УДК 517.5

А. Г. Бакан (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ ВИД УСЛОВИЙ ЛУИ ДЕ БРАНЖА ПЛОТНОСТИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ В ПРОСТРАНСТВЕ C_w^0

In the criterion for polynomial denseness in the space C_w^0 established by de Brange in 1959, we replace the requirement of the existence of an entire function by an equivalent requirement of the existence of a polynomial sequence. We introduce the notion of strict compactness of polynomial sets and establish sufficient conditions for a polynomial family to possess this property.

У встановленому Луї де Бранжем у 1959 р. критерії поліноміальної щільності у просторі C_w^0 вимогу існування цілої функції замінено еквівалентною вимогою існування послідовності многочленів. Уведено поняття строгої компактності поліноміальних множин та встановлено достатні умови існування цієї властивості.

1. Предварительные сведения и основной результат. Пусть $C(\mathbb{R})$ обозначает линейное пространство всех действительнозначных и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ — множество всех алгебраических многочленов с действительными коэффициентами степени не выше n, где $n \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \ldots\}$, и $\mathcal{P}(\mathbb{R}) := \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. *Носителем* произвольной функции $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ будем называть множество $S_F := \{x\in\mathbb{R} \mid F(x)\neq 0\}$, а множество всех нулей некоторой целой функции B будем обозначать Λ_B. Напомним, что функция $M_F(x) := \lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{y\in(x-\delta,x+\delta)} F(y)$ называется *верхней функцией Бэра* для функции F (см. [1, с. 185; 2, с. 122]). Наконец, пусть $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ и $\chi_A(x)$ — индикаторная функция множества $A \subseteq \mathbb{R}$, равная 1, если $x\in A$, и 0 — в противном случае.

Для произвольной функции $w:\mathbb{R}\to[0,1]$ рассмотрим полунормированное пространство

$$C_w^0 := \left(\left\{f\in C(\mathbb{R}) \mid \lim_{|x|\to\infty} w(x)f(x) = 0\right\}, \|\cdot\|_w\right),$$

где $\|f\|_w := \sup_{x\in\mathbb{R}} |w(x)f(x)|$.

В 1958 г. С. Н. Мергелян [3, с. 121] заметил, что весовые свойства произвольной функции $w:\mathbb{R}\to[0,1]$ не изменятся, если ее заменить на верхнюю функцию Бэра $M_w(x)$. Другими словами [4, с. 611], полунормированные пространства C_w^0 и $C_{M_w}^0$ тождественно совпадают. Следовательно, без ограничения общности можно рассматривать только полунепрерывные сверху (пн. св.) весовые функции w, т. е. те, для которых имеет место соотношение $w(x) = M_w(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

В 1924 г. С. Н. Бернштейн [5] сформулировал проблему о нахождении условий на вес w, при которых алгебраические многочлены плотны в пространстве C_w^0. С того времени эта проблема и ее различные обобщения исследовались во многих работах, где была выявлена ее важность и установлена ее тесная связь с рядом глубоких вопросов общей теории функций (см. [3, 6 – 9]).

Обозначим через $\mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ множество пн. св. функций $w:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$, удовлетворяющих условию $\|x^n\|_w < \infty$ для всех $n\in\mathbb{Z}_+$. Из изложенного выше ясно, что в проблеме С. Н. Бернштейна без ограничения общности можно предполагать, что весовая функция w принадлежит классу $\mathcal{W}^*(\mathbb{R})$. В настоящее время известно несколько решений этой проблемы: Н. И. Ахиезера и С. Н. Бернштейна (1947 г.) [10], С. Н. Мергеляна (1958 г.) [3] и Луи де Бранжа (1959 г.) [11]. В 1996 г. теорема Луи де Бранжа [11] была улучшена М. Содиным и П. Юдитским [12] и формулируется теперь так.

Теорема А. *Пусть для* $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ *множество* $S_w := \{x \in \mathbb{R} \mid w(x) > 0\}$ *является неограниченным. Алгебраические многочлены* $\mathcal{P}$ *не плотны в* C_w^0 *тогда и только тогда, когда существует такая целая функция* B *не выше первого порядка и нулевого типа, что все ее нули* Λ_B *простые и вещественные,* $\Lambda_B \subseteq S_w$ *и*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_B} \frac{1}{w(\lambda)|B'(\lambda)|} < \infty. \tag{1}$$

Целью настоящей статьи является получение эквивалентного (1) условия, которое бы вместо целой функции B содержало многочлены. Для этого само условие (1) необходимо вначале немного модифицировать.

Напомним (см. [13, с. 113]), что целая функция не выше первого порядка и нормального типа называется *целой функцией конечной степени,* а целая функция порядка меньшего единицы или первого порядка, но минимального типа — *целой функцией нулевой степени.* В 1944 г. Г. Гамбургер [14] ввел класс $\mathcal{H}$ целых функций f, которые имеют только простые и действительные нули и удовлетворяют следующим двум условиям: а) числа $|f'(\lambda)|$, $\lambda \in \Lambda_f$, стремятся к бесконечности при $|\lambda| \to \infty$ быстрее, чем любая степенная функция от $|\lambda|$; б) при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda_f$ имеет место абсолютно сходящееся разложение

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{\lambda \in \Lambda_f} \frac{1}{f'(\lambda)(z-\lambda)}.$$

Если целая функция B удовлетворяет условиям теоремы А, то, применяя теорему Фрагмен – Линделефа (см. [15, с. 208, 12, с. 221, (3)]), убеждаемся, что B принадлежит $\mathcal{H}$. Если же целая функция B принадлежит $\mathcal{H}$ и для некоторого $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию (1), то согласно теореме М. Г. Крейна (см. [13, с. 333]) B — целая функция конечной степени, а согласно лемме 1 в [15, с. 202] имеют место равенства

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_B} \frac{\lambda^n}{B'(\lambda)} = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Поэтому заряд μ (см. определение 16.1 в [1, с. 51])

$$d\mu(x) := \sum_{\lambda \in \Lambda_B} \frac{\delta_\lambda(x)}{B'(\lambda)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

где δ_λ обозначает обобщенную функцию Дирака в точке λ, определяет на пространстве C_w^0 линейный непрерывный функционал $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\mu(x)$, $f \in C_w^0$, с нормой (см. [4, с. 612])

$$\int_{\mathbb{R}} w(x)^{-1} d|\mu|(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_B} \frac{1}{w(\lambda)|B'(\lambda)|} < \infty,$$

и этот функционал равен нулю на всех степенных функциях x^n, $n \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому в этом случае алгебраические полиномы не плотны в C_w^0. Таким образом, достаточное условие в теореме A можно ослабить, требуя существование такой функции $B \in \mathcal{H}$, что $\Lambda_B \subseteq S_w$ и выполняется неравенство (1).

Предположим теперь, что выполняются достаточные условия теоремы A. Если $0 \in S_w$, то можно считать, что $0 \in \Lambda_B$, так как в случае $0 \notin \Lambda_B$ неравенству (1) будет удовлетворять также и функция $zB(z)$. Выделив множитель z из функции $B(z)$, неравенство (1) после переобозначений заменим эквивалентным

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_B} \frac{1}{w(\lambda)|\lambda||B'(\lambda)|} < \infty,$$

где можно считать $B(0) = 1$. Если же $0 \notin S_w$, то нуль не может быть нулем функции B, и поэтому условие $B(0) = 1$ можно предполагать выполненным непосредственно в неравенстве (1).

