УДК 517.51

В. Г. Герасимчук (Тернопіл. пед. ун-т),
В. К. Маслюченко, О. В. Маслюченко (Чернівец. нац. ун-т)

НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ ВІДНОСНО ЗМІННОГО РЕПЕРА

We show that the set $D(f)$ of discontinuity points of the function $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ which is continuous at every point p with respect to two variable linearly independent directions $e_1(p)$ and $e_2(p)$ is a set of first category. If, in addition, f is differentiable with respect to one of these directions, then $D(f)$ is nowhere dense set.

Показано, що множина $D(f)$ точок розриву функції $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, яка неперервна у кожній точці p відносно двох змінних лінійно незалежних напрямків $e_1(p)$ і $e_2(p)$, є множиною першої категорії; якщо ж f ще й диференційовна відносно одного з напрямків, то $D(f)$ — ніде не щільна.

1. Відомо [1, 2], що підмножина координатної площини $\mathbf{R}^2$ буде множиною точок розриву деякої нарізно неперервної функції $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ тоді і тільки тоді, коли вона є типу F_σ і її проекції на обидві осі є множинами першої категорії. У роботі [3] дано опис множин точок розриву $D(f)$ нарізно неперервно диференційовних функцій $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$: ними будуть локально проективно ніде не щільні F_σ-множини і тільки вони. З іншого боку, Ю. Ю. Трохимчук [4] довів, що неперервна функція $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, для якої в кожній точці $p \in \mathbf{R}^n$ існує репер $e(p) = (e_1(p), \ldots, e_n(p))$ з лінійно незалежних векторів $e_i(p) \in \mathbf{R}^n$ такий, що всі похідні $D_{e_i(p)} f(p)$ в напрямках $e_i(p)$ дорівнюють нулю, обов'язково є сталою. Теорема Трохимчука тісно пов'язана з результатами праць [5, 6], які розвинув А. В. Бондар [7] для відображень n-вимірних областей. Можливість зняття умови неперервності в результатах такого роду досліджувала М. Т. Бродович.

У зв'язку з цим виникає природне бажання розглянути функції $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, які нарізно неперервні чи нарізно диференційовні відносно змінного репера $e(p)$, і з'ясувати, які у них можуть бути множини точок розриву. На важливість таких досліджень звернув нашу увагу і Ю. Б. Зелінський.

У даній праці ми розпочинаємо дослідження у цьому напрямку, розглядаючи клас $C_{e_1} C_{e_2}$ функцій $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, які нарізно неперервні в кожній точці $p \in \mathbf{R}^2$ відносно двох лінійно незалежних напрямків $e_1(p)$ і $e_2(p)$ змінного репера $e(p) = (e_1(p), e_2(p))$, а також клас $C_{e_1} D_{e_2}$ функцій $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, які в кожній точці $p \in \mathbf{R}$ неперервні в напрямку $e_1(p)$ і диференційовні в напрямку $e_2(p)$. Ми показуємо, що у кожної функції f з класу $C_{e_1} C_{e_2}$ множина $D(f)$ є F_σ-множиною першої категорії, а у функцій f з класу $C_{e_1} D_{e_2}$ множини $D(f)$ будуть ніде не щільними F_σ-множинами. Далі ми будуємо приклад нарізно нескінченно диференційовної функції $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ відносно змінного репера $e = (e_1, e_2)$, у якого навіть $e_1(p) = (1, 0)$ для кожного p, такої, що $D(f) = \mathbf{R} \times \{0\}$. Таке явище для нарізно неперервних функцій $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, звичайно, неможливе. Вказані результати анонсовано у [8].

© В. Г. ГЕРАСИМЧУК, В. К. МАСЛЮЧЕНКО, О. В. МАСЛЮЧЕНКО, 2004

2. Нехай $\mathbf{S} = \{p = (x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ — одиничне коло на площині. *Змінним репером на площині* $\mathbf{R}^2$ називаємо довільне відображення $e = (e_1, e_2)$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{S}^2$ таке, що для кожної точки $p \in \mathbf{R}^2$ вектори $e_1(p)$ і $e_2(p)$ не колінеарні. Для вектора $h \in \mathbf{S}$, точки $p \in \mathbf{R}^2$ і числа $t \in \mathbf{R}$ покладемо $l_{p,h}(t) = p + th$. Функція $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ називається *неперервною (диференційовною) в точці* p *у напрямку* h, якщо композиція $f_{p,h} = f \circ l_{p,h}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ неперервна (диференційовна) в точці $t = 0$. Для диференційовної в точці p у напрямку h функції f число $D_h f(p) = \frac{df_{p,h}}{dt}(0)$ називається *похідною функції* f *у точці* p *у напрямку* h.

