УДК 517.9

А. К. Прикарпатський (Ін-т прикл. пробл. механіки та математики НАН України, Львів, Україна; Ун-т гірництва та металургії, Краків, Польща),
В. Г. Самойленко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

СТРУКТУРА БІНАРНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ТИПУ ДАРБУ ДЛЯ ЕРМІТОВО-СПРЯЖЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

For Hermitian conjugated differential operators, we consider the structure of Darboux – Backlund-type transformations in the class of parametrically dependent Hilbert spaces. By using new proposed method, we obtain in the explicit form the corresponding integral-differential symbols of transform operators and consider problems of their application in constructing two-dimensional Lax-integrable nonlinear evolution equations and their Darboux – Backlund-type transformations.

Для ермітово-спряжених диференціальних операторів розглянуто структуру перетворень типу Дарбу – Беклунда в класі параметрично залежних просторів Гільберта. На основі запропонованого нового методу отримано в явному вигляді відповідні інтегро-диференціальні символи операторів перетворень та розглянуто питання про їх застосування для побудови двовимірних інтегровних за Лаксом нелінійних еволюційних рівнянь та їх перетворень типу Дарбу – Беклунда.

1. Визначення та деякі властивості ермітово-спряжених операторів. Розглянемо диференціальний оператор

$$L := \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\partial^i, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x}, \tag{1}$$

де $a_i \in \mathcal{S}(\mathbf{R}; \operatorname{End}\mathbf{C}^N)$, $i=\overline{1,n}$, $N \in \mathbf{Z}_+$. Оператор (1) називають формально ∂-ермітово-спряженим, якщо

$$L^* = -\partial L \partial^{-1} \quad (\text{або} \quad L^* = \partial L \partial^{-1}) \tag{2}$$

відносно звичайної невиродженої білінійної форми

$$(\langle \cdot , \cdot \rangle) := \int_{\mathbf{R}} dx \operatorname{Sp}(\cdot)^T(\cdot)$$

на добутку просторів $H \times H^*$, де $H := L_2(\mathbf{R}; \operatorname{Hom}(\mathbf{C}^k; \mathbf{C}^N))$, $k, N \in \mathbf{Z}_+$.

З умови (2) легко знаходимо, що оператор $\ell := L\partial^{-1}$ є формально симетричним (ермітовим), оскільки

$$\ell^* = -\partial^{-1} L^* = \partial^{-1}\partial L \partial^{-1} = L\partial^{-1} = \ell. \tag{3}$$

Для того щоб оператори ℓ та ℓ^* були визначені коректно, потрібно розглянути дію цих операторів на відповідних просторах DH та DH^*, де згідно з визначенням

$$DH := \overline{\{\partial\varphi/\partial x \colon \varphi \in W_2^1(\mathbf{R}; \operatorname{Hom}(\mathbf{C}^k, \mathbf{C}^N))\}},$$

а замикання береться за нормою простору H.

Таким чином, вираз (1) можна розглядати як композицію симетричного диференціального символу та операції диференціювання, тобто $L := \ell\partial$, де згідно з (3) $\ell^* = \ell$, тобто

$$\ell = \sum_{i=0}^{[n/2]} \partial^i u_i(x) \partial^i \tag{4}$$

для деяких функцій $u_i \in \mathcal{S}(\mathbf{R}; \operatorname{End} \mathbf{C}^N)$, $i = \overline{0, [n/2]}$, $n \in \mathbf{Z}_+$.

2. Умова спряженості в $D\mathcal{H} \times D\mathcal{H}^*$. Розглянемо операторний вираз $\hat{\ell} := (\partial/\partial t - L)\partial^{-1}$, який визначено на $D\mathcal{H} = C^1(\mathbf{R}_t; DH)$, і знайдемо умову існування спряженого виразу $\hat{\ell}^* = \hat{\ell}$ відносно звичайної невиродженої білінійної форми на $D\mathcal{H} \times D\mathcal{H}^*$, тобто коли

$$\big(\langle \hat{\ell}\varphi_x, \psi_x \rangle\big) = \big(\langle \varphi_x, \hat{\ell}^* \psi_x \rangle\big) = \big(\langle \varphi_x, \hat{\ell}\psi_x \rangle\big) \tag{5}$$

для всіх $(\varphi_x, \psi_x) \in D\mathcal{H} \times D\mathcal{H}^*$.