Таким образом, вводя число $\sigma := \chi_{S_w}(0) \in \{0, 1\}$, мы можем в теореме A добавить условие $B(0) = 1$, а основное неравенство (1) переписать следующим образом:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_B} \frac{1}{w(\lambda)|\lambda|^{\sigma}|B'(\lambda)|} < \infty. \tag{2}$$

И, наконец, так как целая функция B в неравенстве (2) имеет конечную степень, то показатель сходимости ее нулей не больше единицы и, значит,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_B} \frac{1}{\lambda^2} < +\infty.$$

Поэтому это неравенство может быть прибавлено к (2) с сохранением утверждения теоремы A. В результате мы приходим к следующей модифицированной формулировке теоремы A.

Теорема A*. *Пусть для* $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ *множество* $S_w := \{x \in \mathbb{R} \mid w(x) > 0\}$ *является неограниченным. Обозначим* $\sigma := \chi_{S_w}(0) \in \{0, 1\}$.

1. *Если алгебраические многочлены* $\mathcal{P}$ *не плотны в* C_w^0, *то существует целая функция* B *нулевой степени, которая равна единице в нуле*: $B(0) = 1$, *имеет все простые и вещественные корни* $\Lambda_B \subseteq S_w$ *и удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_B} \frac{1}{\lambda^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda_B} \frac{1}{w(\lambda)|\lambda|^{\sigma}|B'(\lambda)|} < \infty. \tag{3}$$

2. *Если существует целая функция* $B \in \mathcal{H}$, *для которой* $B(0) = 1$, $\Lambda_B \subseteq S_w$, *и имеет место неравенство* (3), *то алгебраические многочлены* $\mathcal{P}$ *не плотны в* C_w^0.

Пусть $\mathcal{P}^*(\mathbb{R})$ обозначает множество многочленов $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, все нули которых простые и вещественные и для которых $P(0) = 1$. Заметим, что для любого $P \in \mathcal{P}^*(\mathbb{R})$:

$$P'(0)^2 - P''(0) = \sum_{\lambda \in \Lambda_P} \frac{1}{\lambda^2}.$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для* $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ *множество* $S_w := \{x \in \mathbb{R} \mid w(x) > 0\}$ *является неограниченным. Обозначим* $\sigma := \chi_{S_w}(0) \in \{0, 1\}$.

Алгебраические многочлены $\mathcal{P}$ *не плотны в* C_w^0 *тогда и только тогда, когда*

$$\varliminf_{n\to\infty} \inf_{\substack{P(0)=1,\, \deg P=n \\ \Lambda_P\subset S_w}} \left[P'(0)^2 - P''(0) + \sum_{\lambda\in\Lambda_P} \frac{1}{w(\lambda)|\lambda|^{\sigma}|P'(\lambda)|} \right] < \infty. \tag{4}$$

В п. 2 доказано, что целая функция B, удовлетворяющая неравенству (3), имеет последовательность полиномиальных делителей, на которых реализуется нижний предел в неравенстве (4). Обратно, если неравенство (4) выполняется, то в пп. 3.3 показано, что из любой последовательности многочленов, для которых выражение в квадратных скобках левой части неравенства (4) равномерно ограничено и степени которых стремятся к бесконечности, можно извлечь подпоследовательность, которая на каждом компактном подмножестве $\mathbb{C}$ будет равномерно сходиться к целой функции $B\in\mathcal{H}$, удовлетворяющей неравенству (3) и $B(0)=1$, $\Lambda_B\subseteq S_w$. Таким образом, условие (4) представляет собой иную, полиномиальную форму условия де Бранжа (3). Различие между этими двумя условиями состоит в том, что требование существования целой функции, удовлетворяющей неравенству (3), заменяется условием конечности нижнего предела при $n\to\infty$ значений конечномерных экстремальных задач вида

$$\inf_{-\infty<x_1<x_2<\ldots<x_n<+\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{w(x_k)|x_k|^{\sigma-1}\prod_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{n}|1-x_k/x_m|} \right], \quad n\geq 1, \tag{5}$$

где предполагается $1/0 := +\infty$. Поэтому ввиду уже указанного результата пп. 3.3 условие (4) может рассматриваться как один из конструктивных путей нахождения целой функции B в теореме А*.

Для системы узловых точек $\bar{x}$: $x_1<x_2<\ldots<x_n$ обозначим через $l_k(x)$, $x\in\mathbb{R}$, $1\leq k\leq n$, фундаментальные многочлены Лагранжа

$$l_k(x) := \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k)(x-x_k)}, \qquad \omega_n(x) := \prod_{k=1}^{n}(x-x_k).$$

Напомним, что тогда функция

$$\lambda_{\bar{x}}(x) := \sum_{k=1}^{n}|l_k(x)|$$

называется функцией Лебега, соответствующей системе узлов $\bar{x}$ (см. [2, с. 512]). Нетрудно убедиться, что при каждом натуральном $n\geq 2$ экстремальную задачу (5) можно представить в следующем виде:

$$\inf_{\bar{x}} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{w(x_k)|x_k|^{\sigma}}|l_k(0)| \right]. \tag{6}$$

Если узлы $\bar{x}$ расположены на конечном интервале $[a,b]$, то задача изучения соответствующей $\bar{x}$ константы Лебега

$$\lambda_n(\bar{x},[a,b]) := \max_{x\in[a,b]} \sum_{k=1}^{n}|l_k(x)|$$

так же, как и задача определения оптимальной системы узлов $\bar{x}^*$ на $[a,b]$:

$$\lambda_n\left(\bar{x}^*, [a,b]\right) = \inf_{\bar{x}} \max_{x\in[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |l_k(x)|,$$

давно известна и была предметом изучения в работах Г. Фабера, С. Н. Бернштейна, П. Эрдеша, Г. Эхлича, К. Целлера, Т. Ривлина, Е. Чейни, К. де Бура, А. Пинкуса, Т. Килгора, В. К. Дзядыка, В. В. Иванова и В. К. Задираки (см. [16]). По сравнению с этими задачами, где уже разработаны достаточно эффективные методы исследования, в экстремальной задаче (6) вместо максимума функции Лебега фигурирует значение в нуле „взвешенной" функции Лебега, а конечный интервал заменен на всю прямую за счет добавления квадрата l_2-нормы величин, обратных значениям узлов. Такая задача, по-видимому, является новой, и получение ее решения хотя бы для одного веса $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ представляет собой открытую проблему.

2. Доказательство необходимости утверждения теоремы 1. Пусть алгебраические многочлены $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ не плотны в C_w^0. Тогда применима теорема A*, согласно которой существует целая функция B нулевой степени, удовлетворяющая всем условиям п. 1 теоремы A*.

2.1. Предположим, что множество нулей Λ_B функции B ограничено либо снизу, либо сверху. Замена в (3) $w(x)$ на $w(-x)$ и $B(z)$ на $B(-z)$ позволяет считать без ограничения общности, что множество Λ_B ограничено снизу. Пусть $\{\lambda_n\}_{n\ge -N}$, $N \in \mathbb{Z}_+$, — все элементы Λ_B, занумерованные в порядке возрастания, причем $\lambda_0 > 0$. Поскольку B является целой функцией нулевой степени, согласно теоремам Адамара [13, с. 38] и Линделефа [13, с. 42] $\sum_{n\ge -N} |\lambda_n|^{-1} < \infty$ и многочлены

$$P_n(z) := \prod_{k=-N}^{n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

сходятся к $B(z)$ равномерно на каждом компакте в $\mathbb{C}$.