Для змінного репера $e = (e_1, e_2)$ в $\mathbf{R}^2$ розглянемо множину $C_e = C_{e_1} C_{e_2}$ всіх функцій $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, які в кожній точці $p \in \mathbf{R}^2$ неперервні в обох напрямках $e_1(p)$ і $e_2(p)$, і множину $C_{e_1} D_{e_2}$ усіх функцій $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, які в кожній точці $p \in \mathbf{R}^2$ неперервні в напрямку $e_1(p)$ і диференційовні в напрямку $e_2(p)$.

Для $p \in \mathbf{R}^2$, $h \in \mathbf{S}$ і числа $\delta > 0$ покладемо $I[p, h, \delta] = l_{p,h}([-\delta, \delta])$. Множина $I[p, h, \delta]$ — це відрізок з серединою p, довжиною 2δ, який лежить на прямій з напрямним вектором h. Якщо e — змінний репер в $\mathbf{R}^2$, $p \in \mathbf{R}^2$ і $\delta > 0$, то символом $R[p, e, \delta]$ позначаємо замкнений прямокутник із діагоналями $I[p, e_1(p), \delta]$ та $I[p, e_2(p), \delta]$ і покладаємо $W(p, e, \delta) = \operatorname{int} R[p, e, \delta]$ та $H[p, e, \delta] = I[p, e_1(p), \delta] \cup I[p, e_2(p), \delta]$. Зауважимо, що з теореми Бера про категорію легко вивести, що для довільної послідовності замкнених у $\mathbf{R}^2$ множин F_n, які покривають $\mathbf{R}^2$, відкрита множина $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{int} F_n$ скрізь щільна в $\mathbf{R}^2$.

Символами $\omega_f(E)$ і $\omega_f(p)$ ми позначимо відповідно коливання функції f на множині E і в точці p.

3. Нехай $e = (e_1, e_2)$ — деякий змінний репер у $\mathbf{R}^2$. Нагадаємо, що відображення f називається *трохи розривним* [9], якщо множина $D(f)$ його точок розриву — це множина першої категорії, або, інакше, множина $C(f)$ його точок неперервності є залишковою.

Теорема 1. *Нехай* $f \in C_e$. *Тоді* $C(f)$ — *скрізь щільна* G_δ-*множина в* $\mathbf{R}^2$, *зокрема функція* f *трохи розривна.*

Доведення. Для номерів m і n покладемо

$$A_{m,n} = \{p \in \mathbf{R}^2 : \omega_f(I[p, e_2(p), 1/m]) < 1/n\},$$

$$F_{m,n} = \overline{A_{m,n}}, \quad G_{m,n} = \operatorname{int} F_{m,n}, \quad G_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} G_{m,n}, \quad E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Оскільки f неперервна в кожній точці $p \in \mathbf{R}^2$ у напрямку $e_2(p)$, то $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{m,n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{m,n} = \mathbf{R}^2$ для кожного n. Тому відкриті множини G_n скрізь щільні в $\mathbf{R}^2$, а отже, множина E також скрізь щільна в $\mathbf{R}^2$, що безпосередньо випливає з теореми Бера про категорію. Доведемо, що $E \subseteq C(f)$.

Нехай $p_0 \in E$ і $\varepsilon > 0$. Візьмемо такий номер n, що $1/n < \varepsilon/3$. Оскільки $p_0 \in G_n$, існує такий номер m, що $p_0 \in G_{m,n}$. Функція f неперервна в точці p_0

у напрямках $e_1(p_0)$ і $e_2(p_0)$ і множина $G_{m,n}$ є відкритою. Тому існує таке $\delta_0 > 0$, що $R[p_0, e, \delta_0] \subseteq G_{m,n}$, $\omega_f(H[p_0, e, \delta_0]) < \varepsilon/3$ і $\delta_0 < 1/2m$. Множина $W_0 = W(p_0, e, \delta_0)$ є відкритим околом точки p_0 в $\mathbf{R}^2$. Доведемо, що $|f(p) - f(p_0)| < \varepsilon$, як тільки $p \in W_0$. Нехай $p \in W_0$. Із неперервності f у точці p у напрямках $e_1(p)$ і $e_2(p)$ і відкритості W_0 випливає, що існує таке $\delta > 0$, що $R[p, e, \delta] \subseteq W_0$ і $\omega_f(H[p, e, \delta]) < \varepsilon/3$. Оскільки $W = W(p, e, \delta)$ — окіл точки p в $\mathbf{R}^2$, причому $W \subseteq W_0 \subseteq G_{m,n} \subseteq \overline{A_{m,n}}$, то існує така точка q, що $q \in W \cap A_{m,n}$. Відрізок $I = I[q, e_2(p), 1/m]$ має довжину $2/m$, причому $\omega_f(I) < 1/n < \varepsilon/3$, адже $q \in A_{m,n}$. Зрозуміло, що $2\delta = \operatorname{diam} R[p, e, \delta] \le \operatorname{diam} R[p_0, e, \delta_0] = 2\delta_0 < 1/m$ і $q \in W \subseteq W_0$. Тому відрізок I з серединою q обов'язково перетинається з об'єднаннями $H = H[p, e, \delta]$ і $H_0 = H[p_0, e, \delta_0]$ діагоналей обох прямокутників. Нехай $q_1 \in H \cap I$ і $q_0 \in H_0 \cap I$. Тоді

