

А. А. Дороговцев (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ СЛАБОЙ КОМПАКТНОСТИ СЕМЕЙСТВА МЕРОЗНАЧНЫХ ПРОЦЕССОВ

We present a criterion of the weak compactness of continuous measure-valued processes in terms of the weak compactness of families of some space integrals of these processes.

Наведено критерій слабкої компактності неперервних мірозначних процесів у термінах слабкої компактності сімей деяких просторових інтегралів від цих процесів.

Пусть \mathcal{M} — множество всех конечных мер на борелевской σ -алгебре евклидова пространства \mathbb{R}^d . На \mathcal{M} задана топология слабой сходимости. В настоящей статье обсуждаются условия слабой компактности семейств \mathcal{M} -значных непрерывных случайных процессов или случайных элементов в некоторых модификациях пространства \mathcal{M} .

1. **Метрика в пространстве \mathcal{M} .** В данном пункте вводится метрика на \mathcal{M} , соответствующая слабой сходимости и удобная для получения критерия слабой компактности случайных мерозначных процессов. Пусть $C_b(\mathbb{R}^d)$ — пространство непрерывных ограниченных функций на \mathbb{R}^d , а $C_0(\mathbb{R}^d)$ — пространство финитных функций на \mathbb{R}^d с равномерной нормой. Рассмотрим последовательность функций $\{f_n; n \geq 1\}$ из $C_b(\mathbb{R}^d)$ такую, что:

- 1) $f_1 \equiv 1$;
- 2) $\forall n \geq 1: \sup_{\mathbb{R}^d} |f_n| \leq 1$;
- 3) $\forall n > 1: f_n \in C_0(\mathbb{R}^d)$;
- 4) для любой $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$, ограниченной единицей, существует подпоследовательность $\{f_{n_k}; k \geq 1\}$ такая, что

$$\max_{\mathbb{R}^d} |\varphi - f_{n_k}| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Для мер $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ определим

$$\rho_1(\mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\langle \mu, f_n \rangle - \langle \nu, f_n \rangle|}{1 + |\langle \mu, f_n \rangle - \langle \nu, f_n \rangle|}.$$

Здесь и далее через $\langle \mu, f \rangle$ обозначен интеграл от функции f по мере μ по всему \mathbb{R}^d . Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 1. *Последовательность мер $\{\mu_n; n \geq 1\}$ из \mathcal{M} слабо сходится к мере $\mu \in \mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда*

$$\rho_1(\mu_n, \mu) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Пространство \mathcal{M} с метрикой ρ_1 является сепарабельным, но не полным. Рассмотрим еще одну последовательность функций $\{g_n; n \geq 1\}$ из $C_b(\mathbb{R}^d)$ таких, что:

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}^d, n \geq 1: 0 \leq g_n(x) \leq 1$;

$$2) \forall x \in \mathbb{R}^d, \|x\| \leq n: g_n(x) = 0;$$

$$3) \forall x \in \mathbb{R}^d, \|x\| \geq n+1: g_n(x) = 1.$$

Для мер $\mu, \nu \in \mathfrak{M}$ положим

$$\rho_2(\mu, \nu) = \max_{n \geq 1} |\langle \mu, g_n \rangle - \langle \nu, g_n \rangle|.$$

Отметим, что ρ_2 не является метрикой в \mathfrak{M} , однако сумма $\rho = \rho_1 + \rho_2$ — это метрика.

Лемма 2. (\mathfrak{M}, ρ) — полное метрическое сепарабельное пространство, и сходимость в метрике ρ равносильна слабой сходимости.

