УДК 519.2

Г. І. Бондаренко (Київ. нац. ун-т ім.Т. Шевченка)

ПРО ДЕЯКІ НАСЛІДКИ РІВНЯННЯ ДЛЯ ФУНКЦІЇ МАРКОВСЬКОГО ВІДНОВЛЕННЯ НАПІВМАРКОВСЬКОГО ПРОЦЕСУ

We obtain chains of equations that relate moments of duration of stay of semi-Markov process in the set of states with Markov renewal function. To do this, we use the theory of Markov and semi-Markov processes.

Одержано ланцюги рівнянь, що пов'язують моменти часу перебування напівмарковського процесу в множині станів з його функцією марковського відновлення. Використано математичний апарат теорії марковських та напівмарковських процесів.

1. Вступ. Рівняння марковського відновлення для нестаціонарних характеристик напівмарковських процесів є складними інтегральними рівняннями. Їх аналітичний розв'язок, як правило, знайти не вдається, і чисельне їх розв'язання є непростою задачею [1 – 3]. Тому актуальним є подальший аналіз таких рівнянь і виявлення їх наслідків, що ефективні при дослідженні класів складних напівмарковських систем.

У цій статті одержано ланцюги операторних рівнянь для сильно регулярного напівмарковського процесу за наведених нижче умов $C_1 - C_3$. Результати отримано шляхом дослідження функції марковського відновлення за допомогою методів, розвинутих у роботі [4]. При цьому застосовано наступний алгоритм. Розглядаємо операторні рівняння марковського відновлення для щільності функції марковського відновлення, що будуються відповідно по першому та останньому стрибку напівмарковського процесу. До цих рівнянь, після нескладних алгебраїчних перетворень, застосовуємо перетворення Лапласа і переходимо до границі, коли параметр перетворення Лапласа p прямує до нуля. Як результат отримуємо твердження теореми 1. Абстрактні оператори H_0, H_1, $H_2, \ldots$, що в ній фігурують, виражаються через потенціальний оператор напівмарковського процесу, і їх обчислення є досить складною математичною проблемою. При виконанні додаткової умови стає можливим граничний перехід під знаком інтеграла в перетворенні Лапласа. Тоді оператори H_0, $H_1, H_2, \ldots$ набувають прозорого ймовірнісного сенсу, що приводить до ланцюгів функціональних рівнянь наслідку 1, до яких на відміну від початкових рівнянь марковського відновлення вже не входить такий параметр, як час.

2. Математичний апарат. Нехай $\xi(t)$ — напівмарковський процес (НМП) з фазовим простором $\{X, \mathcal{B}\}$ і напівмарковським ядром $Q(t, x, B)$, $t \geq 0$, $x \in X$, $B \in \mathcal{B}$. Будемо вважати, що НМП $\xi(t)$ є сильно регулярним [4] (п. 1.3).

Нехай $H(t, x, B)$, $t \geq 0$, $x \in X$, $B \in \mathcal{B}$, — функція марковського відновлення процесу $\xi(t)$. Вона є розв'язком рівняння марковського відновлення [4] (п. 1.4)

$$H(t, x, B) = \chi_B(x) + \int_0^t \int_X Q(ds, x, dy) H(t-s, y, B), \tag{1}$$

де

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in B, \\ 0 & \text{при} \quad x \notin B. \end{cases}$$

Нехай $\mathcal{D}(X)$ — банаховий простір $\mathcal{B}$-вимірних обмежених функцій із значеннями в $\mathbb{R}$, з нормою $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Розглянемо дві сім'ї операторів: $Q(t)$ та $H(t)$, $t \geq 0$, що діють в $\mathcal{D}(X)$ за правилом

$$[Q(t)f](x) = \int_X Q(t, x, dy) f(y),$$

$\forall f \in \mathcal{D}(X)$: (2)

$$[H(t)f](x) = \int_X H(t, x, dy) f(y).$$

Припустимо, що для НМП $\xi(t)$ виконуються наступні умови:

C_1. Ланцюг Маркова ξ_n, $n \geq 0$, вкладений у НМП $\xi(t)$, рівномірно рекурентний.