$$|f(p)-f(p_0)| \le |f(p)-f(q_1)| + |f(q_1)-f(q_0)| + |f(q_0)-f(p_0)| \le$$
$$\le \omega_f(H) + \omega_f(I) + \omega_f(H_0) < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Таким чином, $p_0 \in C(f)$ і включення $E \subseteq C(f)$ доведено. Звідси випливає, що множина $C(f)$ скрізь щільна в $\mathbf{R}^2$. Як множина точок неперервності дійснозначної функції $C(f)$ є G_δ-множиною. Тому $C(f)$ є залишковою в $\mathbf{R}^2$ і теорему доведено.

Зауваження. Як видно з доведення, теорема залишається справедливою і для відображень $f: \mathbf{R}^2 \to Z$ зі значеннями в метризовному просторі Z.

4. Для функції з класу $C_{e_1} D_{e_2}$ можна довести більше. У наступному доведенні $\|\cdot\|$ — евклідова норма на $\mathbf{R}^2$.

Теорема 2. *Нехай $f \in C_{e_1} D_{e_2}$. Тоді $D(f)$ — ніде не щільна F_σ-множина в $\mathbf{R}^2$.*

Доведення. Покладемо

$$B_{m,n} = \{p \in \mathbf{R}^2 : (\forall t \in \mathbf{R})(|t| \le 1/m \Rightarrow |f(p + te_2(p)) - f(p)| \le n|t|)\},$$

$$F_{m,n} = \overline{B_{m,n}}, \quad G_{m,n} = \operatorname{int} F_{m,n} \quad \text{і} \quad G = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} G_{m,n}.$$

Оскільки f диференційовна в кожній точці $p \in \mathbf{R}^2$ у напрямку $e_2(p)$, то $\bigcup_{m,n=1}^{\infty} F_{m,n} = \mathbf{R}^2$. Тому множина G відкрита і скрізь щільна в $\mathbf{R}^2$. Доведемо, що $G \subseteq C(f)$.

Нехай $p_0 \in G$ і $\varepsilon > 0$. Виберемо такі номери m і n, що $p_0 \in G_{m,n}$. Оскільки $C_{e_1} D_{e_2} \subseteq C_{e_1} C_{e_2}$, то існує таке $\delta_0 > 0$, що $R[p_0, e, \delta_0] \subseteq G_{m,n}$, $\omega_f(H[p_0, e, \delta_0]) < \varepsilon/4$ і $\delta_0 \le \min\left\{\frac{\varepsilon}{8n}, \frac{1}{2m}\right\}$. Множина $W_0 = W(p_0, e, \delta_0)$ є відкритим околом точки p_0. Виберемо $p \in W_0$ і покажемо, що $|f(p) - f(p_0)| < \varepsilon$. Знайдемо таке $\delta > 0$, що $R[p, e, \delta] \subseteq W_0$ і $\omega_f(H[p, e, \delta]) < \varepsilon/4$. Оскільки $W = W(p, e, \delta) \subseteq \overline{B_{m,n}}$, то існує точка $q \in W \cap B_{m,n}$. Розглянемо відрізок $I = I[q, e_2(p), 1/m]$. Він обов'язково перетинається з множинами $H = H[p, e, \delta]$ і $H_0 = H[p_0,$

$e, \delta_0]$, адже $\dfrac{2}{m} \geq 4\delta_0$. Тому можна вибрати точки $q_1 \in H \cap I$ і $q_0 \in H_0 \cap I$. Оскільки точки q, q_0 і q_1 лежать в прямокутнику $R[p_0, e, \delta_0]$, то $\|q_i - q\| \leq$ $\leq 2\delta_0$ при $i = 0, 1$. Нехай $q_i = q + t_i e_2(p)$ при $i = 0, 1$. Тоді

$$|f(q_1) - f(q_0)| \leq |f(q_1) - f(q)| + |f(q_0) - f(q)| \leq n|t_1| + n|t_0| =$$

$$= n(\|q_1 - q\| + \|q_0 - q\|) \leq 4n\delta_0 \leq 4n\frac{\varepsilon}{8n} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