Найдем число $N_* \in \mathbb{Z}_+$ так, чтобы $\left|\lambda_{-N}\right| \sum_{k\ge m} |\lambda_k|^{-1} < 1$ для произвольного $m \ge N_*$, если $N \ge 1$, и положим $N_* = 0$, если $N = 0$. Зафиксируем произвольное $n \ge N_*$ и пусть $x \in [\lambda_0, \lambda_{n+1})$. Поскольку

$$B(x) = P_n(x) \prod_{k\ge n+1} \left(1 - \frac{x}{\lambda_k}\right)$$

и $0 < x/\lambda_k < 1$ для всех $k \ge n+1$, то

$$|B(x)| \le |P_n(x)| \qquad \forall x \in [\lambda_0, \lambda_{n+1}).$$

Теперь для произвольного числа $0 \le m \le n$ возьмем некоторый $x \in \in [\lambda_0, \lambda_{n+1}) \setminus \{\lambda_m\}$ и разделим последнее неравенство на положительное число $|x - \lambda_m|$:

$$\frac{|B(x)|}{|x-\lambda_m|} \le \frac{|P_n(x)|}{|x-\lambda_m|} \qquad \forall x \in [\lambda_0, \lambda_{n+1}) \setminus \{\lambda_m\}, \quad 0 \le m \le n.$$

Переходя к пределу при $x \to \lambda_m$, $x \ne \lambda_m$, получаем

$$|B'(\lambda_m)| \le |P_n'(\lambda_m)|, \qquad 0 \le m \le n. \tag{7}$$

Если $N \ge 1$, то при $1 \le m \le N$ и $x \in (\lambda_{-m}, 0)$

$$|B(x)| = |P_n(x)| \prod_{k \geq n+1} \left(1 + \frac{|x|}{\lambda_k}\right) \leq |P_n(x)| e^{|\lambda_{-N}| \sum_{k \geq n+1} (\lambda_k)^{-1}} \leq e |P_n(x)|,$$

откуда после деления на положительное число $x - \lambda_{-m}$ и перехода к пределу при $x \to \lambda_{-m}$ имеем

$$\left|B'(\lambda_{-m})\right| \leq e \left|P_n'(\lambda_{-m})\right|, \quad 1 \leq m < N. \tag{8}$$

Неравенства (7) и (8) дают возможность сделать вывод о том, что для каждого $n \geq N_*$

$$P_n'(0)^2 - P_n''(0) + \sum_{\lambda \in \Lambda_P} \frac{1}{w(\lambda)|\lambda|^{\sigma} |P_n'(\lambda)|} \leq \sum_{\lambda \in \Lambda_B} \frac{e}{\lambda^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda_B} \frac{e}{w(\lambda)|\lambda|^{\sigma} |B'(\lambda)|} < \infty,$$

и, значит, неравенство (4) выполняется.

2.2. Рассмотрим теперь случай, когда множество Λ_B неограничено и сверху и снизу. Пусть $\Lambda_B := \{\lambda_k\}_{k \geq 0} \cup \{-\lambda_{-l}\}_{l \geq 1}$, где $0 < \lambda_k < \lambda_{k+1}$, $0 < \lambda_{-k-1} < \lambda_{-k-2}$ $\forall k \in \mathbb{Z}_+$.

Поскольку $B(z)$ является целой функцией конечной степени, согласно теореме Адамара [13, с. 38] $\sum_{\lambda \in \Lambda_B} \lambda^{-2} < \infty$ и для $z \in \mathbb{C}$, R, $a \in \mathbb{R}$, $R \geq$ $\geq \max\{\lambda_0, \lambda_{-1}\}$

$$B(z) = e^{az} \prod_{\lambda \in \Lambda_B} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) e^{z/\lambda} = e^{\left(a + \sum_{\lambda \in \Lambda_B \cap [-R,R]} \lambda^{-1}\right) z} Q_R(z) B_R(z), \tag{9}$$

где

$$Q_R(z) := \prod_{\lambda \in \Lambda_B \cap [-R,R]} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right), \quad B_R(z) := \prod_{\lambda \in \Lambda_B \setminus [-R,R]} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) e^{z/\lambda},$$

и функция $B_R(z)$ сходится при $R \to +\infty$ к 1 равномерно на любом компакте $\mathbb{C}$. При этом если порядок функции $B(z)$ меньше единицы, согласно теореме Адамара [13, с. 38] $\sum_{\lambda \in \Lambda_B} |\lambda|^{-1} < \infty$ и

$$a + \sum_{\lambda \in \Lambda_B} \frac{1}{\lambda} = 0.$$

Если же порядок функции $B(z)$ равен единице, то согласно теореме Линделефа [13, с. 42]

$$a + \overline{\lim_{R \to +\infty}} \sum_{\lambda \in \Lambda_B \cap [-R,R]} \frac{1}{\lambda} = 0.$$

В обоих случаях верно последнее равенство и, значит, существует такая возрастающая к бесконечности последовательность положительных чисел $\{R_p\}_{p \in \mathbb{N}}$, что

$$a + \lim_{p \to \infty} \sum_{\lambda \in \Lambda_B \cap [-R_p, R_p]} \frac{1}{\lambda} = 0. \tag{10}$$

Ввиду (9) это означает, что последовательность многочленов $\{Q_{R_p}\}_{p \in \mathbb{N}}$ при $p \to \infty$ сходится к $B(z)$ равномерно на любом компактном подмножестве $\mathbb{C}$.

Для произвольного натурального p введем следующие обозначения:

$$n_+(p) := \max\left\{k \geq 0 \,|\, \lambda_k \leq R_p\right\}, \quad n_-(p) := \max\left\{l \geq 1 \,|\, \lambda_{-l} \leq R_p\right\}.$$

Легко видеть, что

$$\Lambda_B \cap [-R_p, R_p] = \{\lambda_k\}_{0\le k\le n_+(p)} \cup \{-\lambda_{-l}\}_{1\le l\le n_-(p)}, \tag{11}$$
$$\lim_{p\to\infty} n_+(p) = \lim_{p\to\infty} n_-(p) = \infty,$$

и многочлен $Q_{R_p}(z)$ можно записать в виде

$$Q_{R_p}(z) := \prod_{k=0}^{n_+(p)}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)\prod_{l=1}^{n_-(p)}\left(1+\frac{z}{\lambda_{-l}}\right), \quad p \ge 1.$$

Поэтому для произвольных $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$ и достаточно больших $p \ge 1$ будем иметь

$$Q_{R_p}(z) := \prod_{k=0}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)\prod_{l=1}^{m}\left(1+\frac{z}{\lambda_{-l}}\right)\prod_{k=n+1}^{n_+(p)}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)\prod_{l=m+1}^{n_-(p)}\left(1+\frac{z}{\lambda_{-l}}\right),$$

откуда с помощью предельного перехода при $p \to \infty$ для произвольного $z \in \mathbb{C}$ получим

$$B(z) = \prod_{k=0}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)\prod_{l=1}^{m}\left(1+\frac{z}{\lambda_{-l}}\right)\mathcal{R}_{n,m}(z), \tag{12}$$

где

$$\mathcal{R}_{n,m}(z) := \lim_{p\to\infty}\left[\prod_{k=n+1}^{n_+(p)}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)\prod_{l=m+1}^{n_-(p)}\left(1+\frac{z}{\lambda_{-l}}\right)\right].$$