C_2. $\| M_l \| < \infty$ для $l = \overline{1, k+2}$, $k \geq 1$, де оператор $M_l = \int_0^\infty t^l Q(dt)$.

C_3. Напівмарковське ядро НМП $\xi(t)$ абсолютно неперервне по t:

$$Q(t, x, B) = \int_0^t q(s, x, B) ds.$$

З умови C_3 випливає, що існує щільність функції марковського відновлення $h(t, x, B)$ така, що

$$H(t, x, B) = \chi_B(x) + \int_0^t h(s, x, B) ds. \tag{3}$$

Маємо дві сім'ї операторів: $q(t)$ та $h(t)$, $t \geq 0$, що діють в $\mathcal{D}(X)$ за правилом

$$[q(t)f](x) = \int_X q(t, x, dy) f(y),$$

$\forall f \in \mathcal{D}(X)$:

$$[h(t)f](x) = \int_X h(t, x, dy) f(y).$$

Позначимо символом $\sim$ зверху перетворення Лапласа сім'ї операторів вигляду (2):

$$\tilde{Q}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} Q(t) dt, \qquad p \in \mathbb{C}, \tag{4}$$

тобто

$$\forall f \in \mathcal{D}(X): \quad [\tilde{Q}(p) f](x) = \int_0^\infty dt e^{-pt} \int_X Q(t, x, dy) f(y).$$

Легко бачити, що для перетворення (4) є справедливими аналоги основних властивостей перетворення Лапласа для функцій (оригіналів) [5] (п. 8.2).

Нехай Π_0 — стаціонарний проектор вкладеного ланцюга Маркова ξ_n, який за умови C_1 визначається таким чином:

$$\forall f \in \mathcal{D}(X): \quad [\Pi_0 f](x) = \int_X \rho(dy) f(y) \mathbf{1}(x),$$

де $\rho(x)$ — стаціонарний розподіл ланцюга Маркова ξ_n, $\mathbf{1}(x)$ — функція з $\mathcal{D}(X)$, що тотожно дорівнює одиниці.

Покладемо

$$h_*(t) = h(t) - \frac{1}{\hat{m}_1} \Pi_0. \tag{5}$$

Відомо [4] (п. 1.4), що якщо виконуються умови $C_1 - C_3$, то при достатньо малих $|p|$ таких, що $\operatorname{Re} p > 0$, має місце зображення

$$(I - \tilde{q}(p))^{-1} = \frac{1}{p\hat{m}_1} \Pi_0 + T_0 + p T_1 + \ldots + p^k T_k + O(p^{k+1}), \tag{6}$$

причому оператори $T_1, \ldots, T_k$ явним чином виражаються через Π_0, T_0, M_j, $j = \overline{1, k+2}$, де

$$T_0 = \left(I - \frac{1}{\hat{m}_1} \Pi_0 M_1 \right) R_0 \left(I - \frac{1}{\hat{m}_1} M_1 \Pi_0 \right) + \frac{\hat{m}_2}{2\hat{m}_1^2} \Pi_0,$$

I — одиничний оператор, R_0 — потенціальний оператор ланцюга Маркова ξ_n, тобто

$$R_0 = (I - P + \Pi_0)^{-1} - \Pi_0,$$

$P = Q(\infty)$ — оператор перехідних ймовірностей ланцюга Маркова ξ_n,

$$\hat{m}_j = \int_X \rho(dx) m_j(x), \quad j = 1, 2,$$

$m_j(x)$ — j-й момент часу перебування НМП $\xi(t)$ у стані $x \in X$, тобто

$$m_j(x) = \int_0^\infty t^j Q(dt, x, X),$$

$$\overline{\lim_{|p| \to 0}} \frac{\| O(p^k) \|}{|p|^k} < \infty.$$

Справджуються інтегральні рівняння [1, 6]

$$h(t, x, B) = q(t, x, B) + \int_0^t ds \int_X q(s, x, dy) h(t - s, y, B), \tag{7}$$

$$h(t, x, B) = q(t, x, B) + \int_0^t ds \int_X h(s, x, dy) q(t - s, y, B), \tag{8}$$

побудовані відповідно по першому та останньому стрибку процесу $\xi(t)$.

