УДК 517.5

С. Ю. Тихонов (Центр мат. исследований, Барселона, Испания)

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ*

We study classes of convex functions on $(1, \infty]$ which tend to zero at infinity. We establish the relations between different elements of these classes.

Вивчаються класи опуклих функцій на $(1, \infty]$, що прямують до нуля на нескінченності. Встановлюються співвідношення між різними представниками цих класів.

1. Введение. Будем рассматривать функции из класса

$$\mathfrak{M} = \left\{\psi(t) > 0,\ \psi(t_1) - 2\psi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) + \psi(t_2) \ge 0 \ \ \forall t_1, t_2 \in [1, \infty),\ \lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0\right\}.$$

Понятно, что функции из класса $\mathfrak{M}$ могут стремиться к нулю как сколь угодно быстро, так и сколь угодно медленно. Задача классификации функций из $\mathfrak{M}$ по скорости убывания при $t \to \infty$ хорошо известна в конструктивной теории функций. Наиболее яркими примерами использования такой классификации являются задачи мажорирования некоторых конструктивных и структурных характеристик функций (см., например, [1]), задачи описания свойств функций из классов $L^{\overline{\Psi}}$ (см. [2]) и другие (см., например, [3, 4]).

А. И. Степанец (см. работы [2, т. 1], гл. 3, [5]) ввел следующую характеристику, на основе которой была предложена удобная для приложений классификация функций из $\mathfrak{M}$:

$$\mu(\psi, t) = \frac{t}{\psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right) - t}.$$

Эту величину часто называют модулем полураспада функции ψ. Классификация функций из класса $\mathfrak{M}$ основана на ограниченности $\mu(\psi, t)$ сверху или снизу:

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi(t) \in \mathfrak{M} : 0 < \mu(\psi, t) \le K \quad \forall t \in [1, \infty)\},$$

$$\mathfrak{M}_\infty = \{\psi(t) \in \mathfrak{M} : 0 < K \le \mu(\psi, t) < \infty \quad \forall t \in [1, \infty)\},$$

$$\mathfrak{M}_C = \{\psi(t) \in \mathfrak{M} : 0 < K_1 \le \mu(\psi, t) \le K_2 < \infty \quad \forall t \in [1, \infty)\}.$$

Типичными представителями каждого класса являются следующие функции: $\ln^A(t+2) \in \mathfrak{M}_0$ для $A < 0$; $t^r \ln^A(t+2) \in \mathfrak{M}_C$ для $r > 0$, $A \in \mathbb{R}$; $e^{-At^r} \in \mathfrak{M}_\infty$ для $A, r > 0$.

Наряду с классами $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_\infty$ и $\mathfrak{M}_C$ в теории приближений важную роль играют (см. [2], гл. 3–8]) следующие подклассы $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_\infty$:

$$\mathfrak{M}_0^+ = \{\psi(t) \in \mathfrak{M}_0 : \mu(\psi, t) \downarrow 0\},$$

$$\mathfrak{M}'_\infty = \{\psi(t) \in \mathfrak{M}_\infty : \eta(\psi, t) - t < K \quad \forall t \in [1, \infty)\},$$

где $\eta(\psi, t) := \psi^{-1}\left(\frac{\psi(t)}{2}\right)$.

Будем налагать на функцию $\psi(t) \in \mathfrak{M}$ некоторые из условий:

*Поддержана грантом Европейской комиссии (контракт MIF1-CT-2004-509465).

B) $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} = O[\psi(n)]$,

B_β) $\sum_{k=1}^{n} k^{\beta-1}\psi(k) = O\left[n^{\beta}\psi(n)\right]$.

Условия B) и B_β) часто называют условиями Бари – Стечкина (см. [1, 6]). В упомянутых работах авторы использовали эти определения для функций $\varphi(t) := \psi\left(\frac{1}{t}\right)$.

