varphi_1(s) + \alpha_1(s) \tag{15}$$

та

$$-\int_{t_0}^{t_2} k_2(t,s)\varphi_2(t)dt = \lambda_2\varphi_2(s) + \alpha_2(s). \tag{16}$$

Рівності (15), (16), як наближені до рівностей відповідно (11) і (14), за довільно вибраних λ_1, λ_2, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ означують функції $\alpha_1(s)$, $\alpha_2(s)$. Тоді замість додаткових рівнянь (9), (10) потрібно використати відповідно рівняння

$$y_1 = \lambda_1 y_1 - \int_{t_0}^{t_1}\varphi_1(t)dt\int_{t_0}^{t} k(t,s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t_1}\varphi_1(t)dt\int_{t_0}^{t_2} k_2(t,s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t_1}\alpha_1(s)x(s)ds, \tag{17}$$

$$y_2 = \lambda_2 y_2 - \int_{t_0}^{t_2}\varphi_2(t)dt\int_{t_0}^{t} k(t,s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t_2}\varphi_2(t)dt\int_{t_0}^{t_1} k_1(t,s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t_2}\alpha_2(s)x(s)ds. \tag{18}$$

Назвемо множиною ε_{01} сукупність функцій $x(t)$ та чисел y_1, для яких справджується рівність (12). Аналогічним способом означимо множину ε_{02} за допомогою рівності (13). Приймемо за множину ε_0 сукупність таких чисел y_1, y_2 та функції $x(t)$, що $\{x(t), y_1\} \in \varepsilon_{01}$, $\{x(t), y_2\} \in \varepsilon_{02}$. Підсумуємо викладене у вигляді леми.

Лема 1. *Якщо* $\{x^*(t), y_1^*, y_2^*\}$ *є розв'язком системи* (7), (9), (10), *то* $\{x^*(t), y_1^*, y_2^*\} \in \varepsilon_0$.

Доведення. Оскільки з (7), (9) випливає

$$\int_{t_0}^{t_1}\varphi_1(t)x(t)dt + y_1 = \int_{t_0}^{t_1}\varphi_1(t)f(t)dt + \int_{t_0}^{t_1}\varphi_1(t)dt\int_{t_0}^{t} k(t,s)x(s)ds -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\varphi_1(t)dt\int_{t_0}^{t_1} k_1(t,s)x(s)ds - \int_{t_0}^{t_1}\varphi_1(t)dt\int_{t_0}^{t_2} k_2(t,s)x(s)ds + \lambda_1 y_1 -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\varphi_1(t)dt\int_{t_0}^{t} k(t,s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t_1}\varphi_1(t)dt\int_{t_0}^{t_2} k_2(t,s)x(s)ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\varphi_1(t)f(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} x(s)ds\int_{t_0}^{t_1} k_1(t,s)\varphi_1(t)dt + \lambda_1 y_1,$$

а з (7) і (10) аналогічно можна знайти

$$\int_{t_0}^{t_2}\varphi_2(t)x(t)dt + y_2 = \int_{t_0}^{t_2}\varphi_2(t)f(t)dt - \int_{t_0}^{t_2} x(s)ds\int_{t_0}^{t_2} k_2(t,s)\varphi_2(t)dt + \lambda_2 y_2,$$

то на підставі (11), (14) та нерівностей $\lambda_1 \neq 1$, $\lambda_2 \neq 1$ приходимо до висновку, що лему доведено.