3. Основні співвідношення. Доведемо наступний результат.

Теорема 1. *Якщо для сильно регулярного НМП* $\xi(t)$ *виконуються умови* $C_1 - C_3$, *то справджуються наступні співвідношення*:

$$H_n = M_n + \sum_{r=0}^{n} C_n^r M_{n-r} H_r - \frac{1}{(n+1)\hat{m}_1} M_{n+1} \Pi_0, \tag{9}$$

$$H_n = M_n + \sum_{r=0}^{n} C_n^r H_{n-r} M_r - \frac{1}{(n+1)\hat{m}_1} \Pi_0 M_{n+1}, \tag{10}$$

де

$$n = \overline{0,\, k}, \quad H_n = \begin{cases} T_0 - I & \text{при} \;\; n = 0; \\ (-1)^n n! T_n & \text{при} \;\; n > 0. \end{cases}$$

Доведення. З (7) випливає, що для будь-якого f з $\mathcal{D}(X)$ є справедливим рівняння

$$\int_X h(t, x, dy) f(y) = \int_X q(t, x, dy) f(y) + \int_0^t ds \int_X q(s, x, dz) \int_X h(t-s, z, dy) f(y),$$

тобто має місце операторне рівняння

$$h(t) = q(t) + \int_0^t q(s) h(t-s)\, ds. \tag{11}$$

Лема 1. *Якщо виконуються умови теореми* 1, *то для достатньо малих* $|p|$ *таких, що* $\operatorname{Re} p > 0$, *виконується*

$$\widetilde{A_n}(p) = H_n + O(p), \quad n = \overline{0,\, k},$$

де $A_n(t) = t^n h_*(t)$, $n = \overline{0,\, k}$.

Доведення. Якщо виконуються умови теореми 1, то для p таких, що $\operatorname{Re} p > 0$, є справедливим співвідношення [1] (п. 1.4)

$$\tilde{H}(p) = \frac{1}{p}(I - \tilde{q}(p))^{-1}. \tag{12}$$

З властивостей диференціювання оригінала та формули (3) маємо

$$\tilde{h}(p) = p\tilde{H}(p) - H(0) = p\tilde{H}(p) - I, \quad \widetilde{\Pi_0}(p) = \frac{1}{p}\Pi_0. \tag{13}$$

Отже, з (5), (6) та (12) отримуємо

$$\widetilde{A_0}(p) = \tilde{h}_*(p) = p\tilde{H}(p) - I - \frac{1}{p\hat{m}_1}\Pi_0 = T_0 - I + O(p).$$

З властивості диференціювання відображення і співвідношення (13) випливає

$$\widetilde{A_n}(p) = (-1)^n \tilde{h}_*^{(n)}(p) = (-1)^n \left[(I - \tilde{q}(p))^{-1} - I - \frac{1}{p\hat{m}_1}\Pi_0 \right]^{(n)} =$$

$$= (-1)^n [n! T_n + O(p)], \quad n = \overline{1,\, k}, \quad (n) \text{— } n\text{-та похідна},$$

що й доводить лему.

З рівняння (11) з урахуванням (5) маємо

$$h_*(t) = q(t) + \int_0^t q(s)h_*(t-s)\,ds - \frac{1}{\hat{m}_1}(I - Q(t))\Pi_0. \tag{14}$$

Помножимо обидві частини рівняння (14) на t^n, $n = \overline{1, k}$:

$$t^n h_*(t) = t^n q(t) + t^n \int_0^t q(s)h_*(t-s)\,ds - \frac{t^n}{\hat{m}_1}(I - Q(t))\Pi_0.$$