Использовав известное неравенство $\log(1+x) \le x \ \forall\, x > -1$, легко получить

$$0 < \mathcal{R}_{n,m}(x) \le e^{-xS(n,m)} \quad \forall\, x \in (-\lambda_{-m-1}, \lambda_{n+1}), \quad n \in \mathbb{Z}_0, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

где в силу (10)

$$S(n,m) := \lim_{p\to\infty}\left[\prod_{k=n+1}^{n_+(p)}\frac{1}{\lambda_k} - \prod_{l=m+1}^{n_-(p)}\frac{1}{\lambda_{-l}}\right] = \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{\lambda_{-l}} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\lambda_k} - a. \tag{14}$$

Поэтому

$$|B(x)| \le \left|\mathcal{Q}_{n,m}(x)\right| e^{-xS(n,m)} \quad \forall\, x \in (-\lambda_{-m-1}, \lambda_{n+1}), \quad n \in \mathbb{Z}_0, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

где

$$\mathcal{Q}_{n,m}(z) := \prod_{k=0}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)\prod_{l=1}^{m}\left(1+\frac{z}{\lambda_{-l}}\right).$$

Разделив (15) на положительное число $|x-\lambda|$ при некоторых $\lambda \in \Lambda_B \cap (-\lambda_{-m-1}, \lambda_{n+1})$ и $x \in (-\lambda_{-m-1}, \lambda_{n+1})\setminus\{\lambda\}$ и перейдя затем к пределу при $x \to \lambda$, будем иметь

$$|B'(\lambda)| \le \left|\mathcal{Q}'_{n,m}(\lambda)\right| e^{-\lambda S(n,m)} \tag{16}$$
$$\forall\, \lambda \in \Lambda_B \cap [-\lambda_{-m}, \lambda_n] = \Lambda_{\mathcal{Q}_{n,m}}, \quad n \in \mathbb{Z}_0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

2.2.1. Теперь по произвольному натуральному числу p определим пару чисел $n_p \in \mathbb{Z}_+$ и $m_p \in \mathbb{N}$ следующим образом. Введем обозначения

$$S_p^+(r) := S\big(n_+(p)+r,\, n_-(p)\big); \quad S_p^-(r) := S\big(n_+(p),\, n_-(p)+r\big), \quad p \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+,$$

и для произвольного $p \in \mathbb{N}$ рассмотрим три возможных случая.

2.2.1а. Пусть $S_p^+(0) = 0$. Положим $n_p := n_+(p)$, $m_p := n_-(p)$. Тогда из неравенства (16) имеем

$$|B'(\lambda)| \le \left|\mathcal{Q}'_{n_p,m_p}(\lambda)\right| \quad \forall\,\lambda \in \Lambda_B \cap [-\lambda_{-m_p}, \lambda_{n_p}] = \Lambda_{\mathcal{Q}_{n_p,m_p}}. \tag{17}$$

2.2.1б. Предположим, что $S_p^+(0) > 0$. Поскольку в силу (14)

$$S_p^+(r) = \sum_{l=1}^{n_-(p)} \frac{1}{\lambda_{-l}} - \sum_{k=0}^{n_+(p)+r} \frac{1}{\lambda_k} - a, \quad r \in \mathbb{Z}_+,$$

последовательность $\left\{S_p^+(r)\right\}_{r\in\mathbb{Z}_+}$ строго убывает от $S_p^+(0) > 0$ до

$$\lim_{r\to\infty} S_p^+(r) = \lim_{q\to\infty}\left(\sum_{l=1}^{n_-(p)} \frac{1}{\lambda_{-l}} - \sum_{k=0}^{n_+(q)} \frac{1}{\lambda_k} - a\right) =$$

$$= \lim_{q\to\infty}\left(-\sum_{l=n_-(p)+1}^{n_+(q)} \frac{1}{\lambda_{-l}} + \sum_{l=1}^{n_-(q)} \frac{1}{\lambda_{-l}} - \sum_{k=0}^{n_+(q)} \frac{1}{\lambda_k} - a\right) \overset{(10)}{=} -\sum_{l\ge n_-(p)+1} \frac{1}{\lambda_{-l}} \in [-\infty, 0).$$

Поэтому существует такой $r_p^+ \in \mathbb{Z}_+$, что

$$S_p^+(1+r_p^+) \le 0 < S_p^+(r_p^+), \tag{18}$$

причем $S_p^+(1+r_p^+) = S_p^+(r_p^+) - 1/\lambda_{1+r_p^+ + n_+(p)}$. Положим в этом случае $n_p :=$ $:= 1 + r_p^+ + n_+(p)$, $m_p := n_-(p)$. С учетом равенств $S(n_p, m_p) = S_p^+(1+r_p^+)$ и $S(n_p, m_p) = S_p^+(r_p^+) - 1/\lambda_{1+r_p^+ + n_+(p)}$ получаем

$$e^{-xS(n_p,m_p)} \le \begin{cases} 1 & \forall\, x \le 0, \\ \exp\left(-xS_p^+(r_p^+) + \dfrac{x}{\lambda_{1+r_p^+ + n_+(p)}}\right) \le e & \forall\, x \in [0, \lambda_{1+r_p^+ + n_+(p)}], \end{cases}$$

и, значит, неравенство (16) в этом случае можно переписать в виде

$$|B'(\lambda)| \le e\left|\mathcal{Q}'_{n_p,m_p}(\lambda)\right| \quad \forall\,\lambda \in \Lambda_B \cap [-\lambda_{-m_p}, \lambda_{n_p}] = \Lambda_{\mathcal{Q}_{n_p,m_p}}. \tag{19}$$

2.2.1в. Предположим теперь, что $S_p^+(0) < 0$. Поскольку $S_p^+(0) = S_p^-(0)$, то $S_p^-(0) < 0$ и поэтому последовательность

$$S_p^-(r) = \sum_{l=1}^{n_-(p)+r} \frac{1}{\lambda_{-l}} - \sum_{k=0}^{n_+(p)} \frac{1}{\lambda_k} - a, \quad r \ge 0,$$

строго возрастает от $S_p^-(0) < 0$ до

$$\lim_{r\to\infty} S_p^-(r) = \lim_{q\to\infty}\left(\sum_{l=1}^{n_-(q)} \frac{1}{\lambda_{-l}} - \sum_{k=0}^{n_+(p)} \frac{1}{\lambda_k} - a\right) =$$

$$= \lim_{q\to\infty}\left(\sum_{k=n_+(p)+1}^{n_+(q)} \frac{1}{\lambda_k} + \sum_{l=1}^{n_-(q)} \frac{1}{\lambda_{-l}} - \sum_{k=0}^{n_+(q)} \frac{1}{\lambda_k} - a\right) \overset{(10)}{=} \sum_{k\ge n_+(p)+1} \frac{1}{\lambda_k} \in (0, +\infty].$$

Поэтому существует такой $r_p^- \in \mathbb{Z}_+$, что

$$S_p^-(r_p^-) < 0 \le S_p^-(1+r_p^-), \tag{20}$$

причем $S_p^-(1+r_p^-) = S_p^-(r_p^-) + 1/\lambda_{-(1+r_p^-+n_-(p))}$. Положим в этом случае $n_p :=$ $:= n_+(p)$, $m_p := 1 + r_p^- + n_-(p)$. С учетом равенств $S(n_p, m_p) = S_p^-(1+r_p^-)$ и $S(n_p, m_p) = S_p^-(r_p^-) + 1/\lambda_{-(1+r_p^-+n_-(p))}$ получаем

$$e^{-xS(n_p,m_p)} \le \begin{cases} \exp\left(-xS_p^-(r_p^-) - \dfrac{x}{\lambda_{-(1+r_p^-+n_-(p))}}\right) \le e & \forall\, x \in [-\lambda_{-(1+r_p^-+n_-(p))}, 0], \\ 1 & \forall\, x \ge 0, \end{cases}$$

и поэтому неравенство (16) в данном случае может быть записано в виде (19).

