УДК 519.21

В. А. Гасаненко (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
А. Б. Ройтман (Федерал. ун-т Маранхао, Сао Луис, Бразилия)

РАЗРЕЖЕНИЕ ДВИЖУЩИХСЯ ДИФФУЗИОННЫХ ЧАСТИЦ

We investigate a flow of particles moving along a tube together with gas. The dynamics of particles is determined by a stochastic differential equation with different initial states. The walls of the tube absorb the particles. We prove that if the initial flow of particles is determined by a random Poisson measure, then the number of remained particles is characterized by the Poisson distribution. A parameter of this distribution is constructed by means of a solution of the corresponding boundary-value problem of parabolic type.

Досліджується потік частинок, що рухаються трубою разом із газом. Динаміка частинок визначається стохастичним диференціальним рівнянням із різними початковими станами. Стінки труби поглинають частинки. Доведено, що якщо вхідний потік частинок визначається випадковою пуассонівською мірою, то число частинок, що залишилися, має розподіл Пуассона. Параметр цього розподілу будується за допомогою розв'язку відповідної граничної задачі параболічного типу.

Предположим, что газ движется в трубе со скоростью v. Труба имеет круговое сечение радиуса r и ее длина равна l. Этот газ содержит частицы. Если частица при движении в трубе касается стенки трубы, то в момент касания она исчезает. Таким образом происходит разрежение входящего в трубу потока частиц.

Мы рассмотрим следующую проблему, связанную с оценкой разреженного потока (выходящего потока частиц из трубы) частиц.

Пусть N частиц расположены в круге $C \in R^2$ с границей ∂C. Динамика каждой частицы определяется решением стохастического дифференциального уравнения в C с поглощением на границе ∂C

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))\,dt + \sum_{i=1}^{2} b_i(t, \xi(t))\,dw_i(t), \quad \xi(t) \in C, \tag{1}$$

$$b_i(t, x) = (b_{i1}(t, x), b_{i2}(t, x)), \qquad a(t, x)\colon R_+ \times R^2 \to R^2,$$

с различными начальными условиями: $\xi(0) = x_k \in C$, $k = \overline{1, N}$.

Будем предполагать, что выполняется следующее условие [1, с. 470], достаточное для существования единственного решения уравнения (1):

для функций $b_{ij}(t, x)$, $a_i(t, x)$ существует такое L, что

$$\begin{gathered} |a(s, x) - a(s, y)| + \sum_{k}^{n} |b_k(s, x) - b_k(s, y)| \le L|x - y|, \\ |a(s, x)|^2 + \sum_{k}^{n} |b_k(s, x)|^2 \le L^2(1 + |x|^2) \end{gathered} \tag{2}$$

для всех $x, y \in R^n$. Здесь $|y| = \left(\sum_{i=1}^{2} y_i^2\right)^{1/2}$ — длина вектора $y \in R^2$.

Задача состоит в том, чтобы оценить число частиц, оставшихся в круге в момент времени τ $(\tau = l/v)$.

Обозначим число таких частиц $\eta(\tau)$. Определим следующую матрицу:

$$\sigma = BB^T, \quad B = (b_{ij}(t)), \quad \sigma = (\sigma_{ij}(t, x)), \quad 1 \le i, j \le 2.$$

Рассмотрим параболическую граничную задачу

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{j,i=1}^{2}\sigma_{ij}(\tau-t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{2} a_i(\tau-t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}, \quad 0 \le t \le \tau,$$
$$u(0,x) = 1, \quad x \in C, \qquad u(t,x) = 0, \quad x \in \partial C. \tag{3}$$

В добавление к (2) предположим, что коэффициенты операторной части задачи удовлетворяют условию Гельдера по переменной t с показателем $\alpha = 1/2$:

$$\max_i \sup_{(x,t),(x,t')} \frac{|a_i(t,x) - a_i(t',x)|}{|t-t'|^{\alpha}} < \infty,$$
$$\max_{i,j} \sup_{(x,t),(x,t')} \frac{|\sigma_{ij}(t,x) - \sigma_{ij}(t',x)|}{|t-t'|^{\alpha}} < \infty. \tag{4}$$

Будем также предполагать, что операторная часть в (3) равномерно параболична [2, с. 20]. Это означает, что выполнено условие

$$\nu|\bar{z}|^2 \le \sum_{i,j}\sigma_{ij}z_i z_j \le \mu|\bar{z}|^2. \tag{5}$$

Здесь ν, μ — фиксированные положительные числа, а $\bar{z} = (z_1, z_2)$ — произвольный вещественный вектор.