З урахуванням того, що $t^n = (t-s+s)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r s^{n-r}(t-s)^r$, одержуємо

$$t^n h_*(t) = t^n q(t) + \sum_{r=0}^{n} C_n^r \int_0^t s^{n-r} q(s)(t-s)^r h_*(t-s)\,ds - \frac{t^n}{\hat{m}_1}(I - Q(t))\Pi_0.$$

Перейдемо в останньому рівнянні до перетворення Лапласа. За властивістю перетворення Лапласа згортки функцій (оригіналів) одержимо

$$\widetilde{A_n}(p) = \widetilde{B_n}(p) + \sum_{r=0}^{n} C_n^r \widetilde{B_{n-r}}(p)\widetilde{A_r}(p) - \widetilde{D_n}(p),$$

де $B_n(t) = t^n q(t)$, $D_n(t) = \dfrac{t^n}{\hat{m}_1}(I - Q(t))\Pi_0$, $n = \overline{0, k}$.

Для $p \in \mathbb{R}$ таких, що $p > 0$, перейдемо в останньому рівнянні до границі при $p \to 0$. З теореми Лебега [7] (п. 3.6) випливає, що

$$\lim_{p\to 0} \widetilde{B_n}(p) = M_n, \qquad \lim_{p\to 0} \widetilde{D_n}(p) = \frac{1}{\hat{m}_1(n+1)} M_{n+1}\Pi_0, \qquad n = \overline{0, k}.$$

Звідси та з леми 1 випливає (9).

Аналогічно з рівняння (8) випливає (10).

Теорему доведено.

***Наслідок* 1.** *Якщо виконуються умови теореми* 1 *та для* $n = \overline{0, k}$ *існує* $\int_0^\infty t^n h_*(t)\,dt$, *то мають місце два ланцюги рівнянь (функціональних)*

$$H_n(x, B) = M_n(x, B) + \\ + \sum_{r=0}^{n} C_n^r \int_X M_{n-r}(x, dy) H_r(y, B) - \frac{h_c(B)}{n+1} M_{n+1}(x, X), \tag{15}$$

$$H_n(x, B) = M_n(x, B) + \\ + \sum_{r=0}^{n} C_n^r \int_X H_r(x, dy) M_{n-r}(y, B) - \frac{1}{n+1}\int_X h_c(dy) M_{n+1}(y, B), \tag{16}$$

де $n = \overline{0, k}$, $x \in X$, $B \in \mathcal{B}$,

$$H_n(x, B) = \int_0^\infty t^n (h(t, x, B) - h_c(B))\,dt, \qquad h_c(B) = \frac{\rho(B)}{\hat{m}_1},$$

$$M_n(x, B) = \int_0^\infty t^n q(t, x, B)\,dt.$$

Доведення. Якщо існує $\int_0^\infty t^n h_*(t)\,dt$, то за теоремою Лебега

$$\int_0^\infty t^n h_*(t)\,dt = \lim_{p\to 0} \int_0^\infty e^{-pt} t^n h_*(t)\,dt,$$

де $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$. Тоді з леми 1 випливає

$$H_n = \int_0^\infty t^n h_*(t)\,dt, \quad n = \overline{0, k}.$$

Отже, якщо застосувати операторне рівняння (9) до функції

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in B, \\ 0 & \text{при } x \notin B, \end{cases}$$

то отримаємо (15). Якщо до функції $\chi_B(x)$ застосувати операторне рівняння (10), отримаємо (16).

4. Модельний приклад. Як приклад наведемо задачу пошуку, до якої зручно застосувати наведені результати.

Нехай по каналу зв'язку в випадкові проміжки часу передається сигнал. Динаміка проходження сигналу описується альтернуючим процесом відновлення $\eta(t)$ з двома станами: 0 та 1. Якщо в момент t в каналі є сигнал, то $\eta(t) = 1$, якщо немає сигналу, то $\eta(t) = 0$. При цьому термін перебування в стані $i = 0, 1$ має експоненціальний розподіл із параметром ρ_i. Задано початкову умову $\eta(0) = 1$.

