УДК 517.98

В. І. Рабанович (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО РОЗКЛАД ДІАГОНАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ЛІНІЙНУ КОМБІНАЦІЮ ІДЕМПОТЕНТІВ АБО ПРОЕКТОРІВ*

We prove that a bounded operator is a linear combination of three idempotents if it is not a sum of scalar and compact operators and is similar to a diagonal one. We also prove that any self-adjoint diagonal operator is a linear combination of four orthoprojections with real coefficients.

Доведено, що обмежений оператор, який не є сумою скалярного і компактного операторів і подібний до діагонального, є лінійною комбінацією трьох ідемпотентів, а будь-який самоспряжений діагональний оператор є лінійною комбінацією чотирьох ортопроекторів із дійсними коефіцієнтами.

Вступ. У роботі отримано розклад діагонального обмеженого оператора D в сепарабельному гільбертовому просторі H в лінійну комбінацію ідемпотентних операторів Q_i, $Q_i^2 = Q_i$, та якщо $D^* = D$, то в лінійну комбінацію ортопроекторів (проекторів) P_i, $P_i^2 = P_i^* = P_i$. Досить повний огляд по цій тематиці можна знайти в [1]. Як показано в [2], будь-який обмежений оператор є сумою п'яти ідемпотентів. Більш того, якщо оператор $A \neq \lambda I + K$ (I — одиничний, K — компактний), то A є сумою чотирьох ідемпотентів. На підставі результатів робіт [2, 3] легко показати, що $2I + K$ також є сумою чотирьох ідемпотентів. Та-ким чином, кожен оператор є лінійною комбінацією чотирьох ідемпотентів (але не сумою чотирьох ідемпотентів [4]). Нещодавно автором в [5] було показано, що кожна скінченна матриця є лінійною комбінацією трьох ідемпотентних матриць. У п. 1 ми покажемо, що оператори, подібні до діагональних, є лінійною комбінацією трьох ідемпотентів, якщо їх вигляд відмінний від $\lambda I + K$. Нам невідомо, чи існують оператори, які не є лінійною комбінацією трьох ідемпотентів.

У 1984 р. K. Matsumoto довів, що будь-який самоспряжений оператор є лінійною комбінацією п'яти ортопроекторів [6]. Крім того, якщо простір скінченновимірний, то достатньо лінійної комбінації чотирьох проекторів [7]. Ми доведемо (теорема 2), що діагональний самоспряжений оператор є лінійною комбінацією чотирьох ортопроекторів. Як і для ідемпотентного випадку, ми не знаємо, чи існують оператори, які не є лінійною комбінацією чотирьох ортопроекторів.

Далі будемо використовувати позначення I для одиничного оператора і $A \approx B$ для подібності між операторами A і B: $A = C^{-1}BC$, де C і C^{-1} — обмежені оператори. Матрицю обмеженого оператора в фіксованому ортонормованому базисі, у якої лише діагональ складається з ненульових елементів $a_1, a_2, a_3, \ldots$, будемо позначати як $\operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

1. Розклад діагональних операторів у лінійну комбінацію трьох ідемпотентів. У цьому пункті ми розглядаємо *діагональні* оператори, тобто оператори вигляду $C^{-1}\operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3, \ldots)C$, де C, C^{-1} — обмежені оператори. Почнемо з доведення існування розкладу в лінійну комбінацію трьох ідемпотентів для операторів зі спеціального класу.

Лема 1. *Нехай* $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *і* $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ — *дві збіжні послідовності комплексних чисел і існує число* $\varepsilon > 0$ *таке, що виконуються нерівності* $|a_i - b_i| > \varepsilon$ *для всіх* $i \in \mathbb{N}$,

* Частково підтримано грантом Президента України (№ Ф8/320-2004) і Фондом фундаментальних досліджень України (проект № 01.07/071).