Розписуючи умову (5) і використовуючи при цьому тотожність Лагранжа, знаходимо

$$\langle \varphi_t - \ell\varphi_x, \psi_x \rangle = \langle \varphi_x, \psi_t - \hat{\ell}^* \psi_x \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Sp} Z[\varphi, \psi] + \operatorname{Sp}\big(\varphi_t^T \psi_x - \varphi_x^T \psi_t\big) =$$

$$= \langle \varphi_x, \psi_t - \ell\psi_x \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Sp} Z[\varphi, \psi] + \operatorname{Sp}\big(\varphi_t^T \psi_x + \varphi^T \psi_{x,t}\big) - \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Sp}(\varphi^T \psi_t) =$$

$$= \langle \varphi_x, \psi_t - \ell\psi_x \rangle + \operatorname{Sp} \frac{\partial}{\partial t}(\varphi^T \psi_x) - \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Sp} Z_L[\varphi, \psi], \tag{6}$$

де $Z[\varphi, \psi]$ та $Z_L[\varphi, \psi]$ — деякі матричні білінійні форми на $\mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$.

З тотожності (6) інтегруванням по $x \in \mathbf{R}$ легко знаходимо, що якщо існує матриця $\Omega \in C^1(\mathbf{R}_x^1 \times \mathbf{R}_t^1; \operatorname{End} \mathbf{C}^k)$ така, що справджуються рівності

$$\frac{\partial}{\partial x}\Omega = \varphi^T \psi_x, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Omega = Z_L[\varphi, \psi] \tag{7}$$

для будь-яких $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$ та виконуються умови

$$\operatorname{Sp}(\Omega^{-2}\Omega_t), \qquad \operatorname{Sp} \Omega_t \in \mathcal{S}(\mathbf{R}; \mathbf{C}) \tag{8}$$

за змінною $x \in \mathbf{R}$ рівномірно по $t \in \mathbf{R}$, то вираз

$$\hat{\ell} := \frac{\partial}{\partial t}\partial^{-1} - \ell$$

є симетричним оператором на просторі $D\mathcal{H} \times D\mathcal{H}^*$ для всіх $t \in \mathbf{R}$. Це, очевидно, еквівалентно такій диференціально-геометричній умові: матрична 1-форма $\omega^{(1)}[\varphi, \psi] = \varphi^T \psi_x dx + Z_L[\varphi, \psi] dt$ є замкненою в $\mathbf{R}^2$, тобто існує така матрична функція $\Omega[\varphi, \psi]$, що $\omega^{(1)}[\varphi, \psi] = d\Omega[\varphi, \psi]$ для всіх пар $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$.

Отже, можна сформулювати таке твердження.

Твердження 1. *Нехай на просторі $\mathcal{H}$ задано формально ∂-ермітовий оператор вигляду* (1). *Тоді оператор $\hat{\ell} = (\partial/\partial t - L)\partial^{-1}$ на просторі $D\mathcal{H}$ є симетричним оператором відносно білінійної форми на $D\mathcal{H} \times D\mathcal{H}^*$, якщо для* *всіх пар* $(\varphi, \psi) \in D\mathcal{H} \times D\mathcal{H}^*$ *виконуються умови* (7) *та* (8), *а матрична* 1-*форма* $\omega^{(1)}[\varphi, \psi]$ *є замкненою на* $\mathbf{R}^2$.

Зауважимо, що умови (7) та (8) є достатніми, але не необхідними, що випливає з самої конструкції матриці $\Omega \in C^1(\mathbf{R}^1_x \times \mathbf{R}^1_t; \operatorname{End} \mathbf{C}^k)$.

Нехай тепер множина функцій $\mathcal{H}$ залежить від параметра $t \in \mathbf{R}$ таким чином:

$$\varphi_t - \ell\varphi_x := 0 =: \varphi_t - L\varphi, \tag{9}$$

де $\varphi|_{t=0} = \overline{\varphi} \in H$.

Тоді з умови (5) легко знаходимо, що для всіх $\varphi \in \mathcal{H}^*$ справджується рівність

$$\psi_t - \ell\psi_x = 0 = \psi_t - L\psi, \tag{10}$$

тобто простори $\mathcal{H}$ та $\mathcal{H}^*$ є еволюційно узгодженими стосовно параметра $t \in \mathbf{R}$. Окрім того, згідно з рівностями (9) та (10) простори $\mathcal{H}$ та $\mathcal{H}^*$ канонічно збігаються, тобто $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}^*$. Ця умова виявляється вельми корисною при подальшому аналізі класу операторів (1) та їх неформальних еволюційних продовжень (9).