Пошук сигналу ведеться пошуковою системою, яка є недосконалою в тому сенсі, що може не розпізнати сигнал, який є в каналі. Будемо вважати, що процес пошуку не припиняється в момент першого розпізнавання сигналу. Нехай $\lambda\,dt$ (λ — задана константа) — ймовірність того, що в каналі за нескінченно малий проміжок часу $(t, t + dt)$ пошукова система розпізнала сигнал за умови, що в цей час у каналі був сигнал.

Задача полягає в тому, щоб знайти коефіцієнт ефективності пошуку K — математичне сподівання терміну першого розпізнавання сигналу.

Введемо позначення $P(t, 1, x) = \mathcal{P}\{\eta(t) = x / \eta(0) = 1\}$, $x \in \{0, 1\}$. Тоді [8] (п. 7)

$$P(t, 1, 1) = \frac{\rho_0}{\rho_0 + \rho_1} + \frac{\rho_1}{\rho_0 + \rho_1} e^{-(\rho_0 + \rho_1)t}.$$

Функціонування системи пошуку опишемо напівмарковським процесом $\xi(t)$, $t \ge 0$, з одним станом e (процесом відновлення).

У початковий момент $t = 0$ процес $\xi(t)$ знаходиться в стані e.

У момент $t > 0$ відбувається віртуальний перехід процесу $\xi(t)$ в стан e, якщо в цей момент пошукова система розпізнала сигнал. Термін перебування в стані e триває до наступного розпізнавання сигналу.

Щільність функції марковського відновлення h процесу $\xi(t)$ має наступну ймовірнісну інтерпретацію: $h(t, e, e)dt$, $t > 0$, — ймовірність того, що за нескінченно малий проміжок часу $(t, t + dt)$ процес потрапив у стан e принаймні один раз, при умові $\xi(0) = e$. Тоді

$$h(t, e, e) = \lambda P(t, 1, 1).$$

Внаслідок того, що $M_0(e, e) = 1$, рівняння (15) для $n = 0$, $x = e$, $B = e$ набирає вигляду $H_0(e, e) = 1 + H_0(e, e) - M_1(e, e)h_c(e)$, звідки

$$K = M_1(e, e) = \frac{1}{h_c(e)}.$$

Оскільки $h_c(e) = \lim_{t\to\infty} h(t, e, e) = \frac{\lambda\rho_0}{\rho_0 + \rho_1}$, то $K = \frac{\rho_0 + \rho_1}{\lambda\rho_0}$.

Аналогічно можна розглянути випадок, коли в початковий момент часу $t = 0$ в каналі немає сигналу, тоді $K = \frac{\rho_0 + \rho_1}{\lambda\rho_0} + \frac{1}{\rho_0}$.

5. Висновки. У даній роботі досліджено залежність між моментами часу перебування напівмарковського процесу в множинах станів та його функцією марковського відновлення. У випадках, коли функція марковського відновлення відома, наприклад якщо напівмарковський процес задається своєю функцією марковського відновлення, або вона нескладно обчислюється, наприклад для суперпозиції незалежних процесів відновлення або альтернуючих процесів відновлення, отримані рівняння можна застосовувати для визначення моментів часу перебування напівмарковського процесу в множинах станів. Результат може використовуватися для оцінки ефективності функціонування класів напівмарковських систем, зокрема ряду пошукових, надійнісних та інших систем.

1. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1976. – 184 с.
2. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. – Киев: Наук. думка, 1982. – 240 с.
3. *Королюк В. С.* Стохастические модели систем. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
4. *Корлат А. Н., Кузнецов В. Н., Новиков М. М., Турбин А. Ф.* Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. – Кишинев: Штиинца, 1991. – 276 с.
5. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т. – М.: Мир, 1984. – Т. 2. – 738 с.
6. *Шлепаков Л. Н., Вовкодав Н. Г.* Селективный поиск сигнала в многоканальных линиях связи. – Киев, 1995. – 83 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 95.2).
7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
8. *Кокс Д., Смит В.* Теория восстановления. – М.: Сов. радио, 1967. – 300 с.

Одержано 02.07.2003