2.2.2. Таким образом, для построенной последовательности многочленов

$$\mathcal{Q}_p(z) := \mathcal{Q}_{n_p,m_p}(z) = \prod_{k=0}^{n_p}\left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right)\prod_{l=1}^{m_p}\left(1 + \frac{z}{\lambda_{-l}}\right), \quad p \in \mathbb{N},$$

выполняются неравенства

$$|B'(\lambda)| \le e\left|\mathcal{Q}_p'(\lambda)\right| \quad \forall\, \lambda \in \Lambda_B \cap [-\lambda_{-m_p}, \lambda_{n_p}] = \Lambda_{\mathcal{Q}_p}, \quad p \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Теперь заметим, что во всех случаях 2.2.1а, 2.2.1б и 2.2.1в $n_p \ge n_+(p)$, $m_p \ge$ $\ge n_-(p)$, и поэтому ввиду (11) числа n_p, m_p так же, как и $\deg \mathcal{Q}_p = 1 + n_p + m_p$, стремятся к бесконечности при $p \to \infty$. Кроме того, для любого $p \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{Q}_p'(0)^2 - \mathcal{Q}_p''(0) + \sum_{\lambda \in \Lambda_{\mathcal{Q}_p}} \frac{1}{w(\lambda)|\lambda|^\sigma \left|\mathcal{Q}_p'(\lambda)\right|} \le \sum_{\lambda \in \Lambda_B} \frac{e}{\lambda^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda_B} \frac{e}{w(\lambda)|\lambda|^\sigma |B'(\lambda)|} < \infty,$$

и, следовательно, неравенство (4) выполняется. Необходимость утверждения теоремы 1 доказана.

3. Строго компактные множества многочленов и доказательство достаточности утверждения теоремы 1. Для доказательства достаточности утверждения теоремы 1 нам понадобится ряд вспомогательных, но имеющих самостоятельное значение результатов о свойствах подмножеств полиномиального семейства $\mathcal{P}^*(\mathbb{R})$.

3.1. Определение строгой компактности. Докажем вначале следующий критерий компактности, который уточняет лемму 1 в [13, с. 423] (гл.8, §1) для случая, когда рассматриваемое полиномиальное множество содержится в $\mathcal{P}^*(\mathbb{R})$.

Лемма 1. *Полиномиальное множество* $G \subset \mathcal{P}^*(\mathbb{R})$ *является компактным*[1] *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

а) $\lambda_1(G) := \sup\limits_{P \in G}\left|\sum\limits_{\lambda \in \Lambda_P} \dfrac{1}{\lambda}\right| < \infty$;

б) $\lambda_2(G) := \sup\limits_{P \in G}\sum\limits_{\lambda \in \Lambda_P} \dfrac{1}{\lambda^2} < \infty$.

Здесь предполагается, что $\sum_{\lambda \in \varnothing} := 0$.

Доказательство. Если множество G компактно, то согласно теореме Монтеля (см. [18, с. 368], гл. 4, §1) оно является равномерно ограниченным в $\mathbb{C}$,

[1] Множество целых функций называется *компактным* (см. [17, с. 228], гл. 4, §12), если из каждой последовательности функций этого множества можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся равномерно на любом компактном подмножестве $\mathbb{C}$. Для упрощения формулировок пустые множества будем считать компактами.

т. е. для любого компактного множества $K \subset \mathbb{C}$: $\sup_{P \in G, z \in K} |P(z)| < \infty$. Тогда из неравенств Коши для единичной окружности с центром в нуле (см. [17, с. 111], гл. 2, § 6) получим $\sup_{P \in G}\left(|P'(0)| + |P''(0)|\right) < \infty$, что вместе с очевидными равенствами $\lambda_1(G) = \sup_{P \in G}|P'(0)|$, $\lambda_2(G) = \sup_{P \in G}\left|P'(0)^2 - P''(0)\right|$ доказывает выполнение неравенств а) и б). Обратно, неравенства а), б) и очевидное соотношение $\left|(1-z)e^z\right| \le e^{4|z|^2}$ $\forall\, z \in \mathbb{C}$ (см. [19], гл. 3, § 3, п. 3.3) позволяют заключить, что при произвольных $P \in G$ и $z \in \mathbb{C}$

$$\left|P(z)\, e^{z\sum_{\lambda \in \Lambda_P} 1/\lambda}\right| = \left|\prod_{\lambda \in \Lambda_P}\left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)e^{z/\lambda}\right| \le e^{4\lambda_2(G)|z|^2},$$

откуда $|P(z)| \le \exp\left(\lambda_1(G)|z| + 4\lambda_2(G)|z|^2\right)$. Таким образом, семейство G является равномерно ограниченным в $\mathbb{C}$ и согласно теореме Монтеля (см. [17, с. 228], гл. 4, § 12) компактным.

Лемма 1 доказана.

Пусть $\mathcal{E}$ обозначает линейное пространство всех целых функций и для $A \subset \mathcal{E}$ через $\mathrm{Close}_{\mathcal{E}} A$ обозначим замыкание множества A в топологии $\tau_{\mathcal{E}}$, порождаемой последовательностью норм на $\mathcal{E}$ вида $\|\cdot\|_N$, $N \ge 1$, где $\|f\|_N := \max_{|z| \le N}|f(z)|$, $f \in \mathcal{E}$. Следует заметить, что рассуждениями от противного вместе с применением формулы Коши для производных (см. [17, с. 119], гл. 2, § 6) к равномерно сходящейся в топологии $\tau_{\mathcal{E}}$ последовательности многочленов $\{P_n\}_{n \ge 1}$ легко получаем существование конечного или бесконечного предела $\lim_{n \to \infty} \deg P_n$. Другими словами, либо существует $\lim_{n\to\infty} \deg P_n = \infty$, либо, начиная с некоторого номера все степени многочленов P_n одинаковы и равны некоторому неотрицательному целому числу. Напомним также, что целая функция, не являющаяся многочленом, называется *трансцендентной*.

Определение 1. *Будем называть множество $G \subset \mathcal{P}^*(\mathbb{R})$ строго компактным, если G компактно и либо существует такое натуральное n, что $G \subset \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, либо в случае, когда $G \setminus \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \ne \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$, для любой сходящейся в топологии $\tau_{\mathcal{E}}$ последовательности $\{P_n\}_{n \ge 1} \subset G$, которая удовлетворяет условию $\lim_{n\to\infty} \deg P_n = \infty$, предельная целая функция $\lim_{n\to\infty} P_n(z)$ является трансцендентной.*

Легко убедиться, что компактное множество $G \subset \mathcal{P}^*(\mathbb{R})$ является строго компактным в том и только в том случае, когда

$$G \cap \left[\bigcap_{n \ge 1} \mathrm{Close}_{\mathcal{E}}\left(G \setminus \mathcal{P}_n(\mathbb{R})\right)\right] = \varnothing.$$

Главной целью данного пункта является получение наиболее слабых достаточных условий строгой компактности подмножеств $\mathcal{P}^*(\mathbb{R})$.