Далее, следуя Матусевской, запишем следующие определения (см. [3, с. 68]). Пусть $f(\cdot)$ — положительная на $[X, \infty)$, $X > 0$, функция. Ее верхний индекс Матусевской $\alpha(f)$ — это инфимум по тем α, для которых существует константа $C = C(\alpha)$ такая, что для любого $\Lambda > 1$

$$\frac{f(\lambda x)}{f(x)} \le C\lambda^{\alpha}\{1+o(1)\} \quad (x\to\infty) \text{ равномерно по } \lambda\in[1,\Lambda];$$

ее нижний индекс Матусевской $\beta(f)$ — это супремум по тем β, для которых существует константа $D = D(\beta) > 0$ такая, что для любого $\Lambda > 1$

$$\frac{f(\lambda x)}{f(x)} \ge D\lambda^{\beta}\{1+o(1)\} \quad (x\to\infty) \text{ равномерно по } \lambda\in[1,\Lambda].$$

Целью настоящей работы является выяснение взаимосвязи между разбиением Степанца класса $\mathfrak{M}$, разбиениями Бари – Стечкина (с использованием условий B) и B_β)), разбиениями функций регулярной вариации (с использованием ограниченности индексов Матусевской) и некоторыми другими. Также мы докажем свойства функций из $\mathfrak{M}_0^{+}$ и $\mathfrak{M}'_\infty$.

2. Теорема об эквивалентности.

Теорема. *Пусть* $\psi(t)\in\mathfrak{M}$. *Тогда*:

A) *следующие условия эквивалентны*:

$$\psi(t) \in \mathfrak{M}_0, \tag{1}$$

$$\beta(\psi) > -\infty, \tag{2}$$

$$\psi(t) \in \bigcup_{0<\beta<\infty} B_\beta; \tag{3}$$

B) *следующие условия эквивалентны*:

$$\psi(t) \in \mathfrak{M}_\infty, \tag{4}$$

$$\alpha(\psi) < 0, \tag{5}$$

$$\psi(t) \in B; \tag{6}$$

C) *следующие условия эквивалентны*:

$$\psi(t) \in \mathfrak{M}_C, \tag{7}$$

$$-\infty < \beta(\psi) \le \lambda(\psi) < 0, \tag{8}$$

$$\exists\, \beta\in(0,+\infty):\ \psi(t) \in B\cap B_\beta; \tag{9}$$

D) *следующие условия эквивалентны*:

$$\psi(t) \in \mathfrak{M}'_\infty, \tag{10}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) < C\psi(n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

$$\exists\, r \in \mathbb{N}: \quad \left\{\frac{1}{\psi(n)}\right\} \in \bigcup_{s=1}^{r} \mathrm{N}^{(s)}. \tag{12}$$

Здесь и далее последовательность принадлежит N, если она лакунарна, т. е. существует число $\lambda > 1$ такое, что неравенство $\dfrac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \geq \lambda > 1$ выполнено для любых натуральных n. Таким образом, условие (12) свидетельствует о том, что последовательность $\left\{\dfrac{1}{\psi(n)}\right\}$ представима в виде конечного объединения лакунарных последовательностей.

Доказательство теоремы. A). Докажем, что $(1) \Rightarrow (2)$. Пусть $\psi(t) \in \mathfrak{M}_0$. т. е. $\mu(\psi, t) \leq K$. Тогда

$$\frac{\psi\left(t\left(1+\frac{1}{K}\right)\right)}{\psi(t)} \geq \frac{1}{2}.$$

Отсюда, используя монотонность ψ, легко получить

$$\frac{\psi(\lambda t)}{\psi(t)} \geq \frac{1}{2\lambda^{\xi}} \quad \text{для} \quad \lambda \in [1, \infty), \qquad \xi = \log_{1+1/K} 2 > 0.$$

Таким образом, согласно определению $\beta(\psi) \geq -\xi > -\infty$, т. е. из (1) следует (2).

Покажем, что $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$. Пусть выполнено (2). Тогда мы воспользуемся предложением 2.2.1 из [3, с. 72], согласно которому если $\beta(\psi) > -\infty$, то для любого $\beta < \beta(\psi)$ существуют константы C и X такие, что

$$\frac{\psi(y)}{\psi(x)} C \geq \left(\frac{y}{x}\right)^{\beta}, \qquad y \geq x \geq X.$$

С другой стороны, в силу монотонности ψ имеем $\dfrac{\psi(\lambda t)}{\psi(t)} \leq \lambda^0$, и согласно определению верхнего индекса Матусевской $\alpha(\psi) \leq 0$. Отсюда видно, что для любого $\beta < \beta(\psi)$ $(\leq \alpha(\psi) \leq 0)$ функция $\dfrac{\psi(x)}{x^{\beta}}$ является почти возрастающей в смысле Бернштейна (см. [1]), т. е.