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_i - \lim_{n\to\infty} a_n\right| < \infty \quad i \quad \sum_{i=1}^{\infty}\left|b_i - \lim_{n\to\infty} b_n\right| < \infty.$$

Тоді оператор $D = \operatorname{diag}(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots)$ *є лінійною комбінацією трьох ідемпотентних операторів.*

Доведення. Запишемо константи, на яких буде базуватися побудова ідемпотентних операторів:

$$c = 10\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_i - \lim_{n\to\infty} a_n\right| + \sum_{i=1}^{\infty}\left|b_i - \lim_{n\to\infty} b_n\right| + \sup_{j\in\mathbb{N}}\left(\left|a_j\right| + \left|b_j\right|\right) + 1\right),$$

$$\lambda_1 = 2c, \quad \lambda_2 = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n - 1 - \lambda_1, \quad \lambda_3 = 1.$$

Наша мета — довести, що D подібний до оператора, який є лінійною комбінацією $\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3$, де Q_i — ідемпотенти. Для цього введемо послідовність x_j:

$$x_1 = \lambda_1,$$

$$x_{2j} = a_j + b_j - 1 - x_{2j-1} = \sum_{i=1}^{j}(a_i + b_i) - j(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2,$$

$$x_{2j+1} = \lambda_1 + \lambda_2 - x_{2j}. \tag{1}$$

У цій послідовності елементи x_{2j} є „близькими” до числа λ_2, а елементи x_{2j-1} — до числа $-\lambda_2$. Справді,

$$\left|x_{2j} - \lambda_2\right| = \left|\sum_{i=1}^{j}\left(a_i - \lim_{n\to\infty} a_n + b_i - \lim_{n\to\infty} b_n\right)\right| \le \frac{c}{10} \tag{2}$$

і

$$\left|x_{2j+1} + \lambda_2\right| = \left|\lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_2 - x_{2j})\right| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n - 1 + \lambda_2 - x_{2j}\right| \le \frac{c}{5}. \tag{3}$$

Як наслідок, виводимо, що в послідовності $x_1, x_2, \ldots$ сусідні числа є різними і, більш того,

$$\left|x_{j+1} - x_j\right| > c. \tag{4}$$

Якщо покласти $z_i = \left(x_{2i-1}x_{2i} - a_i(b_i - 1)\right)/(a_i - b_i)$, то наступна різниця діагональної та ідемпотентної матриць буде мати власні числа x_{2i-1} і x_{2i}:

$$V_i = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & b_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_i & z_i \\ 1 - z_i & 1 - z_i \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_{2i-1} & 0 \\ 0 & x_{2i} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Оператор $\bigoplus_1^{\infty} V_i$ подібний до оператора $X = \operatorname{diag}(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, тобто

$$\bigoplus_1^{\infty} V_i = C^{-1} X C. \tag{6}$$

При цьому на підставі нерівностей (2) – (4) і $\left|a_i - b_i\right| > \varepsilon$ можна вважати, що норми операторів C і C^{-1} обмежені числом Ω_1, яке залежить тільки від чисел $\sup\left|a_j\right|$, $\sup\left|b_j\right|$, $\sup\left|x_j\right|$, c і ε. Із (5) і (6) безпосередньо випливає, що

$$D \approx X + Q_3, \tag{7}$$

де Q_3 — ідемпотент. Крім того, існують ідемпотентні оператори Q_1 і Q_2 такі, що

$$X = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2. \tag{8}$$

Справді, при $2x \neq \lambda_1 + \lambda_2$ діагональна матриця

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \lambda_1 + \lambda_2 - x \end{pmatrix} \approx \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{x}{2\lambda_1} & \frac{x}{2\lambda_1} \\ 1 - \frac{x}{2\lambda_1} & 1 - \frac{x}{2\lambda_1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \frac{x}{2\lambda_2} & -\frac{x}{2\lambda_2} \\ \frac{x}{2\lambda_2} - 1 & 1 - \frac{x}{2\lambda_2} \end{pmatrix}$$

є фіксованою лінійною комбінацією двох ідемпотентів. Отже, на підставі рівності (1) кожна матриця $U_i = \operatorname{diag}(x_{2i}, x_{2i+1})$ є лінійною комбінацією двох ідемпотентів:

$$U_i = \lambda_1 Q_1^{(i)} + \lambda_2 Q_2^{(i)}.$$

Із властивості (4) випливає, що $Q_1^{(i)}$ і $Q_2^{(i)}$, $i \geq 1$, можна вибрати так, щоб їх норми були обмежені константою Ω_2, яка залежить тільки від c і $\sup|x_j|$.

Тому достатньо покласти

$$Q_1 = (1) \oplus \bigoplus_1^\infty Q_1^{(i)}, \qquad Q_2 = (0) \oplus \bigoplus_1^\infty Q_2^{(i)},$$

і отримаємо рівність (8), яка разом із (7) доводить лему 1.