В дальнейшем будем предполагать, что выполнены условия (2), (4), (5). Это предположение гарантирует существование единственного классического решения задачи (3) [2, с. 469].

Кроме того, предположим, что в начальный момент число частиц в круге определяется случайной пуассоновской мерой $\mu(\cdot)$ в C [3, с. 86]. Для $A \in \in \mathbf{B}(C)$

$$P\{\mu(A) = k\} = \frac{m^k(A)}{k!}e^{-m(A)}, \quad \text{где} \quad m(A) = -\ln P\{\mu(A) = 0\}.$$

Здесь $m(\cdot)$ — конечноаддитивная неотрицательная мера на $\mathbf{B}(C)$, $m(C) < \infty$ [3, с. 90].

Рассмотрим следующее разбиение интервала [0, 1]:

$$0 < \frac{1}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < 1.$$

Положим

$$A_{k,n}(\tau) = \left\{x \in C : u(\tau,x) \in \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right\}, \quad k = \overline{0, n-1},$$
$$A(\tau, y) = \{x \in C : u(\tau,x) \in [0,y]\}, \qquad m_\tau(y) := m(A(\tau,y)).$$

Таким образом,

$$A_{k,n}(\tau) = A\left(\tau, \frac{k+1}{n}\right) \setminus A\left(\tau, \frac{k}{n}\right), \qquad m(A_{k,n}(\tau)) = m_\tau\left(\frac{k+1}{n}\right) - m_\tau\left(\frac{k}{n}\right).$$

Поскольку при фиксированном τ функция $u(\tau,x)\colon C \to [0,1]$ непрерывна, множества $A(\tau,y)$, $A_{k,n}(\tau)$ измеримы и определение на них меры $m(\cdot)$ корректно.

Известно, что $u(\tau,x)$ равно вероятности остаться в круге C в момент τ для частицы, которая в начальный момент находилась в точке $x(\xi(0) = x \in C)$. Следовательно, имеет место представление $C = \bigcup_k A_{k,n}(\tau)$.

Теорема. *Если выполнены условия* (2), (4), (5), *то функция распределения случайной величины* $\eta(\tau)$ *является функцией распределения Пуассона*:

$$\mathrm{P}(\eta(\tau)=k) = \frac{a^k(\tau)}{k!}\exp(-a(\tau)), \quad k=0,1,\ldots, \quad \tau>0,$$

с параметром $a(\tau)=\int_0^1 y\,d\,m_\tau(y)$.

Доказательство. Обозначим через $\varsigma_{k,n}(\tau)$ число частиц в круге в момент времени τ, которые в начальный момент времени $(t=0)$ находились в области $A_{k,n}(\tau)$. Функция распределения случайной величины $\varsigma_{k,n}(\tau)$ определяется следующей формулой:

$$\mathrm{P}(\varsigma_{k,n}(\tau)=l) = \sum_{d=l}^{\infty}\mathrm{P}\big(\mu(A_{k,n}(\tau))=d\big)\times$$

$$\times \sum_{1\le i_1,\ldots,i_l\le d,\ i_m\ne i_j,\ m\ne j}\ \prod_{k=1}^{l}u(\tau,x_{i_k})\prod_{s=l+1,\ i_s\notin(i_1,\ldots,i_l),\ i_m\ne i_j}^{d}(1-u(\tau,x_{i_s})),\quad l=0,1,\ldots.$$

Здесь $x_{i_j}\in A_{k,n}(\tau)$. Из построения следует, что для таких точек выполняются неравенства

$$\frac{k}{n}\le u(\tau,x_{i_j})\le\frac{k+1}{n},\qquad 1-\frac{k+1}{n}\le 1-u(\tau,x_{i_j})\le 1-\frac{k}{n}.$$