Доказательство. То, что сходимость в метрике ρ равносильна слабой сходимости, следует из леммы 1. Поскольку дискретными мерами можно аппроксимировать любую меру из \mathfrak{M} в смысле слабой сходимости, (\mathfrak{M}, ρ) — сепарабельное пространство. Пусть теперь $\{\mu_n; n \geq 1\}$ — фундаментальная последовательность в (\mathfrak{M}, ρ) . Тогда последовательности $\{(\langle \mu_n, g_k \rangle)_{k \geq 1}; n \geq 1\}$ образуют фундаментальную последовательность в пространстве c_0 сходящихся к 0 последовательностей с равномерной нормой. Следовательно,

$$\sup_{n \geq 1} \langle \mu_n, g_k \rangle \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

т. е.

$$\sup_{n \geq 1} \mu_n \{x: \|x\| \geq k\} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (1)$$

При этом (из-за фундаментальности в метрике ρ_1)

$$\forall k \geq 1 \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mu_n, f_k \rangle. \quad (2)$$

В частности, с учетом того, что $f_1 \equiv 1$,

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\mathbb{R}^d). \quad (3)$$

Из (1) и (3) следует, что меры $\{\mu_n; n \geq 1\}$ образуют слабо предкомпактное множество, а из (2) — что $\{\mu_n; n \geq 1\}$ имеет единственную предельную точку μ . Теперь $\rho(\mu_n, \mu) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Лемма доказана.

Обозначим через \mathfrak{M}' пополнение пространства \mathfrak{M} в метрике ρ_1 .

Лемма 3. Замкнутое множество F в пространстве (\mathfrak{M}, ρ) компактно тогда и только тогда, когда F предкомпактно в (\mathfrak{M}', ρ_1) и множество

$$\{(\langle \mu, g_k \rangle)_{k \geq 1}; \mu \in F\}$$

предкомпактно в c_0 .

Доказательство леммы 3 стандартно (используется описание фундаментальных последовательностей в \mathfrak{M}) и поэтому опускается. В качестве следствия получаем известное утверждение из [1].

Следствие. Совокупность случайных мер, т. е. случайных элементов в \mathfrak{M} , $\{\xi_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ слабо предкомпактна тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) последовательность случайных величин $\{(\xi_\alpha, f_1) = \xi_\alpha(\mathbb{R}^d); \alpha \in \mathfrak{A}\}$ слабо компактна;

$$2) \forall \varepsilon > 0: \sup_{\mathfrak{A}} P\{\langle \xi_\alpha, g_k \rangle > \varepsilon\} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Из условия 1 и определения последовательности $\{f_k; k \geq 1\}$ следует существование последовательности чисел $\{a_k; k \geq 1\}$ такой, что

$$\forall \alpha \in \mathfrak{A} \quad \forall k \geq 1: \quad P\{|\langle \xi_\alpha, f_k \rangle| > a_k\} < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Из условия 2 следует существование такой последовательности номеров $\{k_i; i \geq 1\}$, что

$$\forall \alpha \in \mathfrak{A} \quad \forall i \geq 1: \quad P\left\{|\langle \xi_\alpha, g_{k_i} \rangle| > \frac{1}{i}\right\} < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}.$$

Рассмотрим множество

$$F = \left\{ \mu: |\langle \mu, f_k \rangle| \leq a_k, k \geq 1, \langle \mu, g_{k_i} \rangle \leq \frac{1}{i}, i \geq 1 \right\}.$$

Согласно лемме 3 F — компакт в (\mathfrak{M}, ρ) . Кроме того, сейчас

$$\forall \alpha \in \mathfrak{A}: \quad P\{\xi_\alpha \in F\} > 1 - \varepsilon.$$

Достаточность доказана.

Необходимость. Необходимость условия 1 очевидна. Докажем необходимость условия 2. Пусть $\{\xi_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — слабо предкомпактное семейство. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт K в (\mathfrak{M}, ρ) такой, что

$$\forall \alpha \in \mathfrak{A}: \quad P\{\xi_\alpha \in K\} > 1 - \varepsilon.$$

Согласно лемме 3

$$\sup_{\mu \in K} \langle \mu, g_k \rangle \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Поэтому

$$\exists k_0: \quad \forall k \geq k_0: \quad \sup_{\mu \in K} \langle \mu, g_k \rangle < \varepsilon.$$

Отсюда

$$\forall \alpha \in \mathfrak{A} \quad \forall k \geq k_0: \quad P\{\langle \xi_\alpha, g_k \rangle > \varepsilon\} < \varepsilon.$$

Следствие доказано.

2. Слабая компактность в пространстве $C([0; 1], c_0)$. Рассмотрим вначале критерий слабой компактности в пространстве $C([0; 1], c_0)$.