У такому разі

$$|f(p) - f(p_0)| \leq |f(p) - f(q_1)| + |f(q_1) - f(q_0)| + |f(q_0) - f(p_0)| \leq$$

$$\leq \omega_f(H) + \varepsilon/2 + \omega_f(H_0) < \varepsilon/4 + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 = \varepsilon.$$

Таким чином, $p_0 \in C(f)$, отже, $G \subseteq C(f)$. Тоді $D(f) \subseteq \mathbf{R}^2 \setminus G$, звідки випливає, що F_σ-множина $D(f)$ ніде не щільна.

5. Розглянемо функцію

$$g_0(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{x^2+y^2-1}} + 1, & x^2 + y^2 < 1, \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1. \end{cases}$$

Відомо, що g_0 — нескінченно диференційовна функція на $\mathbf{R}^2$, $0 \leq g_0(p) \leq 1$ на $\mathbf{R}^2$ і $g_0(0, 0) = 1$.

Далі, нехай $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ — канторові сходи [10, с. 335] і $\psi = \varphi^{-1}$ — обернене багатозначне відображення. Покладемо $a_{n,k} = \dfrac{2k-1}{2^n}$ для $n \in \mathbf{N}$ і $k = 1, \ldots, 2^{n-1}$, $A_n = \{a_{n,1}, \ldots, a_{n,2^{n-1}}\}$ і $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Нехай $(b_{n,k}, c_{n,k})$, $n \in \mathbf{N}$, $k = 1, \ldots, 2^{n-1}$, — інтервал суміжності канторової множини, довжина якого дорівнює $\dfrac{1}{3^n}$, причому

$$b_{n,1} < c_{n,1} < b_{n,2} < c_{n,2} < \ldots < b_{n,2^{n-1}} < c_{n,2^{n-1}},$$

а $I_{n,k} = [b_{n,k}, c_{n,k}]$. Тоді $\psi(a_{n,k}) = I_{n,k}$, $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$ і $\psi(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\alpha_i}{3^i}$, якщо $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^i} \in (0, 1) \setminus A$, де $\alpha = 0, 1$. Зауважимо, що $\psi(x') < \psi(x'')$, як тільки $0 \leq x' < x'' \leq 1$. (Нерівність $X < Y$ між множинами дійсних чисел означає, що $x < y$ для будь-яких елементів $x \in X$ і $y \in Y$.)

Ці факти ми використаємо при побудові наступного прикладу.

Теорема 3. *Існує функція* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *така, що*:

1) f — *нескінченно диференційовна в кожній точці множини* $\mathbf{R}^2 \setminus (\mathbf{R} \times \{0\})$;

2) $f(p) = 0$ *для кожної точки* $p \in \mathbf{R} \times \{0\}$;

3) *для кожної точки* $p \in \mathbf{R} \times \{0\}$ *існує такий вектор* $e_2(p) \in \mathbf{S} \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\}$, *що* $f(p + te_2(p)) = 0$ *для кожного* $t \in \mathbf{R}$;

4) $D(f) = \mathbf{R} \times \{0\}$.

Доведення. Для $n \in \mathbf{N}$, $k = 1, \ldots, 2^{n-1}$ і $m \in \mathbf{N}$ розглянемо трикутник $\Delta_{n,k}$ з вершинами у точках $(a_{n,k}, 0)$, $(b_{n,k}, 1)$ і $(c_{n,k}, 1)$ і трапеції $P_{n,k,m} = \left\{(x, y) \in \Delta_{n,k}\colon \frac{1}{2^m} \leq y \leq \frac{1}{2^{m-1}}\right\}$. Для $n \in \mathbf{N}$, $k = 1, \ldots, 2^{n-1}$ і $l \in \mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$ побудуємо замкнений круг $W = W_{n,k,l}$ із центром у точці $p_{n,k,l}$ і радіусом $\rho_{n,k,l}$, який міститься у внутрішності трапеції $P_{n,k,n+l}$, і формулою