$$\frac{\psi(y)}{y^{\beta}} C \geq \frac{\psi(x)}{x^{\beta}}, \qquad y \geq x. \tag{13}$$

Заметим, что условие $\psi \in B_{\gamma}$ эквивалентно следующему условию: существует $\varepsilon > 0$ такое, что функция $t^{\gamma-\varepsilon}\psi(t)$ почти возрастает (см. [1]). Тогда (13) влечет $\psi \in B_{|\beta|+\varepsilon}$ для $\varepsilon > 0$. Таким образом, $\psi \in \bigcup_{0<\beta<\infty} B_{\beta}$. Отсюда следует существование $s \geq 1$ и $\gamma > 0$, для которых

$$\frac{\psi(t)}{\psi(st)} \leq Cs^{\gamma} =: C_1 > 0$$

для всех $t \geq 1$. Наконец, используя теорему 16.1 из [2, т. 1, с. 175], получаем $\psi(t) \in \mathfrak{M}_0$. Пункт A) доказан.

B). Покажем, что (4) $\Rightarrow$ (5). В силу убывания ψ (4) влечет

$$\frac{\psi\left(t\left(1+\frac{1}{K}\right)\right)}{\psi(t)} \leq \frac{1}{2}.$$

Несложно показать, что из последнего неравенства следует

$$\frac{\psi(\lambda t)}{\psi(t)} \leq \frac{2}{\lambda^{\xi}} \quad \text{для} \quad \lambda \in [1, \infty), \qquad \xi = \log_{1+1/K} 2 > 0.$$

Тогда $\alpha(\psi) \leq -\xi < 0$, т. е. (5) справедливо.

Теперь докажем, что (5) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (4). Пусть $\alpha(\psi) < 0$. Тогда (см. предложение 2.2.1 из [3, с. 72]), так как $\alpha(\psi) < +\infty$, для любого $\alpha > \alpha(\psi)$ существуют константы C и X такие, что

$$\frac{\psi(y)}{\psi(x)} \leq C\left(\frac{y}{x}\right)^{\alpha}, \quad y \geq x \geq X.$$

Следовательно, существует $\beta > 0$ такое, что функция $\psi(x)x^{\beta}$ является почти убывающей, т. е.

$$\psi(y)y^{\beta} \leq C\psi(x)x^{\beta}, \quad y \geq x. \tag{14}$$

Последнее условие эквивалентно $\psi \in B$ (см. [1]). С другой стороны, из (14) следует существование $s > 1$, для которого выполняется неравенство

$$\frac{\psi(st)}{\psi(t)} \leq \frac{1}{2}.$$

Тогда, используя убывание ψ, согласно определению $\mu(\psi, t)$ получаем $\frac{1}{s-1} \leq$ $\leq \mu(\psi, t)$, т. е. $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}$. Пункт B) доказан.

Пункт C) следует из предыдущих пунктов и неравенства $\beta(\psi) \leq \alpha(\psi)$.

D). Из леммы 1 работы [7] (см. также [8]) и предложения 8.1 [2, т. 2, с. 47] имеем (10) $\Rightarrow$ (11) $\Rightarrow$ (12) $\Rightarrow \exists\, \nu \in \mathbb{N}$: $\psi(n+\nu) \leq \frac{1}{2}\psi(n)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Тогда в силу монотонности ψ существует $T > 1$ такое, что $\mu(\psi, t) - t < K$ для любых $t \in$ $\in [T, \infty)$. Отсюда согласно определению функции $\mu(\psi, t)$ имеем $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$.

Теорема доказана.

3. Следствия и замечания.