Лемма 4. *Замкнутое множество K в $C([0; 1], c_0)$ компактно тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) множество

$$F = \left\{ \max_{i \geq k} |\varphi_i|; \varphi \in K, k \geq 1, 0 \right\}$$

— компакт в $C([0; 1])$;

2) при каждом $k \geq 1$ множество $\{\varphi_k; \varphi \in K\}$ компактно в $C([0; 1])$.

Доказательство. Необходимость. Проверим, что для произвольной $\varphi \in C([0; 1], c_0)$ и $k \geq 1$ функция $\max_{i \geq k} |\varphi_i|$ непрерывна на $[0; 1]$. Действительно,

$$\forall t_1, t_2 \in [0; 1] \quad \forall k \geq 1: \quad \left| \max_{i \geq k} |\varphi_i(t_1)| - \max_{i \geq k} |\varphi_i(t_2)| \right| \leq \max_{i \geq k} |\varphi_i(t_1) - \varphi_i(t_2)|.$$

Из приведенного соотношения следует равностепенная равномерная непрерывность функций из F . Рассмотрим при фиксированном $t \in [0; 1]$ множество

$$\left\{ \max_{i \geq k} |\varphi_i(t)|, \varphi \in K, k \geq 1, 0 \right\}.$$

Нетрудно проверить, что это компакт в \mathbb{R} . Таким образом, F — компакт. Необходимость условия 2 очевидна.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1 и 2. Рассмотрим произвольную последовательность функций $\{\varphi_k^n; k \geq 1\}$ из K . Используя диагональный метод Кантора, выбираем подпоследовательность $\{\varphi^{nj}; j \geq 1\}$ такую, что при каждом $k \geq 1$ последовательности $\{\varphi^{nj}; j \geq 1\}$ и $\{\max_{i \geq k} |\varphi_i^{nj}|, j \geq 1\}$ равномерно сходятся к некоторым функциям φ_k и g_k соответственно. Тогда функция $\varphi = (\varphi_k)_{k \geq 1} \in C([0; 1], c_0)$, так как

$$\sup_{[0; 1]} \sup_{j \geq 1} \max_{i \geq k} |\varphi_i^{nj}(t)| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Кроме того, $\varphi^{nj} \rightarrow \varphi, j \rightarrow \infty$, в $C([0; 1], c_0)$. В силу замкнутости K $\varphi \in K$.

Лемма доказана.

Теорема 1. Семейство $\{\xi_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ случайных элементов в $C([0; 1], c_0)$ слабо предкомпактно тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) семейство $\{\max_{i \geq k} |\xi_\alpha^i|; \alpha \in \mathfrak{A}, k \geq 1\}$ случайных процессов в $C([0; 1])$ слабо предкомпактно;

2) при каждом $k \geq 1$ семейство $\{\xi_\alpha^k; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ слабо предкомпактно в $C([0; 1])$;

3) $\forall t \in [0; 1] \quad \forall \varepsilon > 0: \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} P \left\{ \max_{k \geq n} |\xi_\alpha^k(t)| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$

Доказательство. Необходимость. Пусть семейство $\{\xi_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ слабо предкомпактно в $C([0; 1], c_0)$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует компакт K в $C([0; 1], c_0)$ такой, что

$$\inf_{\alpha \in \mathfrak{A}} P \{ \xi_\alpha \in K \} \geq 1 - \varepsilon.$$

Рассмотрим множество F в $C([0; 1])$ вида

$$F = \left\{ \max_{i \geq k} |\varphi^i|; \varphi \in K, k \geq 1, 0 \right\}.$$

В силу леммы 4 F — компакт. При этом

$$\forall \alpha \in \mathfrak{A} \quad \forall k \geq 1: \quad P \left\{ \max_{i \geq k} |\xi_{\alpha}^i| \in F \right\} \geq 1 - \varepsilon.$$

Следовательно, условие 1 выполнено. Отметим теперь, что при фиксированном $t \in [0; 1]$

$$\sup_{x \in K} \max_{k \geq n} |x_k(t)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Поэтому существует n_0 такой, что

$$\sup_K \max_{k \geq n_0} |x_k(t)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\forall \alpha \in \mathfrak{A}: \quad P \left\{ \max_{k \geq n_0} |\xi_{\alpha}^k(t)| \geq \varepsilon \right\} < \varepsilon.$$

Поэтому условие 3 также выполнено. Необходимость условия 2 очевидна.