3.2. Достаточные условия строгой компактности. Имеют место следующие достаточные условия компактности подмножеств $\mathcal{P}^*(\mathbb{R})$.

Лемма 2. *Для любых конечных постоянных $\alpha, \beta \ge 0$ и $A > 0$ множество*

$$\left\{P \in \mathcal{P}^*(\mathbb{R}) \,\middle|\, \sum_{\lambda \in \Lambda_P} \frac{e^{-\alpha|\lambda|}}{\lambda^2} \le A;\ |P'(\lambda)| \ge \frac{e^{-\beta|\lambda|}}{A} \quad \forall\, \lambda \in \Lambda_P\right\} \tag{22}$$

является компактным.

Доказательство. Пусть $M = 2\alpha + \beta + 1$, $\alpha_n := \pi M^{-1}(n - 1/2)$, $n \in \mathbb{Z}$, и P — произвольный полином из множества (22) степени не ниже 1. Поскольку для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ имеет место разложение

$$\frac{1}{\operatorname{ch}(Mz)} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{M\alpha_n}\left(\frac{z}{z + i\alpha_n} + \frac{z}{z - i\alpha_n}\right),$$

обозначив $\Lambda_P := \{\lambda_k\}_{k=1}^N$, $0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots \leq |\lambda_N|$, для произвольного $z \in \mathbb{C} \setminus (\Lambda_P \bigcup \{\alpha_n\}_{n\geq 1})$ получим

$$\Phi(z) := \frac{1}{P(z)\operatorname{ch}(Mz)} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{(z - \lambda_k)P'(\lambda_k)\operatorname{ch}(M\lambda_k)} + \frac{i}{M}\sum_{n\geq 1}(-1)^n \times$$

$$\times \left[\frac{1}{(z - i\alpha_n)P(i\alpha_n)} + \frac{1}{(z + i\alpha_n)P(-i\alpha_n)}\right]. \tag{23}$$

Дифференцируя равенство (23) и полагая $z = 0$, имеем $\Phi'(0) = -P'(0)$, $\Phi''(0) = 2P'(0)^2 - P''(0) - M^2$ и

$$P'(0) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k^2 P'(\lambda_k)\operatorname{ch}(M\lambda_k)} + \frac{i}{M}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\alpha_n^2}\left(\frac{1}{P(-i\alpha_n)} - \frac{1}{P(i\alpha_n)}\right),$$

$$P''(0) + M^2 - 2P'(0)^2 = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k^3 P'(\lambda_k)\operatorname{ch}(M\lambda_k)} +$$

$$+ \frac{1}{M}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\alpha_n^3}\left(\frac{1}{P(i\alpha_n)} + \frac{1}{P(-i\alpha_n)}\right).$$

Последние два равенства с учетом того, что $|P(i\lambda)| \geq 1 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ и $\sum_{n\geq 1}(n - 0{,}5)^{-2} = \pi^2/2$, $\sum_{n\geq 1}(n - 0{,}5)^{-3} \leq \pi^3/2$ (см. [20], гл. 5, п. 5.1.4), означают, что

$$|P'(0)| \leq M + \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k^2|P'(\lambda_k)|\operatorname{ch}(M\lambda_k)}, \tag{24}$$

$$2P'(0)^2 - P''(0) \leq 2M^2 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{|\lambda_k|^3|P'(\lambda_k)|\operatorname{ch}(M\lambda_k)}. \tag{25}$$

Использовав (22) для многочлена P в неравенствах (24) и (25), мы сможем получить следующие оценки величин $\left|\sum_{k=1}^N 1/\lambda_k\right| = |P'(0)|$ и $\sum_{k=1}^N 1/\lambda_k^2 = P'(0)^2 - P''(0)$:

$$\left|\sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k}\right| \leq M + 2A\sum_{k=1}^N \frac{e^{-(M-\beta)|\lambda_k|}}{\lambda_k^2} \leq M + 2A\sum_{k=1}^N \frac{e^{-\alpha|\lambda_k|}}{\lambda_k^2} \leq M + 2A^2,$$

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k^2} \leq 2M^2 + 2A\sum_{k=1}^N \frac{e^{-(M-\beta)|\lambda_k|}}{|\lambda_k|^3} \leq 2M^2 + 2A^{1{,}5}\sum_{k=1}^N \frac{e^{-(M-\beta-0{,}5\alpha)|\lambda_k|}}{\lambda_k^2} \leq$$

$$\leq 2M^2 + 2A^{1{,}5}\sum_{k=1}^N \frac{e^{-\alpha|\lambda_k|}}{\lambda_k^2} \leq 2M^2 + 2A^{2{,}5}.$$

Полученные неравенства доказывают, что выполняются условия а) и б) леммы 1 и, значит, множество (22) является компактным.

Лемма 2 доказана.

Следующая теорема является основным результатом данного пункта.

Теорема 2. *Для любой функции* $\gamma \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ *и любых конечных постоянных* $\alpha \geq 0$, $C > 0$ *множество*

$$\left\{ P \in \mathcal{P}^*(\mathbb{R}) \,\middle|\, \sum_{\lambda \in \Lambda_P} \frac{e^{-\alpha|\lambda|}}{\lambda^2} \leq C;\ |P'(\lambda)| \geq \frac{1}{C\gamma(\lambda)} \quad \forall \lambda \in \Lambda_P \right\} \tag{26}$$

является строго компактным. Здесь предполагается, что $1/0 := +\infty$.

Доказательство. Поскольку функция γ равномерно ограничена на вещественной оси, то любой многочлен из множества (26) удовлетворяет условиям (22) при $\beta = 0$ и $A = C \cdot \|1\|_\gamma$. Поэтому множество (26) является компактным.

Обозначим полиномиальное семейство (26) через G. Для доказательства строгой компактности G согласно определению 1 следует рассмотреть только случай, когда $G \setminus \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \neq \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольную равномерно сходящуюся на любом компакте $\mathbb{C}$ к целой функции f последовательность многочленов $\{P_n\}_{n\geq 1} \subseteq G$, удовлетворяющих условию $\lim_{n\to\infty} \deg P_n = +\infty$, и докажем, что f не является многочленом.

Пусть $\Lambda_{P_n} = \{\lambda_k^{(n)}\}_{k=1}^{r_n}$, где $0 < \left|\lambda_1^{(n)}\right| \leq \left|\lambda_2^{(n)}\right| \leq \ldots \leq \left|\lambda_{r_n}^{(n)}\right| < \infty \ \forall n \geq 1$ и в силу условия (26) все числа из множества Λ_{P_n} являются различными. Кроме того,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_{P_n}} \frac{1}{\lambda^2} \leq M \quad \forall n \geq 1, \tag{27}$$

где в соответствии с обозначениями леммы 1 $M := \max\{\lambda_1(G), \lambda_2(G)\}$.