Припускаючи, що мають місце рівності (11) і (14), побудуємо ітераційний процес за допомогою формул

$$x^{(n+1)}(t) = f(t) + \int_{t_0}^{t} k(t,s)x^{(n)}(s)ds - \int_{t_0}^{t_1} k_1(t,s)x^{(n)}(s)ds - \int_{t_0}^{t_2} k_2(t,s)x^{(n)}(s)ds -$$

$$- a_1^{(n)}(t)(y_1^{(n+1)} - y_1^{(n)}) - a_2^{(n)}(t)(y_2^{(n+1)} - y_2^{(n)}), \tag{19}$$

$$y_1^{(n+1)} = \lambda_1 y_1^{(n+1)} - \int_{t_0}^{t_1}\varphi_1(t)dt\int_{t_0}^{t} k(t,s)x^{(n)}(s)ds + \int_{t_0}^{t_1}\varphi_1(t)dt\int_{t_0}^{t_2} k_2(t,s)x^{(n)}(s)ds, \tag{20}$$

$$y_2^{(n+1)} = \lambda_2 y_2^{(n+1)} - \int_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t)dt \int_{t_0}^{t} k(t,s)x^{(n)}(s)ds + \int_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t)dt \int_{t_0}^{t_1} k_1(t,s)x^{(n)}(s)ds, \quad (21)$$

де, взагалі кажучи, функції $a_1^{(n)}(t)$, $a_2^{(n)}(t)$ вибрано довільно таким чином, щоб справджувалися рівності

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)a_1^{(n)}(t)dt = \lambda_1, \qquad \int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)a_2^{(n)}(t)dt = 0,$$

$$\int_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t)a_1^{(n)}(t)dt = 0, \qquad \int_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t)a_2^{(n)}(t)dt = \lambda_2, \qquad n = 0, 1, \ldots . \quad (22)$$

Для довільної двічі неперервно диференційовної функції $x(t)$ можна вибрати $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$ так, щоб $\{x^{(0)}(t), y_1^{(0)}, y_2^{(0)}\} \in \varepsilon_0$, бо $\lambda_1 \neq 1$, $\lambda_2 \neq 1$.

Лема 2. *Нехай* $\{x^{(0)}(t), y_1^{(0)}, y_2^{(0)}\} \in \varepsilon_0$. *Тоді для кожного* $n = 0, 1, \ldots$ *виконуються співвідношення* $\{x^{(n+1)}(t), y_1^{(n+1)}, y_2^{(n+1)}\} \in \varepsilon_0$.

Доведення. Припускаючи, що $\{x^{(n)}(t), y_1^{(n)}, y_2^{(n)}\} \in \varepsilon_0$, використовуючи міркування, подібні до використаних при доведенні леми 1, та враховуючи (11), (14) і (22), з рівностей (19) – (21) знаходимо

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)x^{(n+1)}(t)dt + y_1^{(n+1)} = \lambda_1\left(\int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)x^{(n)}(t)dt + y_1^{(n)}\right) + \int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)f(t)dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t)x^{(n+1)}(t)dt + y_2^{(n+1)} = \lambda_2\left(\int_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t)x^{(n)}(t)dt + y_2^{(n)}\right) + \int_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t)f(t)dt.$$

На підставі принципу індукції та припущення це приводить до співвідношення $\{x^{(n+1)}(t), y_1^{(n+1)}, y_2^{(n+1)}\} \in \varepsilon_0$. Звідси випливає справедливість леми 2. Наступна лема відіграє фундаментальну роль при дослідженні збіжності ітераційного процесу (19) – (21).

Лема 3. *Якщо справджуються умови лем* 1 *і* 2, *то для ітерацій* $\{x^{(n)}(t), y_1^{(n)}, y_2^{(n)}\}$ *і розв'язку* $\{x^*(t), y_1^*, y_2^*\}$ *системи* (7), (9), (10) *при кожному* $n = 0, 1, \ldots$ *будемо мати*

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)(x^{(n)}(t) - x^*(t))dt + (y_1^{(n)} - y_1^*) = 0,$$

$$\int_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t)(x^{(n)}(t) - x^*(t))dt + (y_2^{(n)} - y_2^*) = 0. \quad (23)$$

Доведення. Рівності (23) випливають з лем 1 та 2.