3. Перетворення Дарбу – Беклунда та їх структура. Розглянемо ∂-ермітово-спряжений диференціальний оператор $\tilde{L}$ вигляду (1), що діє в просторі $\mathcal{H}^*$. Умовою існування спряженого оператора $\hat{\tilde{\ell}} := \partial/\partial t \partial^{-1} - \tilde{\ell}$, де $\tilde{\ell}\partial := \tilde{L}$, згідно з твердженням 1 буде існування такої матриці $\tilde{\Omega} \in C^1(\mathbf{R}^1_x \times \mathbf{R}^1_t; \operatorname{End} \mathbf{C}^k)$, що для всіх пар $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in \tilde{\mathcal{H}} \times \tilde{\mathcal{H}}^*$ справджуються умови

$$\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\Omega} = \tilde{\varphi}^T \tilde{\psi}_x, \qquad \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial t} = \tilde{Z}_{\tilde{L}}[\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}], \qquad \operatorname{Sp}(\tilde{\Omega}^{-2}\tilde{\Omega}_t), \qquad \operatorname{Sp}\tilde{\Omega}_t \in \mathcal{S}(\mathbf{R}; \mathbf{C}),$$

та відповідна матрична 1-форма $\tilde{\omega}^{(1)}[\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}]$ є замкненою на $\mathbf{R}^2$. Припустимо, що остання умова має місце, а простір пар функцій $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in \tilde{\mathcal{H}} \times \tilde{\mathcal{H}}^*$ є еволюційно узгодженим, тобто $\tilde{\varphi}_t - \tilde{L}\tilde{\varphi} = 0 = \tilde{\psi}_t - \tilde{L}\tilde{\psi}$.

Вважатимемо тепер простори $\tilde{\mathcal{H}}$ та $\mathcal{H}$ ізоморфними, тобто припустимо, що існує оборотний оператор $\hat{\Omega}: \mathcal{H} \to \tilde{\mathcal{H}}$, дія якого на фіксованій парі функцій $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$ задається перетворенням типу Дарбу – Беклунда [1 – 3] таким чином:

$$\tilde{\varphi} = \hat{\Omega}(\varphi) := \varphi(\Omega^T)^{-1}\Omega_0^T, \qquad \tilde{\psi} = \hat{\Omega}^*(\psi) := \partial^{-1}(\psi_x \Omega^{-1}\Omega_0), \tag{11}$$

де припускається, що матриця

$$\Omega = \Omega[\varphi, \psi] = \partial^{-1}(\omega^{(1)}[\varphi, \psi]) + \Omega_0 := \int_{P_0}^{P} \omega^{(1)}[\varphi, \psi] + \Omega_0 \tag{12}$$

разом зі сталою матрицею $\Omega_0 \in \operatorname{End} \mathbf{C}^k$ є оборотною, а $P_0 = (x_0, t_0) \in \mathbf{R}^2$ та $P = (x, t) \in \mathbf{R}^2$ — довільні точки в $\mathbf{R}^2$.

Вирази (11) та (12) можна використати для побудови в явному вигляді ізоморфізмів $\hat{\Omega}: \mathcal{H} \to \tilde{\mathcal{H}}$ і $\hat{\Omega}^*: \mathcal{H}^* \to \tilde{\mathcal{H}}^*$ та для подальшої їх інтерполяції на простори $\mathcal{H}$ та $\mathcal{H}^*$ відповідно. А саме, для пари $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$ маємо

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi} &:= \hat{\Omega}(\varphi) = \varphi(\Omega^T)^{-1}\Omega_0^T = \varphi(\Omega^T)^{-1}\left(\Omega^T - \partial^{-1}(\omega^{(1)}[\varphi,\psi])^T\right) = \\ &= \varphi - \varphi(\Omega^T)^{-1}\Omega_0^T(\Omega_0^T)^{-1}\partial^{-1}(\omega^{(1)}[\varphi,\psi])^T = \left(1 - \tilde{\varphi}(\Omega_0^T)^{-1}\partial^{-1}(\omega^{(1)}[\,\cdot\,,\psi])^T\right)\varphi, \\ \tilde{\psi} &:= \hat{\Omega}^*(\psi) = \partial^{-1}(\psi_x\Omega^{-1}\Omega_0) = \partial^{-1}\left(\psi_x\Omega^{-1}\left(\Omega - \partial^{-1}(\omega^{(1)}[\varphi,\psi])\right)\right) = \\ &= \partial^{-1}\left(\psi_x - \tilde{\psi}_x\Omega_0^{-1}\partial^{-1}(\omega^{(1)}[\varphi,\psi]\right) := \left(1 - \partial^{-1}\tilde{\psi}_x\Omega_0^{-1}\partial^{-1}(\omega^{(1)}[\varphi,\cdot\,])\right)\psi.\end{aligned} \tag{13}$$