***Зауваження* 1.** Збільшення значення константи c в доведенні леми 1 не впливає на справедливість її доведення. Також зрозуміло, що норми побудованих ідемпотентних операторів залежать тільки від констант c і ε.

Теорема 1. *Діагональний оператор $D \neq \lambda I + K$ є лінійною комбінацією трьох ідемпотентних операторів. Подібний до нього оператор також є лінійною комбінацією трьох ідемпотентів.*

Доведення. Нехай $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n, \ldots)$ і D не є оператором вигляду $\lambda I + K$. Виберемо в послідовності d_i, $i \geq 1$, дві збіжні підпослідовності d_{l_k} і d_{m_k} так, щоб $\left|\lim_{k\to\infty} d_{l_k} - \lim_{k\to\infty} d_{m_k}\right| = \delta \neq 0$ та

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \left| d_{l_j} - \lim_{k\to\infty} d_{l_k} \right| < \frac{\delta}{4} \quad \text{і} \quad \left| d_{m_j} - \lim_{k\to\infty} d_{m_k} \right| < \frac{\delta}{4}. \tag{9}$$

Без обмеження загальності можна вважати, що множина

$$\tilde{N} = \{ n \in \mathbb{N} \mid \forall k \in \mathbb{N}\colon n \neq l_k,\ n \neq m_k \}$$

є нескінченною. Позначимо $a_k := d_{l_k}$, $b_k := d_{m_k}$ та перепозначимо всі елементи з послідовності d_i, $i \in \tilde{N}$, як $c_1, c_2, c_3, \ldots$. Зафіксуємо одне з розбиттів $\mathbb{N}$ на незліченні множини:

$$\mathbb{N} = N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_p \cup \ldots,$$

де елементи k_i^p з N_p впорядковані за нижнім індексом: $k_1^p < k_2^p < k_3^p < \ldots$.

Тоді за лемою 1 оператор D_i вигляду

$$\operatorname{diag}\left(c_i, a_{k_1^i}, b_{k_1^i}, a_{k_2^i}, b_{k_2^i}, \ldots\right), \quad \text{якщо} \quad \left|c_i - a_{k_1^i}\right| > \frac{\delta}{4},$$

$$\operatorname{diag}\left(c_i, b_{k_1^i}, a_{k_1^i}, b_{k_2^i}, a_{k_2^i}, \ldots\right), \quad \text{якщо} \quad \left|c_i - a_{k_1^i}\right| \leq \frac{\delta}{4},$$

є лінійною комбінацією трьох ідемпотентів. Більш того, оскільки D обмежений і виконується (9), то константи c і ε в лемі 1 можна вибирати єдиними для всіх операторів $D_1, D_2, D_3, \ldots$. Отже,

$$D_s = \lambda_1 Q_1^{(s)} + \lambda_2 Q_2^{(s)} + \lambda_3 Q_3^{(s)},$$

і норми операторів $Q_1^{(s)}$, $Q_2^{(s)}$, $Q_3^{(s)}$ обмежені числом, яке не залежить від значення s (див. зауваження 1). За побудовою

$$\bigoplus_1^\infty D_i \approx D,$$

звідки безпосередньо випливає існування розкладу оператора D в лінійну комбінацію трьох ідемпотентів.

Оскільки оператор, подібний до ідемпотентного, є ідемпотентом, то теорема 1 справджується і для операторів, подібних до діагональних.

Теорему 1 доведено.

2. Розклад самоспряжених діагональних операторів у лінійну комбінацію чотирьох проекторів. Далі запис $A \approx_u B$ буде означати, що існує унітарний оператор U такий, що $A = U^{-1}BU$. Перш ніж доводити основну теорему пункту, наведемо просте технічне твердження для (2×2)-матриць і доведемо лему 2, яка є частковим випадком теореми 2.

Твердження 1. *Нехай $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0 < b$ і $x \in [a, b]$. Тоді при $|x| \geq |a+b|$ матриця* $\operatorname{diag}(x, a+b-x) = aP_1 + bP_2$, *де P_1 і P_2 — деякі ортопроекторні матриці.*

Доведення твердження просте і ми його не наводимо.