***Следствие* 1.** *Пусть* $\psi(t) \in \mathfrak{M}$. *Тогда условие* $\psi(t) \in \mathfrak{M}_0$ *влечет для* $\beta > -\beta(\psi)$ *условие*

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\beta q - 1}\psi^{q}(k) = O\left[n^{\beta q}\psi^{q}(n)\right] \qquad \forall\, q > 0. \tag{15}$$

***Следствие* 2.** *Пусть* $\psi(t) \in \mathfrak{M}$. *Тогда условие* $\psi(t) \in \mathfrak{M}_{\infty}$ *эквивалентно условию*

$$\sum_{k=n}^{n} \frac{\psi^{p}(k)}{k} = O\left[\psi^{p}(n)\right] \qquad \forall\, q > 0. \tag{16}$$

***Следствие* 3.** *Пусть* $\psi(t) \in \mathfrak{M}$. *Тогда условие* $\psi(t) \in \mathfrak{M}_C$ *влечет для* $\beta > -\beta(\psi)$ *условия* (15), (16).

Доказательства следствий 1–3 очевидны из доказательства теоремы и из следующего факта (см. [8]): условие $\psi \in B_{\beta}$ эквивалентно условию (15), а условие $\psi \in B$ — условию (16).

***Замечание* 1.** Функция, удовлетворяющая условию $-\infty < \beta(\psi)$, называется функцией с ограниченным убыванием, а функция, удовлетворяющая условию $\alpha(\psi) < 0$, — функцией с положительным убыванием [3, с. 71]. Наконец, класс функций, удовлетворяющих условию $-\infty < \beta(\psi) \le \alpha(\psi) < \infty$, совпадает [3, с. 71] с классом O-регулярно меняющихся функций. Некоторые свойства упомянутых классов функций представлены в [3].

***Замечание* 2.** В монографии [2, с. 161] (теорема 12.1) показано, что условие $\psi \in \mathfrak{M}_C$ эквивалентно условию

$$0 < K_1 \le \alpha(t) \le K_2 < \infty \quad \forall\, t \ge 1, \quad \text{где} \quad \alpha(t) = \frac{\psi(t)}{t\,|\psi'(t)|}, \quad \psi'(t) := \psi'(t+0). \tag{17}$$

Поскольку справедливо представление

$$\psi(x) = C\exp\left(\int_1^x \frac{-1}{\alpha(t)}\frac{dt}{t}\right), \quad C > 0, \tag{18}$$

теорема о представлении O-регулярно меняющихся функций (см. [3, с. 71 – 74]) влечет неравенство $-\dfrac{1}{K_1} \le \beta(\psi) \le \alpha(\psi) \le -\dfrac{1}{K_2}$, где K_1 и K_2 взяты из (17).

***Замечание* 3.** Функцию $S(t)$ называют слабо колеблющейся (см. [3, с. 6; 4, с. 10]), если она измерима на $[D, +\infty)$, $D > 0$, положительна и для любого $\lambda > 0$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S(\lambda t)}{S(t)} = 1. \tag{19}$$

Заметим, что согласно теореме Ландау (см. [3, с. 54]), если $S(t) \in \mathfrak{M}$ и (19) справедливо хотя бы для одного положительного $\lambda \ne 1$, то S — слабо колеблющаяся.

Из теоремы о представлении слабо колеблющихся функций (см. [3, с. 12; 4, с. 10–14]) и теоремы 12.1 из [2, с. 161] для $\psi \in \mathfrak{M}$ имеем

$$\psi \text{ — слабо колеблющаяся} \Rightarrow \psi \in \mathfrak{M}_0'.$$

***Замечание* 4.** Некоторые условия, не упомянутые выше и эквивалентные условиям $\psi(t) \in B$, $\psi(t) \in B_\beta$ и $\psi \in \mathfrak{M}_\infty'$, можно найти в [1, 7–9].

1. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483–522.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т. 1, 2.
3. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. – Cambridge Univ. Press, 1987.
4. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985.
5. *Степанец А. И.* Несколько утверждений для выпуклых функций // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 5. – С. 764–780.
6. *Ульянов П. Л.* О модулях непрерывности и коэффициентах Фурье // Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат. – 1995. – № 1. – С. 37–52.
7. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье (третье сообщение) // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1956. – **20**. – С. 385–412.
8. *Тихонов С. Ю.* Обобщенные классы Липшица и коэффициенты Фурье // Мат. заметки. – 2004. – **75**, № 6. – С. 947–951.
9. *Покровский А. В.* Локальные аппроксимации решениями гипоэллиптических уравнений и устранимые особенности // Докл. РАН. – 1999. – **367**, № 1. – С. 15–17.

Получено 09.11.2004