Як результат інтерполяції виразів (13) на цілі простори за змінними $\varphi \in \mathcal{H}$ та $\psi \in \mathcal{H}^*$ отримуємо

$$\hat{\Omega} = 1 - \tilde{\varphi}(\Omega_0^T)^{-1}\partial^{-1}(\omega^{(1)}[\,\cdot\,,\psi])^T, \qquad \hat{\Omega}^* = 1 - \partial^{-1}\tilde{\psi}_x\Omega_0^{-1}\partial^{-1}\omega^{(1)}[\varphi,\cdot\,]. \tag{14}$$

Для того щоб показати узгодженість ізоморфізмів (14) з еволюцією в просторах $\mathcal{H}$ та $\mathcal{H}^*$ і $\tilde{\mathcal{H}}$ та $\tilde{\mathcal{H}}^*$, покажемо, що існує відповідна матриця $\tilde{\Omega} \in C^1(\mathbf{R}_x^1 \times \mathbf{R}_t^1; \operatorname{End}\mathbf{C}^k)$, яка задовольняє умови типу (7), (8). Справді, згідно з визначенням маємо

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}^{(1)}[\tilde{\varphi},\tilde{\psi}] &= \tilde{\varphi}^T\tilde{\psi}_x dx + \tilde{Z}_L[\tilde{\varphi},\tilde{\psi}]dt = \Omega_0\Omega^{-1}(d\Omega)\Omega^{-1}\Omega_0 = \\ &= -\Omega_0(d\Omega^{-1})\Omega_0 = d(-\Omega_0\Omega^{-1}\Omega_0) := d\tilde{\Omega}[\tilde{\varphi},\tilde{\psi}],\end{aligned} \tag{15}$$

тобто

$$\tilde{\Omega}[\tilde{\varphi},\tilde{\psi}] := -\Omega_0\Omega^{-1}[\varphi,\psi]\Omega_0 = \partial^{-1}\tilde{\omega}^{(1)}[\tilde{\varphi},\tilde{\psi}] + \tilde{\Omega}_0, \tag{16}$$

де $\tilde{\Omega}_0 := -\Omega_0$, що випливає з існування границі при $P \to P_0$.

Оскільки матриця $\Omega \in C^1(\mathbf{R}_x^1 \times \mathbf{R}_t^1; \operatorname{End}\mathbf{C}^k)$ вважається оборотною, то з (16) випливає, що $\tilde{\Omega}$ є також оборотною матрицею.

Внаслідок того, що пара просторів $\mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$ відображається в пару просторів $\tilde{\mathcal{H}} \times \tilde{\mathcal{H}}^*$ ізоморфно за допомогою відображень (14), цьому відображенню відповідає деяке відображення оператора $\ell : D\mathcal{H} \to D\mathcal{H}$ в деякий інший оператор $\tilde{\ell} : D\tilde{\mathcal{H}} \to D\tilde{\mathcal{H}}$, який згідно з (15) задовольняє тотожність

$$\left(\langle \partial\tilde{\varphi}/\partial t - \tilde{\ell}\tilde{\varphi}_x, \tilde{\psi}_x\rangle\right) = \left(\langle \tilde{\varphi}_x, \partial\tilde{\psi}/\partial t - \tilde{\ell}\tilde{\psi}_x\rangle\right) \tag{17}$$

для всіх $(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$ типу (11). Як результат, з (17) та відповідної комутативності діаграми

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{H} & \xrightarrow{\partial/\partial t - L} & \mathcal{H} & \\ \hat{\Omega} & \downarrow & & \downarrow & \hat{\Omega} \\ & \tilde{\mathcal{H}} & \xrightarrow{\partial/\partial t - \tilde{L}} & \tilde{\mathcal{H}} & \end{array}$$

знаходимо $\partial/\partial t - \tilde{L} = \hat{\Omega}\dfrac{\partial}{\partial t}\hat{\Omega}^{-1} - \hat{\Omega}L\hat{\Omega}^{-1}$, звідки маємо

$$\tilde{L} = \hat{\Omega}_t\hat{\Omega}^{-1} + \hat{\Omega}L\hat{\Omega}^{-1} = L + [\hat{\Omega}, L]\hat{\Omega}^{-1} + \hat{\Omega}_t\hat{\Omega}^{-1}, \tag{18}$$

причому, як легко переконатись, $\operatorname{Ord}\tilde{L} = \operatorname{Ord} L$.