По произвольному натуральному числу $p \geq 1$ найдем такое натуральное число n_p, что $r_n \geq p$ для всех $n \geq n_p$, и для каждого $n \geq n_p$ определим многочлен $\Delta_{n,p}(x)$ следующим образом: $\Delta_{n,1}(x) \equiv 1$ и

$$\Delta_{n,p}(x) := \left(1 - \frac{x}{\lambda_1^{(n)}}\right)\left(1 - \frac{x}{\lambda_2^{(n)}}\right)\ldots\left(1 - \frac{x}{\lambda_{p-1}^{(n)}}\right), \quad p \geq 2.$$

Для указанных значений n и p положим $P_{n,p}(x) := P_n(x)/\Delta_{n,p}(x)$. Тогда для произвольного $p \leq k \leq r_n$

$$\left|P_n'(\lambda_k^{(n)})\right| = \left|\Delta_{p,n}(\lambda_k^{(n)})\right|\left|P_{n,p}'(\lambda_k^{(n)})\right| \overset{(27)}{\leq} \left(1 + \left|\lambda_k^{(n)}\right|\sqrt{M}\right)^{p-1}\left|P_{n,p}'(\lambda_k^{(n)})\right|,$$

и, значит, $\left|P_{n,p}'(\lambda_k^{(n)})\right| \geq \left|P_n'(\lambda_k^{(n)})\right|\left(1 + \left|\lambda_k^{(n)}\right|\sqrt{M}\right)^{1-p}$. Применяя это неравенство к разложению на простые дроби функции $P_{n,p}(z)^{-1}$ при $z = 0$ с учетом $P_{n,p}(0) = 1$ и свойств (26), имеем

$$1 \leq \sum_{k=p}^{r_n} \frac{1}{\left|P_{n,p}'(\lambda_k^{(n)})\right|} \frac{1}{\left|\lambda_k^{(n)}\right|} \leq \sum_{k=p}^{r_n} \frac{\left(1 + \left|\lambda_k^{(n)}\right|\sqrt{M}\right)^{p-1}}{\left|\lambda_k^{(n)}\right|\left|P_n'(\lambda_k^{(n)})\right|} \leq \frac{1}{\left|\lambda_p^{(n)}\right|} \sum_{k=p}^{r_n} \frac{\left(1 + \left|\lambda_k^{(n)}\right|\sqrt{M}\right)^{p-1}}{\left|P_n'(\lambda_k^{(n)})\right|} \leq$$

$$\leq \frac{C}{\left|\lambda_p^{(n)}\right|} \sum_{k=p}^{r_n} \gamma(\lambda_k^{(n)})\left(1 + \left|\lambda_k^{(n)}\right|\sqrt{M}\right)^{p-1} \leq \frac{MC}{\left|\lambda_p^{(n)}\right|}\left\| x^2\left(1 + |x|\sqrt{M}\right)^{p-1}\right\|_\gamma,$$

откуда

$$\left|\lambda_m^{(n)}\right| \leq R_p := MC\left\|x^2\left(1+|x|\sqrt{M}\right)^{p-1}\right\|_\gamma \quad \forall\, n \geq n_p,\ \ 1 \leq m \leq p,\ \ p \in \mathbb{N}. \tag{28}$$

Зафиксируем теперь произвольное, сколь угодно большое натуральное число N. В силу (28) внутри круга с центром в нуле и радиуса $1 + R_N$ каждый многочлен P_n имеет не менее N нулей, если только $n \geq n_N$. Поэтому согласно теореме Гурвица (см. [18, с. 426], гл. 4, § 3) в этом же круге предельная функция f также имеет не менее N нулей. Произвольность числа N доказывает требуемую трансцендентность функции f.

Теорема 2 доказана.

Следствие. *Пусть G обозначает полиномиальное семейство* (26) *и $G \backslash \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \neq \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда если $f \in (\mathrm{Close}_{\mathscr{E}} G) \backslash G$, то f является трансцендентной целой функцией из класса $\mathcal{H}$ и $f(0) = 1$.*

Доказательство. Согласно условию следствия существует последовательность многочленов $\{P_n\}_{n\geq 1} \subseteq G$, которая на любом компакте в $\mathbb{C}$ равномерно сходится к f. Согласно теореме Полиа – Лаггера (см. [21, 22], [19], гл. 3, § 3) функция f, будучи равномерным пределом многочленов из множества $\mathcal{P}^*(\mathbb{R})$, имеет вид

$$e^{-a^2x^2+bx}\prod_{k\geq 1}\left(1-\frac{x}{a_k}\right)e^{x/a_k}, \tag{29}$$

где a, b, a_k, $k \in \mathbb{N}$, — вещественны, $0<|a_1|\leq|a_2|\leq\ldots\leq|a_k|\leq\ldots\leq+\infty$ и $\sum_{k\geq 1} a_k^{-2} < \infty$, причем предполагается возможным, что начиная с некоторого номера все a_k равны бесконечности. Поэтому f является целой функцией, имеющей только действительные нули, и $f(0) = 1$.

Согласно теореме Гурвица для произвольного $k \geq 1$ существует такая последовательность $\zeta_n \in \Lambda_{P_n}$, $n \geq 1$, что $\lim_{n\to\infty}\zeta_n = a_k$. Тогда по формуле Коши для первой производной (см. [17, с. 119], гл. 2, § 6) по окружности с центром в a_k и некоторым, не зависящим от n, положительным радиусом с учетом равномерной сходимости P_n к f на этой окружности и полунепрерывности сверху функции γ получаем

$$f'(a_k) = \lim_{n\to\infty} P_n'(\zeta_n) \overset{(26)}{\geq} \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{C\gamma(\zeta_n)} = \frac{1}{C\varlimsup\limits_{n\to\infty}\gamma(\zeta_n)} \geq \frac{1}{C\gamma(a_k)}, \quad k \geq 1. \tag{30}$$

Неравенства (30) доказывают, что все корни функции f являются простыми.

В соответствии с замечанием, сделанным перед определением 1, предположим, что начиная с некоторого номера все степени многочленов P_n одинаковы и равны $m \geq 1$. Тогда f является многочленом той же степени со всеми действительными и различными корнями a_k, $1 \leq k \leq m$. Применяя теорему Гурвица, получаем существование такой перенумерации корней $\{\lambda_p^{(n)}\}_{p=1}^m$ многочлена P_n, что $\lim_{n\to\infty}\lambda_p^{(n)} = a_p$. Это позволяет перейти к пределу при $n \to \infty$ в первом неравенстве (26) и в силу (30) сделать вывод о том, что $f \in G$. Полученное противоречие с условием следствия доказывает, что $\lim_{n\to\infty}\deg P_n = +\infty$. Поэтому согласно теореме 2 функция f является трансцендентной, причем согласно неравенствам (30) числа $|f'(\lambda)|$, $\lambda \in \Lambda_f$, стремятся к бесконечности при $|\lambda| \to \infty$ быстрее, чем любая степенная функция от λ.