Лема 2. *Нехай $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$ — монотонна послідовність дійсних чисел і константа*

$$F = \sum_{i=1}^{\infty}\left(a_i - \lim_{n\to\infty} a_n\right) < \infty.$$

Тоді для будь-якого $b \in \mathbb{R}$ оператор $D = \operatorname{diag}(b, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ *є дійсною лінійною комбінацією чотирьох ортопроекторів.*

Доведення. Ідея доведення полягає в побудові діагональних операторів $X = \operatorname{diag}(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ і $Y = \operatorname{diag}(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ таких, щоб

$$X = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, \quad Y = \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 \quad \text{і} \quad D \approx_u X + Y,$$

де P_i — проектори. Розіб'ємо його на три частини.

1. *Визначення λ_j і x_i.* Покладемо

$$c = 10\left(F + |b| + \sup_{i\in\mathbb{N}}|a_i| + 1\right),$$

$$\lambda_1 = 2c, \quad \lambda_2 = 2\lim_{n\to\infty} a_n - \lambda_1, \quad \lambda_3 = 4c, \quad \lambda_4 = -4c.$$

Якщо

$$b - \lim_{n\to\infty} a_n + F > 0, \tag{10}$$

то існує $k \in \mathbb{N}$ таке, що

$$b - \lim_{n\to\infty} a_n + \sum_{i=1}^{2k-1}\left(a_i - \lim_{n\to\infty} a_n\right) > 0. \tag{11}$$

Нехай при невиконанні умови (10) $k := 1$. У залежності від значення b вводимо послідовність чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$:

$x_1 = \lambda_1$, якщо виконується нерівність (10), і $x_1 = \lambda_2$ — в інших випадках,

$$x_{2j+1} = \lambda_1 + \lambda_2 - x_{2j}, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

$$x_{2j} = a_{2j-1} + a_{2j} - x_{2j-1} = \sum_{i=1}^{2j} a_i - (j-1)(\lambda_1 + \lambda_2) - x_1, \quad j = 1, \ldots, k-1,$$

$$x_{2k} = a_{2k-1} + b - x_{2k-1},$$

$$x_{2l} = a_{2l-2} + a_{2l-1} - x_{2l-1} = b + \sum_{i=1}^{2l-1} a_i - (l-1)(\lambda_1 + \lambda_2) - x_1, \quad l > k.$$

2. *Властивості* x_i. За визначенням $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lim_{n\to\infty} a_n$, звідки

$$x_{2j} = \sum_{i=1}^{2j}\left(a_i - \lim_{n\to\infty} a_n\right) + \lambda_2, \quad j < k,$$

або

$$x_{2l} = b - \lim_{n\to\infty} a_n + \sum_{i=1}^{2l-1}\left(a_i - \lim_{n\to\infty} a_n\right) + \lambda_1 + \lambda_2 - x_1, \quad l \ge k.$$

При виконанні нерівностей (10) і (11) маємо $x_{2j} \ge \lambda_2$ і $x_{2l} \ge \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_2$, у противному разі $x_{2l} \le \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_2 = \lambda_1$, $l \ge 1$. Як і при доведенні леми 1, покажемо, що елементи x_{2j} є „близькими” до числа $-x_1$, а елементи x_{2j+1} — до числа x_1:

$$|x_{2i} + x_1| = \begin{cases} \left|\sum_{j=1}^{2i}\left(a_j - \lim_{n\to\infty} a_n\right) + 2\lim_{n\to\infty} a_n\right| \le c/5 & \text{при } i < k, \\ \left|b - \lim_{n\to\infty} a_n + \sum_{j=1}^{2i-1}\left(a_j - \lim_{n\to\infty} a_n\right) + 2\lim_{n\to\infty} a_n\right| \le c/10 & \text{при } i \ge k, \end{cases}$$

$$|x_{2i+1} - x_1| = |\lambda_1 + \lambda_2 - (x_{2i} + x_1)| = \left|2\lim_{n\to\infty} a_n - (x_{2i} + x_1)\right| \le 2c/5, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Як наслідок, отримуємо

$$|x_{i+1} - x_i| > c \quad \text{і} \quad x_i \in [\lambda_2, \lambda_1].$$

3. *Побудова проекторів* P_j. Оператор $X = \operatorname{diag}(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ є лінійною комбінацією двох проекторів P_1 та P_2:

$$X = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2. \tag{13}$$

Щоб довести властивість (13), розкладемо матрицю X у пряму суму матриць:

$$X = (x_1) \oplus \operatorname{diag}(x_2, x_3) \oplus \ldots \oplus \operatorname{diag}(x_{2n}, x_{2n+1}) \oplus \ldots . \tag{14}$$

Тоді з рівності (12) випливає $x_{2i} + x_{2i+1} = \lambda_1 + \lambda_2$. Крім того, $x_1 = \lambda_1$ або $x_1 = \lambda_2$. Використовуючи твердження 1, отримуємо розклад у лінійну комбінацію двох проекторів для кожного доданка з (14). Таким чином, рівність (13) виконується.