Достаточность. Пусть условия 1–3 выполнены. Докажем плотность в $C([0; 1], c_0)$ семейства распределений случайных элементов $\{\xi_{\alpha}; \alpha \in \mathfrak{A}\}$. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно условию 1 в $C([0; 1])$ существует компакт F такой, что

$$\forall \alpha \in \mathfrak{A} \quad \forall k \geq 1: \quad P \left\{ \max_{i \geq k} |\xi_{\alpha}^i| \in F \right\} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4)$$

Для F справедливо соотношение

$$\sup_{f \in F} \sup_{|t_1 - t_2| \leq \delta} |f(t_1) - f(t_2)| \rightarrow 0; \quad \delta \rightarrow 0+.$$

Выберем такое разбиение отрезка $[0; 1]$ $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, чтобы

$$\forall f \in F \quad \forall t \in [0; 1]: \quad \min_{i=0, n} |f(t) - f(t_i)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5)$$

Согласно условию 3 существует номер n_0 такой, что

$$\sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} P \left\{ \max_{k \geq n_0} \max_{i=0, n} |\xi_{\alpha}^k(t_i)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (6)$$

Из (6) и (5) с учетом (4) получаем

$$\sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} P \left\{ \max_{k \geq n_0} \max_{[0; 1]} |\xi_{\alpha}^k(t)| > \varepsilon \right\} < \frac{2}{3} \varepsilon. \quad (7)$$

В силу условия 2 теоремы существует такой компакт G в $C([0; 1], \mathbb{R}^{n_0})$, что

$$\inf_{\alpha \in \mathfrak{A}} P \left\{ (\xi_{\alpha}^1, \dots, \xi_{\alpha}^{n_0}) \in G \right\} > 1 - \frac{\varepsilon}{3}. \quad (8)$$

Построим в $C([0; 1], c_0)$ компакт

$$\tilde{G} = \left\{ \varphi: (\varphi_1, \dots, \varphi_{n_0}) \in G, \varphi_k \equiv 0, k > n_0 \right\}.$$

Тогда из (7) и (8) следует

$$\forall \alpha \in \mathfrak{X}: P\{d(\xi_\alpha, \bar{G}) > \varepsilon\} < \varepsilon. \quad (9)$$

Здесь d — расстояние в $C([0; 1], c_0)$ от точки до множества, определенное обычным образом. Из (9) и произвольности ε следует плотность семейства распределений $\{\xi_\alpha; \alpha \in \mathfrak{X}\}$.

Теорема доказана.

3. Компактность распределений мерозначных процессов. Пусть $\{\xi_\alpha; \alpha \in \mathfrak{X}\}$ — случайные элементы в $C([0; 1], \mathfrak{M})$. Как и ранее, обозначим через \mathfrak{M}' пополнение пространства \mathfrak{M} в метрике ρ_1 . Отметим, что для произвольного $\alpha \in \mathfrak{X}$ ξ_α можно естественным образом рассматривать как случайный элемент в пространствах $C([0; 1], \mathfrak{M}')$ и $C([0; 1], c_0)$.

Лемма 5. Семейство $\{\xi_\alpha; \alpha \in \mathfrak{X}\}$ слабо предкомпактно в $C([0; 1], \mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда $\{\xi_\alpha; \alpha \in \mathfrak{X}\}$ слабо предкомпактно в каждом из пространств $C([0; 1], \mathfrak{M}')$ и $C([0; 1], c_0)$.

Доказательство леммы следует из описания компактов в \mathfrak{M} из леммы 3.