Положим $p_k(n)=k/n$, $q_k(n)=1-p_k(n)$, $1\le k\le n$. Тогда

$$J_{k,n}(l) := \sum_{d=l}^{\infty}\frac{m^d(A_{k,n}(\tau))}{d!}\exp\big\{-m(A_{k,n}(\tau))\big\}C_d^l\,p_k^l(n)(1-q_{k+1}(n))^{d-l}\le$$

$$\le\ \mathrm{P}(\varsigma_{k,n}(\tau)=l)\ \le$$

$$\le\ \sum_{d=l}^{\infty}\frac{m^d(A_{k,n}(\tau))}{d!}\exp\big\{-m(A_{k,n}(\tau))\big\}C_d^l\,p_{k+1}^l(n)(1-q_k(n))^{d-l} := I_{k,n}(l).\tag{6}$$

Далее,

$$J_{k,n}(l) = \frac{\big(p_k(n)\,m(A_{k,n}(\tau))\big)^l}{l!}\sum_{d=l}^{\infty}\frac{m^{d-l}(A_{k,n}(\tau))}{(d-l)!}q_{k+1}^{d-l}(n) =$$

$$= \frac{\big(p_k(n)\,m(A_{k,n}(\tau))\big)^l}{l!}\exp\big\{-p_{k+1}(n)\,m(A_{k,n}(\tau))\big\}.\tag{7}$$

Аналогично

$$I_{k,n}(l) = \frac{\big(p_{k+1}(n)\,m(A_{k,n}(\tau))\big)^l}{l!}\exp\big\{-p_k(n)\,m(A_{k,n}(\tau))\big\}.\tag{8}$$

Введем производящие функции

$$\varphi(\tau,s) = \sum_{l\ge0}s^l\,\mathrm{P}(\eta(\tau)=l),$$

$$\varphi_{k,n}(\tau,s) = \sum_{l\ge0}s^l\,\mathrm{P}(\varsigma_{k,n}(\tau)=l),\qquad k=\overline{0,n-1},\quad 0\le s\le 1.$$

По построению $\eta(\tau)=\varsigma_{1,n}(\tau)+\ldots+\varsigma_{n-1,n}(\tau)$, где случайные величины $\varsigma_{k,n}(\tau)$, $0\le k\le n-1$, при фиксированном τ независимы в совокупности. Таким образом,

$$\varphi(\tau, s) = \prod_{k=0}^{n-1} \varphi_{k,n}(\tau, s). \tag{9}$$

Из (6) – (8) следует соотношение

$$\exp\left\{(p_k(n)s - p_{k+1}(n))m(A_{k,n}(\tau))\right\} \le \varphi_{k,n}(\tau, s) \le$$
$$\le \exp\left\{(p_{k+1}(n)s - p_{k+1}(n))m(A_{k,n}(\tau))\right\}.$$

Используя теперь (9), получаем

$$\exp\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(p_k(n)s - p_{k+1}(n))m(A_{k,n}(\tau))\right\} \le \varphi(\tau, s) \le$$
$$\le \exp\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(p_{k+1}(n)s - p_k(n))m(A_{k,n}(\tau))\right\}.$$

Суммы под знаком экспонент в последних неравенствах таковы:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(p_{k+1}(n)s - p_k(n))m(A_{k,n}(\tau)) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(s\frac{k+1}{n} - \frac{k+1}{n}\right)m(A_{k,n}(\tau)) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} m(A_{k,n}(\tau)) =$$
$$= (s-1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{n}\left(m_\tau\left(\frac{k+1}{n}\right) - m_\tau\left(\frac{k}{n}\right)\right) + \frac{m(C)}{n}, \tag{10}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(p_k(n)s - p_{k+1}(n))m(A_{k,n}(\tau)) =$$
$$= (s-1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{n}\left(m_\tau\left(\frac{k+1}{n}\right) - m_\tau\left(\frac{k}{n}\right)\right) - \frac{s\,m(C)}{n}. \tag{11}$$

Суммы правых частей в (10), (11) являются интегральными суммами. Существование предела этих сумм при стремлении $n \to \infty$ доказано в работе [4, с. 340]. Таким образом, при $n \to \infty$ правые части в (10), (11) сходятся к интегралу Римана – Стильтьеса

$$(s-1)\int_0^1 y\,dm_\tau(y).$$

Теорема доказана.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1963. – 736 с.
3. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. – М.: Наука, 1986. – 320 с.
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496 с.

Получено 24.04.2003