Додатково припустимо, що

$$\int_{t_0}^{t_1} k_2(\tau,s)\varphi_1(\tau)d\tau = 0, \qquad \int_{t_0}^{t_2} k_1(\tau,s)\varphi_2(\tau)d\tau = 0. \quad (24)$$

Із (7), (9), (10) та із (19) – (21) при зроблених припущеннях за допомогою леми 3 одержуємо

$$x^{(n+1)}(t)-x^*(t) = \int_{t_0}^{t} k(t,s)(x^{(n)}(s)-x^*(s))ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1}\left[-k_1(t,s)-a_1^{(n)}(t)\varphi_1(s)+\frac{a_1^{(n)}(t)}{1-\lambda_1}\int_s^{t_1}k(\tau,s)\varphi_1(\tau)d\tau\right](x^{(n)}(s)-x^*(s))ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_2}\left[-k_2(t,s)-a_2^{(n)}(t)\varphi_2(s)+\frac{a_2^{(n)}(t)}{1-\lambda_2}\int_s^{t_2}k(\tau,s)\varphi_2(\tau)d\tau\right](x^{(n)}(s)-x^*(s))ds. \qquad (25)$$

Співвідношення (25) можна використати для отримання оцінок збіжності процесу (19) – (21), конкретизуючи вибір $a_1^{(n)}(t)$, $a_2^{(n)}(t)$. Виберемо $a_1^{(n)}(t)$, $a_2^{(n)}(t)$ за формулами

$$a_1^{(n)}(t) = \lambda_1\psi_1(t), \qquad a_2^{(n)}(t) = \lambda_2\psi_2(t). \qquad (26)$$

Будемо припускати, що

$$k_1(t,s) = -\lambda_1\psi_1(t)\varphi_1(s), \qquad k_2(t,s) = -\lambda_2\psi_2(t)\varphi_2(s). \qquad (27)$$

У такому випадку із (25) випливає

$$x^{(n+1)}(t)-x^*(t) = \int_{t_0}^{t} k(t,s)(x^{(n)}(s)-x^*(s))ds -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1}\psi_1(t)\Phi_1(s)(x^{(n)}(s)-x^*(s))ds - \int_{t_0}^{t_2}\frac{\lambda_2}{1-\lambda_2}\psi_2(t)\Phi_2(s)(x^{(n)}(s)-x^*(s))ds, \qquad (28)$$

де $\Phi_1(s) = \int_s^{t_1} k(\tau,s)\varphi_1(\tau)d\tau$, $\Phi_2(s) = \int_s^{t_2} k(\tau,s)\varphi_2(\tau)d\tau$.

Позначаючи

$$K(t,s) = \begin{cases} k(t,s)-\dfrac{\lambda_1}{1-\lambda_1}\psi_1(t)\Phi_1(s)-\dfrac{\lambda_2}{1-\lambda_2}\psi_2(t)\Phi_2(s), & s\in[t_0,t], \quad t\in[t_0,t_1]; \\ -\dfrac{\lambda_1}{1-\lambda_1}\psi_1(t)\Phi_1(s)-\dfrac{\lambda_2}{1-\lambda_2}\psi_2(t)\Phi_2(s), & s\in(t,t_1], \quad t\in[t_0,t_1]; \\ -\dfrac{\lambda_2}{1-\lambda_2}\psi_2(t)\Phi_2(s), & s,t\in(t_1,t_2], \end{cases}$$

(28) зображуємо у вигляді

$$x^{(n+1)}(t)-x^*(t) = \int_{t_0}^{t_2} K(t,s)(x^{(n)}(s)-x^*(s))ds.$$

Підсумуємо отриманий результат у вигляді теореми.

Теорема. *Нехай*: 1) *справджуються умови леми* 3; 2) *виконуються співвідношення* (24), (26), (27). *Якщо*

$$|K(t,s)| \le K_0, \qquad K_0T \le q < 1,$$

де $T = \max\{t_1, t_2, t_0\} - \min\{t_1, t_2, t_0\}$, *то послідовність* $\{x^{(n)}(t)\}$, *утворена за допомогою алгоритму* (19) – (21), *рівномірно збігається до розв'язку* $x^*(t)$ *рівняння* (7) *не повільніше від геометричної прогресії із знаменником* q.