Тепер розглянемо оператор $\tilde{D} \approx D$:

$$\tilde{D} = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_{2k-1}, b, a_{2k}, x_{2k+1}, \ldots).$$

Тоді діагональні елементи різниці операторів

$$\tilde{D} - X = \operatorname{diag}(y_1, y_2, y_3, \ldots) =: Y$$

мають таку властивість: $y_{2j-1} + y_{2j} = 0$ і $y_j \in [\lambda_4; \lambda_3]$, $j \in \mathbb{N}$. Звідси за твердженням 1 матриця $\mathrm{diag}(y_{2j-1}, y_{2j})$ є лінійною комбінацією двох проекторів з коефіцієнтами λ_3 і λ_4. Це справедливо й для прямої суми таких матриць:

$$\tilde{D} - X = Y = \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4,$$
$$\tilde{D} = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4.$$

Лему 2 доведено.

***Зауваження* 2.** Збільшення значення константи c в доведенні леми 2 не впливає на справедливість її доведення.

Теорема 2. *Діагональний самоспряжений оператор є дійсною лінійною комбінацією чотирьох ортопроекторів.*

Доведення. Нехай $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$, $a_i \in \mathbb{R}$. У послідовності $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ виберемо монотонну збіжну підпослідовність a_{m_k} так, щоб

$$\sum_1^\infty \left| a_{m_k} - \lim_{k\to\infty} a_{m_k} \right| < \infty .$$

Розглянемо випадок, коли a_{m_k} є спадною. Припустимо, що $j_1, j_2, \ldots, j_s, \ldots$ — всі натуральні числа, які не ввійшли до підпослідовності m_k, $k \in \mathbb{N}$. Можна вважати, що їх нескінченна кількість. Тоді за лемою 2 для кожного $s \in \mathbb{N}$ оператор

$$D_s = \mathrm{diag}\left(a_{j_s}, a_{m_{k_1^s}}, a_{m_{k_2^s}}, a_{m_{k_3^s}}, \ldots \right), \quad m_{k_i^s} \in N_s,$$

є лінійною комбінацією чотирьох проекторів. Більш того, внаслідок обмеженості оператора A константу c можна взяти єдиною для всіх операторів D_s (див. зауваження 2). Таким чином, оскільки

$$\bigoplus_1^\infty D_s \approx_u A,$$

то A є лінійною комбінацією чотирьох проекторів, і випадок, коли a_{m_k} спадає, розглянуто повністю. Якщо ж a_{m_k} зростає, то послідовність $-a_{m_1}, -a_{m_2}, -a_{m_3}, \ldots$ спадає і тому $-A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4$. Звідси

$$A = -\lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2 - \lambda_3 P_3 - \lambda_4 P_4,$$

і теорема 2 є справедливою і в цьому випадку.

Теорему доведено.

Автор висловлює подяку професору Ю. С. Самойленку за цінні поради і зауваження при роботі над цією тематикою.

1. *Wu P. Y.* Additive combinations of special operators // Funct. Anal. and Oper. Theory. – 1994. – **30**. – P. 337–361.
2. *Pearcy C., Topping D. M.* Sums of small numbers of idempotents // Mich. Math. J. – 1967. – **14**. – P. 453–465.
3. *Brown A., Halmos P. R., Pearcy C.* Commutators of operators on Hilbert space // Can. J. Math. – 1965. – **17**. – P. 695–708.
4. *Рабанович В. І.* Про розклад оператора в суму чотирьох ідемпотентів // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 3. – С. 419–424.
5. *Rabanovich V.* Every matrix is a linear combination of three idempotents // Linear Algebra and Its Appl. – 2004. – **390**. – P. 137–143.
6. *Matsumoto K.* Self-adjoint operators as a real sum of 5 projections // Math. Jap. – 1984. – **29**. – P. 291–294.
7. *Nakamura Y.* Any Hermitia matrix is a linear combination of four projections // Linear Algebra and Its Appl. – 1984. – **61**. – P. 133–139.

Одержано 20.04.2004