$$f_W(p) = g_0\left(\frac{p - p_{n,k,l}}{\rho_{n,k,l}}\right)$$

визначимо на $\mathbf{R}^2$ нескінченно диференційовну функцію, носій якої міститься в крузі W. При цьому $f_W(p_{n,k,l}) = 1$ і $0 \leq f_W(p) \leq 1$ на $\mathbf{R}^2$. Нехай $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}_{n,k,l}\colon n \in \mathbf{N},\ k = 1, \ldots, 2^{n-1},\ l \in \mathbf{N}_0\}$ — система всіх цих кругів. Зрозуміло, що ця система диз'юнктна. Оскільки за побудовою в кожній смузі $\mathbf{R} \times \left[\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^{m-1}}\right]$ міститься скінченне число кругів із $\mathcal{W}$, то система $\mathcal{W}$ дискретна поза відрізком $[0, 1] \times \{0\}$, тобто кожна точка $p \in \mathbf{R}^2 \setminus ([0, 1] \times \{0\})$ має окіл, який перетинається щонайбільше з одним кругом із системи $\mathcal{W}$. Тому формулою

$$f_0 = \sum_{W \in \mathcal{W}} f_W$$

визначається нескінченно диференційовна в кожній точці $p \in \mathbf{R}^2 \setminus ([0, 1] \times \times \{0\})$ функція $f_0\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, причому $f_0(p) = 0$ на $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Для точки $p = (x, 0) \in [0, 1] \times \{0\}$ розглянемо пряму L_p, яка проходить через точки p і $(\psi(p), 1)$ при $x \in [0, 1] \setminus A$ і точки p і $(b_{n,k}, 1)$ при $x = a_{n,k} \in A$. Нехай $e_2(p)$ — одиничний напрямний вектор прямої L_p. Із монотонності функції ψ випливає, що прямі L_p не перетинаються з внутрішністю жодного з трикутників $\Delta_{n,k}$, отже, $f_0(q) = 0$ на L_p. При цьому вектор $e_2(p)$ не колінеарний вектору $e_1 = (1, 0)$. Оскільки в будь-якому околі точки $p \in [0, 1] \times \{0\}$ міститься безліч кругів із системи $\mathcal{W}$ і в центрах цих кругів функція f_0 набуває значення 1, а $f_0(p) = 0$, то f_0 розривна в кожній точці $p \in [0, 1] \times \{0\}$. Таким чином, $D(f_0) = [0, 1] \times \{0\}$. Зауважимо, що носій функції f_0 міститься в квадраті $(0, 1) \times (0, 1)$.

Покладаючи для кожного цілого j і $(x, y) \in \mathbf{R}^2$

$$f_j(x, y) = f_0(x - j, y),$$

одержуємо функцію $f_j\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, носій якої міститься в квадраті $(j, j+1) \times (0, 1)$. Ця функція задовольняє властивості 1 – 3, причому $D(f_j) = [j, j+1] \times \{0\}$. Тепер нескладно перевірити, що функція

$$f = \sum_{j \in \mathbf{Z}} f_j$$

і є шуканою.

1. *Baire R.* Sur les fonctions de variables reélles // Ann. mat. pura ed appl. Ser. 3 – 1899. – **3**. – P. 1 – 123.
2. *Kershner R.* The continuity of functions of many variables // Trans. Amer. Math. Soc. – 1943. – **53**, № 1. – P. 83 – 100.
3. *Герасимчук В. Г., Маслюченко В. К., Михайлюк В. В.* Різновиди ліпшицевості і множини точок розриву нарізно диференційовних функцій // Наук. вісн. Чернівец. ун-ту: Зб. наук. праць. Математика. – 2002. – Вип. 134. – С. 22 – 29.
4. *Трохимчук Ю. Ю.* О производных по направлению функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 6. – С. 67 – 79.
5. *Menchoff D.* Sur les differentielles totales des fonctions univalentes // Math. Ann. – 1931. – **105**. – S. 75 – 85.
6. *Gehring F. W., Lehto O.* On the total differentiability of functions of complex variable // Ann. Acad. sci. fenn. Ser. A1. – 1959. – P. 2 – 9.
7. *Бондар А. В.* Про диференційовність відкритих відображень // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 12. – С. 1587 – 1600.
8. *Герасимчук В. Г., Маслюченко В. К., Маслюченко О. В.* Нарізно неперервні і диференційовні функції відносно змінного репера // Міжнар. конф. „Комплексний аналіз і його застосування" (Львів, 26 – 29 травня, 2003): Тези доп. – Львів, 2003. – С. 23 – 24.
9. *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В., Нестеренко В. В.* Точкова розривність функцій багатьох змінних // Наук. вісн. Чернівец. ун-ту: Зб. наук. праць. Математика. – 2001. – Вип. 111. – С. 70 – 76.
10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.

Одержано 02.07.2003