Для произвольного $k \geq 1$ положим $a_0 := 0$, $R_k := 3^{-1}\inf_{n\geq 0, n\neq k}|a_k - a_n|$ и $I_k := [a_k - R_k, a_k + R_k]$. Очевидно, что отрезки I_k, $k \geq 1$, не пересекаются и существуют такие две стремящиеся к $+\infty$ последовательности положительных чисел B_N^+, B_N^-, $N \geq 1$, что $B_N^+, -B_N^- \in \mathbb{R}\setminus\bigcup_{k\geq 1} I_k$ для всех $N \geq 1$. Согласно теореме Гурвица для любого $N \geq 1$ можно найти такое натуральное число m_N, что для произвольного $n \geq m_N$ отрезок $\Delta_N := [-B_N^-, B_N^+]$ содержит одинаковое число нулей функции f и многочлена P_n, причем каждый отрезок $I_k \subset \subset \Delta_N$ содержит ровно один элемент $\lambda_k^{(n)}$ множества Λ_{P_n}, стремящийся к a_k при $n \to \infty$. По формуле Коши для первых производных, взятой по окружности $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_k| = R_k\}$, с учетом равномерной сходимости P_n к f на этой окружности получаем $\lim_{n\to\infty} P_n'(\lambda_k^{(n)}) = f'(a_k)$. Поэтому для любых $N \geq 1$, $n \geq \geq m_N$ и $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, имеем

$$\left|\frac{1}{P_n(z)} - \sum_{\lambda\in\Delta_N\cap\Lambda_{P_n}} \frac{1}{(z-\lambda)P_n'(\lambda)}\right| = \left|\sum_{\lambda\in\Lambda_{P_n}\setminus\Delta_N} \frac{1}{(z-\lambda)P_n'(\lambda)}\right| \overset{(26)}{\leq}$$

$$\overset{(26)}{\leq} \sum_{\lambda\in\Lambda_{P_n}\setminus\Delta_N} \frac{C\gamma(\lambda)}{|z-\lambda|} \overset{(27)}{\leq} \frac{MC}{\inf\limits_{\lambda\in\Lambda_{P_n}\setminus\Delta_N}|z-\lambda|} \sup_{|x|\geq\min\{B_N^+, B_N^-\}} x^2\gamma(x),$$

откуда, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем неравенство

$$\left|\frac{1}{f(z)} - \sum_{\lambda\in\Delta_N\cap\Lambda_f} \frac{1}{(z-\lambda)f'(\lambda)}\right| \leq \frac{MC}{\inf\limits_{\lambda\in\Lambda_f\setminus\Delta_N}|z-\lambda|} \sup_{|x|\geq\min\{B_N^+, B_N^-\}} x^2\gamma(x),$$

переход к пределу в котором при $N \to \infty$ доказывает справедливость абсолютно сходящегося разложения

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{\lambda\in\Lambda_f} \frac{1}{f'(\lambda)(z-\lambda)}$$

при каждом $z \in \mathbb{C}\setminus\Lambda_f$. Таким образом, $f \in \mathcal{H}$, и доказательство следствия 1 завершено.

***3.3. Доказательство достаточности утверждения теоремы* 1.** Неравенство (4) означает существование таких последовательности $P_n \subset \mathcal{P}^*(\mathbb{R})$, $n \geq \geq 1$, и конечной положительной постоянной D, что

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_{P_n}} \frac{1}{\lambda^2} + \sum_{\lambda\in\Lambda_{P_n}} \frac{1}{w(\lambda)|\lambda|^\sigma|P_n'(\lambda)|} \leq D \quad \forall\, n \geq 1, \tag{31}$$

и $\lim_{n\to\infty} \deg P_n = +\infty$. Очевидно, что все многочлены P_n принадлежат множеству (26) с $C = D$, $\alpha = 0$ и $\gamma(x) = |x|^\sigma w(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Поэтому согласно теореме 2 из последовательности $\{P_n\}_{n\geq 1}$ можно выделить подпоследовательность $\{P_{n_k}\}_{k\geq 1}$, сходящуюся к целой трансцендентной функции f в топологии $\tau_{\mathscr{E}}$, которая по следствию 1 будет принадлежать классу $\mathcal{H}$ и $f(0) = 1$. Переобозначая последовательность $\{P_{n_k}\}_{k\geq 1}$ снова через $\{P_n\}_{n\geq 1}$ и используя обозначения из доказательства следствия 1, для любых $N \geq 1$ и $n \geq m_N$ имеем

$$\sum_{\lambda\in\Delta_N\cap\Lambda_{P_n}} \frac{1}{\lambda^2} + \sum_{\lambda\in\Delta_N\cap\Lambda_{P_n}} \frac{1}{w(\lambda)|\lambda|^\sigma|P_n'(\lambda)|} \overset{(31)}{\leq} D,$$

откуда после перехода к пределу при $n \to \infty$ получаем

$$\sum_{\lambda \in \Delta_N \cap \Lambda_f} \frac{1}{\lambda^2} + \sum_{\lambda \in \Delta_N \cap \Lambda_f} \frac{1}{w(\lambda)|\lambda|^{\sigma}|f'(\lambda)|} \leq D,$$

что в силу произвольности N означает выполнение неравенства (3). Согласно теореме А* алгебраические многочлены $\mathcal{P}$ не плотны в C_w^0.

Теорема 1 доказана.

1. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Выща шк., 1990. – 600 с.
2. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
3. *Мергелян С. Н.* Весовые приближения многочленами // Успехи мат. наук. – 1956. – **11**, № 5. – С. 107–152.
4. *Бакан А. Г.* Критерий полиномиальной плотности и общий вид линейного непрерывного функционала на пространстве C_w^0 // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 5. – С. 610 – 622.
5. *Bernstein S.* Le probleme de l'approximation des fonctions continues sur tout l'axe reel at l'une de ses applications // Bull. Math. France. – 1924. – **52**. – P. 399 – 410.
6. *Koosis P.* The logarithmic integral. I. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988. – 350 p.
7. *Berg Ch.* Moment problems and polynomial approximation // Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse. Stieltjes spec. issue. – 1996. – P. 9 – 32.
8. *Borichev A., Sodin M.* The Hamburger moment problem and weighted polynomial approximation on discrete subsets of the real line // J. Anal. Math. – 1998. – **71**. – P. 219 – 264.
9. *Bakan A. G.* Polynomial density in $L_p(R^1, d\mu)$ and representation of all measures which generate a determinate Hamburger moment problem // Approximation, Optimization and Math. Economics (Pointe-aa-Pitre, 1999) / Ed. M. Lassonde. – Heidelberg: Physica-Verlag, 2001. – P. 37 – 46.
10. *Ахиезер Н. И.* О взвешенном приближении непрерывных функций на всей числовой оси // Успехи мат. наук. – 1956. – **11**, № 4. – С. 3–43.
11. *Branges L.* Rhe Bernstein problem // Proc. Amer. Math. Soc. – 1959. – **10**. – P. 825 – 832.
12. *Sodin M., Yuditskii P.* Another approach to de Branges' theorem on weighted polynomial approximation // Proc. Ashkelon Workshop Complex Function Theory, Isr. Math. Conf. Proc. (May 1996) / Ed. L. Zalcman. – Providence, RI: Amer. Math Soc., 1997. – **11**. – P. 221 – 227.
13. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 632 с.
14. *Hamburger H.* Hermitian transformations of deficiency index (1, 1), Jacobi matrices and undetermined moment problems // Amer. J. Math. – 1944. – **66**. – P. 489 – 522.
15. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. – М.: Физматгиз, 1961. – 310 с.
16. *Dzjadyk V. K., Ivanov V. V.* On asymptotics and estimates for the uniform norms of the Lagrange interpolation polynomials corresponding to the Chebyshev nodal points // Anal. Math. – 1983. – **9**. – P. 85 – 97.
17. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1985. – Ч.1. – 336 с.
18. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций: В 2 т. – М.: Наука, 1967. – Т.1. – 486 с.
19. *Hirschman I. I., Widder D. V.* The convolution transform. – Princeton, New York: Princeton Univ. Press, 1955. – 312 p.
20. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
21. *Laguerre E.* Sur les fonctions du genre zero et du genre un // C. r. Acad. sci. Paris. – 1982. – **98**. – P. 828 – 831.
22. *Polya G.* Uber annaherung durch polylome mit lauter reelen wurzein // Rend. Circ. math. Palermo. – 1913. – **36**. – P. 279 – 295.

Получено 27.07.2004