Оскільки оператор $L : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ є формально ∂-ермітово-спряженим, то необхідно перевірити, що при ізоморфізмі $\hat{\Omega} : \mathcal{H} \to \tilde{\mathcal{H}}$ оператор (18) теж буде

∂-ермітово-спряженим, $\tilde{L}^* = -\partial\tilde{L}\partial^{-1}$, тобто оператор $\tilde{\ell}: \tilde{L}\partial^{-1}$ буде симетричним. Остання властивість перевіряється за допомогою простих обчислень [2, 5], які тут не наводимо через їх громіздкість.

Отже, ми встановили таке твердження.

Твердження 2. *Нехай виконано умови* $\mathrm{Sp}(\Omega^{-2}\tilde{\Omega}_t)$, $\mathrm{Sp}\,\Omega_t \in \mathcal{S}(\mathbf{R}; \mathbf{C})$ *рівномірно по* $t \in \mathbf{R}$. *Тоді перетворення* (13), (14) *є перетвореннями Дарбу – Беклунда для відповідних ермітово-спряжених операторів* (1) *та* (18), *задаючи ізоморфізм просторів* $\mathcal{H}$ *та* $\tilde{\mathcal{H}}$.

4. Узгоджені пари Захарова – Шабата. Розглянемо тепер дві (за змінними $(t, y) \in \mathbf{R}^2$) узгоджені еволюції просторів $\mathcal{H}$ та $\mathcal{H}^*$ згідно з такими рівняннями на пару функцій $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$:

$$\begin{aligned} \partial\varphi/\partial t - \ell\partial\varphi &= 0, \quad \partial\psi/\partial t - \ell\partial\psi = 0, \\ \partial\varphi/\partial y - m\partial\varphi &= 0, \quad \partial\psi/\partial y - m\partial\psi = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

де за умовою оператори $\ell^* = \ell$, $m^* = m$ належать до класу (5).

Використовуючи перетворення (18) для відповідних операторів $L := \ell\partial$ та $M := m\partial$, з (13) знаходимо, що є сумісною також система рівнянь типу (19) для пари Дарбу-перетворених функцій $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in \tilde{\mathcal{H}} \times \tilde{\mathcal{H}}^*$, тобто

$$\begin{aligned} \partial\tilde{\varphi}/\partial t - \tilde{L}\tilde{\varphi} &= 0, \quad \partial\tilde{\psi}/\partial t - \tilde{M}\tilde{\psi} = 0, \\ \partial\tilde{\varphi}/\partial y - \tilde{L}\tilde{\varphi} &= 0, \quad \partial\tilde{\psi}/\partial y - \tilde{M}\tilde{\psi} = 0, \end{aligned}$$

де відповідно $\tilde{\varphi} = \varphi(\Omega^T)^{-1}\Omega_0^T$, $\tilde{\psi} = \partial^{-1}(\psi_x\Omega^{-1}\Omega_0)$, $\omega^{(1)}[\varphi, \psi] = \varphi^T\psi_x\,dx + Z_L[\varphi, \psi]dt - Z_M[\varphi, \psi]dy = d\Omega[\varphi, \psi]$. Останнє означає, що трансформовані за Дарбу – Беклундом коефіцієнти вихідних операторів L та M будуть задовольняти ту саму умову сумісності Захарова – Шабата, що еквівалентна, як відомо [3], певній системі нелінійних еволюційно-диференціальних рівнянь на їх коефіцієнтні матричні функції. Іншими словами, у випадку ∂-ермітово-узгодженої пари операторів Захарова – Шабата перетворення Дарбу – Беклунда (11) можна ефективно використати для регулярної побудови алгебро-аналітичним шляхом широкого класу так званих солітонних та раціональних розв'язків [1, 3, 4] відповідних еволюційно-диференціальних систем рівнянь.

1. *Matveev V. B., Salle M. I.* Darboux – Backlund transformations and applications. – New York: Springer, 1993.
2. *Прикарпатський Я. А., Самойленко А. М., Самойленко В. Г.* Структура бінарних перетворень типу Дарбу та їх застосування в теорії солітонів // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 12. – С. 1704 – 1719.
3. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
4. *Nimmo J. C. C.* Darboux transformations from reductions of the KP-hierarchy. – 2002. – 11 p. – (Preprint / Univ. Glasgow. November, 8).
5. *Самойленко А. М., Прикарпатський Я. А.* Алгебро-аналітичні аспекти цілком інтегровних динамічних систем та їх збурень // Пр. Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – **41**. – 236 с.

Одержано 05.08.2002