***Зауваження* 1.** Різні можливі способи вибору $a_1^{(n)}(t)$, $a_2^{(n)}(t)$ описують інші варіанти агрегаційно-ітеративних методів для рівняння (7). Підпорядкування $a_1^{(n)}(t)$, $a_2^{(n)}(t)$ умові (22) характеризує двопараметричний метод ітеративного агрегування щодо відповідної частини оператора, породженого правою частиною рівняння (7).

Зауваження 2. Запропонований підхід до побудови та дослідження агрегаційно-ітеративних методів можна поширити на алгоритми, які мають дещо складнішу структуру. Зокрема, зазначене стосується випадку, якщо замість (11) і (14) використати рівності (15) і (16). Тоді співвідношення (22) замінимо рівностями

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t) a_1^{(n)}(t)dt + \beta_{11}^{(n)} = \lambda_1, \quad \int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t) a_2^{(n)}(t)dt + \beta_{12}^{(n)} = 0,$$

$$\int_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t) a_1^{(n)}(t)dt + \beta_{21}^{(n)} = 0, \quad \int_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t) a_2^{(n)}(t)dt + \beta_{22}^{(n)} = \lambda_2, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

У такому випадку замість системи (7), (9), (10) потрібно розглядати систему (7), (17), (18), а замість ітераційного процесу (19) – (21) — процес, який описується рівністю (19) і формулами

$$y_1^{(n+1)} = \lambda_1 y_1^{(n+1)} - \int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)dt \int_{t_0}^{t} k(t,s)x^{(n)}(s)ds + \int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)dt \int_{t_0}^{t_2} k_2(t,s)x^{(n)}(s)ds +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} \alpha_1(t)x^{(n)}(t)dt + \beta_{11}^{(n)}(y_1^{(n)} - y_1^{(n+1)}) + \beta_{12}^{(n)}(y_2^{(n)} - y_2^{(n+1)}), \qquad (29)$$

$$y_2^{(n+1)} = \lambda_2 y_2^{(n+1)} - \int_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t)dt \int_{t_0}^{t} k(t,s)x^{(n)}(s)ds + \int_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t)dt \int_{t_0}^{t_1} k_1(t,s)x^{(n)}(s)ds +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_2} \alpha_2(t)x^{(n)}(t)dt + \beta_{21}^{(n)}(y_1^{(n)} - y_1^{(n+1)}) + \beta_{22}^{(n)}(y_2^{(n)} - y_2^{(n+1)}). \qquad (30)$$

Для алгоритму (19), (29), (30) є справедливими аналоги лем 1 – 3 з тією відмінністю, що дещо ускладнюється означення множини ε_0. У цьому випадку у запропоновану схему вписується, наприклад, двопараметричний випадок багатопараметричного методу ітеративного агрегування у застосуванні до рівняння (7), описаний і недосліджений в [1].

1. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы. – М.: Наука, 1985. – 255 с.
2. *Дудкин Л. М.* Система расчетов оптимального народнохозяйственного плана. – М.: Экономика, 1972. – 290 с.
3. *Итеративное* агрегирование и его применение в планировании / Под ред. Л. М. Дудкина. – М.: Экономика, 1979. – 320 с.
4. *Шувар Б. А.* О сходимости однопараметрического метода итеративного агрегирования для систем линейных алгебраических уравнений. – Львов, 1988. – 11 с. – Деп. в УкрРИИНТИ, № 1473-Ук 88.
5. *Шувар Б. А.* Обобщение метода итеративного агрегирования. – Львов, 1992. – 21 с. – Деп. в УкрРИИНТИ, № 43-Ук 92.

Одержано 17.05.2002,
після доопрацювання — 27.03.2003