Теорема 2. Семейство $\{\xi_\alpha; \alpha \in \mathfrak{X}\}$ слабо предкомпактно в $C([0; 1], \mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- 1) для любого $k \geq 1$ семейство случайных процессов $\{(\xi_\alpha, f_k); \alpha \in \mathfrak{X}\}$ слабо предкомпактно в $C([0; 1])$;
- 2) семейство $\{(\xi_\alpha, g_k); \alpha \in \mathfrak{X}, k \geq 1\}$ слабо предкомпактно в $C([0; 1])$;
- 3) $\forall t \in [0; 1] \forall \varepsilon > 0: \sup_{\alpha \in \mathfrak{X}} P\{(\xi_\alpha(t), g_k) > \varepsilon\} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Согласно лемме 5 достаточно проверить предкомпактность в каждом из пространств $C([0; 1], \mathfrak{M}')$ и $C([0; 1], c_0)$. Условие 1 равносильно предкомпактности в $C([0; 1], \mathfrak{M}')$, а условия 2 и 3 в силу теоремы 1 равносильны предкомпактности в $C([0; 1], c_0)$.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос о компактности мерозначных процессов постоянной массы в пространстве мер, имеющих моменты. Обозначим для $n \geq 1$ через \mathfrak{M}_n пространство всех вероятностных мер на \mathbb{R}^d , имеющих конечный n -й момент нормы. В \mathfrak{M}_n введем расстояние Вассерштейна [2]

$$\gamma_n(\mu, \nu) = \left(\inf_{\kappa \in \mathcal{Q}(\mu, \nu)} \iint_{\mathbb{R}^d} \|u - v\|^n \kappa(du, dv) \right)^{\frac{1}{n}},$$

где $\mathcal{Q}(\mu, \nu)$ — множество всех вероятностных мер в $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, имеющих μ и ν своими маргинальными распределениями. Можно проверить, что $(\mathfrak{M}_n, \gamma_n)$ — полное сепарабельное метрическое пространство.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 6. Последовательность $\{\mu_k; k \geq 1\}$ из \mathfrak{M}_n сходится к $\mu \in \mathfrak{M}_n$ в метрике γ_n тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) $\{\mu_k; k \geq 1\}$ слабо сходится к μ ;

2) $\sup_{k \geq 1} \int_{\mathbb{R}^d} \|u\|^n \mu_k(du) < +\infty$;

$$3) \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{k \geq 1} \int_{\|u\| \geq m} \|u\|^n \mu_k(du) = 0.$$

Доказательство леммы стандартно и потому не приводится (см., например, [2]).

Введем теперь последовательность функций

$$h_k(u) = g_k(u) \|u\|^n, \quad u \in \mathbb{R}^d, \quad k \geq 1.$$

Отображение

$$\mathfrak{M}_n \ni \mu \mapsto \{\langle \mu, h_k \rangle; k \geq 1\}$$

переводит \mathfrak{M}_n^* в c_0 .

Из леммы следует, что сходимость в метрике γ_n равносильна теперь сходимости в метрике

$$\rho(\mu, \nu) = \rho_1(\mu, \nu) + \max_{k \geq 1} |\langle \mu, h_k \rangle - \langle \nu, h_k \rangle|.$$

Следовательно, справедливы все дальнейшие рассуждения пп. 2 и 3 о характеристике компактов в \mathfrak{M}_n и $C([0; 1], \mathfrak{M}_n)$, а также о слабой компактности в $C([0; 1], \mathfrak{M}_n)$. Приведем соответствующую теорему.

Теорема 3. Семейство случайных элементов $\{\xi_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ слабо предкомпактно в $C([0; 1], \mathfrak{M}_n)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- 1) для любого $k \geq 1$ семейство случайных процессов $\{\langle \xi_\alpha, f_k \rangle; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ слабо предкомпактно в $C([0; 1])$;
- 2) семейство $\{\langle \xi_\alpha, h_k \rangle; \alpha \in \mathfrak{A}, k \geq 1\}$ слабо предкомпактно в $C([0; 1])$;
- 3) $\forall t \in [0; 1] \quad \forall \varepsilon > 0: \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} P\{\langle \xi_\alpha(t), h_k \rangle > \varepsilon\} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

1. Скороход А. В. Стохастические уравнения для сложных систем. – М.: Наука, 1983. – 192 с.
2. Dudley R. M. Real analysis and probability. – Belmont (California): Wadsworth and Brooks, 1989. – 320 p.

Получено 17.04.2003