УДК 517.98

А. А. Калюжный*, Г. Б. Подколзин, Ю. А. Чаповский*
(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

УСЛОВНЫЕ ОЖИДАНИЯ НА КОМПАКТНЫХ КВАНТОВЫХ ГРУППАХ И КВАНТОВЫЕ ДВОЙНЫЕ КЛАССЫ СМЕЖНОСТИ

We prove that under certain conditions, a conditional expectation on a compact quantum group is decomposable into a composition of two conditional expectations. The first of these expectations is associated with quantum double cosets and the second one preserves the counit.

Доведено, що умовне сподівання на компактній квантовій групі, що задовольняє певні умови, можна розкласти в композицію двох умовних сподівань, перше з яких пов'язане з квантовими подвійними класами суміжності, а друге зберігає коодиницю.

Введение. Компактные квантовые гипергруппы были введены в [1] как объекты, одновременно обобщающие обычные гипергруппы [2, 3], компактные матричные псевдогруппы [4] и биалгебры биинвариантных функций, связанные с квантовыми парами Гельфанда [5 – 7].

Под компактной квантовой гипергруппой понимается унитальная C^*-алгебра с коассоциативным вполне положительным копроизведением, сохраняющим единицу и удовлетворяющим некоторым дополнительным аксиомам. Примеры компактных квантовых гипергрупп, связанных с квантовыми парами Гельфанда, были построены в [1]. В [8] предложен общий метод построения квантовых гипергрупп с помощью условного ожидания на компактной квантовой группе. Указанный метод обобщает конструкцию построения обычных DJS-гипергрупп с помощью орбитальных морфизмов [9], включает в себя конструкцию двойных классов смежности для квантовых групп [6, 7] и аналог конструкции Дельсарта для квантовых гипергрупп. В [8] с помощью применения указанной конструкции к нетривиальным конечномерным алгебрам Каца, полученным твистингом [10, 11] классических серий конечных групп, построено несколько серий нетривиальных конечномерных квантовых гипергрупп.

Примеры компактных квантовых гипергрупп, построенные в [8], характеризуются тем свойством, что соответствующие условные ожидания сохраняют коединицу. Будем называть такие условные ожидания коунитальными (см. определение 1). Условные ожидания, возникающие в конструкции квантовых двойных классов смежности, этого свойства не имеют. В настоящей статье мы покажем, что при некоторых дополнительных условиях любое условное ожидание на компактной квантовой группе является композицией условных ожиданий двух описанных выше типов. Таким образом, два типа рассмотренных примеров образуют, в некотором смысле, элементарные блоки для построения по квантовой группе компактной квантовой гипергруппы.

Отметим, что аналогичная теорема доказана в [12] в частном случае условного ожидания на компактной алгебре Каца. Основная трудность, в отличие от [12], состоит в том, что коединица и антипод компактной квантовой подгруппы, возникающей при доказательстве основной теоремы, вообще говоря, неограничены. Тем не менее, удается доказать, что квантовая гипергруппа, которая получается с помощью факторизации по этой подгруппе, содержит непрерывную коединицу.

1. Предварительные сведения. *1.* Пусть $\mathcal{A} = (A, \Delta)$ — компактная квантовая группа [13]. Здесь $\Delta : A \to A \otimes A$ — коумножение, под $A \otimes A$ понимается

* Частично поддержаны Государственной программой „Математическое моделирование физических и механических процессов в сильно неоднородных средах” (тема № 20).

проективный тензорный квадрат C^*-алгебры A. Обозначим через μ меру Хаара компактной квантовой группы $\mathcal{A}$.

Пусть A_0 — $*$-подалгебра C^*-алгебры A, образованная линейными комбинациями матричных элементов u_{ij}^{α} неприводимых унитарных копредставлений. Тогда A_0 плотна в A и является $*$-алгеброй Хопфа (здесь коединица ε и антипод κ определены равенствами $\varepsilon(u_{ij}^{\alpha}) = \delta_{ij}1$ и $\kappa(u_{ij}^{\alpha}) = u_{ji}^{\alpha *}$ [13]). В дальнейшем будем предполагать, что так определенная коединица продолжается до непрерывного гомоморфизма на всей C^*-алгебре A.

Обозначим через $\hat{A}$ банахово пространство непрерывных функционалов на C^*-алгебре A с нормой $\|\xi\| = \sup_{\|a\|=1}|\xi(a)|$. Для $\xi, \eta \in \hat{A}$ определим произведение $\cdot$ и инволюцию $\star$ равенствами

$$(\xi \cdot \eta)(a) = (\xi \otimes \eta)\delta(a), \qquad \chi^{\star}(a) = \overline{\chi}(\kappa(a)^*),$$

где $a \in A$. Относительно так введенных операций пространство $\hat{A}$ является инволютивной банаховой алгеброй. Обозначим, как обычно, правое и левое действия алгебры $\hat{A}$ на A соответственно

$$\xi\,.\,a = (\mathrm{id} \otimes \xi) \circ \Delta(a), \qquad a\,.\,\xi = (\xi \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(a),$$

где $\xi \in \hat{A}$ и $a \in A$. Под $\hat{A} \otimes \hat{A}$ будем понимать пополнение алгебраического тензорного произведения относительно нормы, сопряженной к проективной норме на $A \otimes A$ [14]. Произведение на C^*-алгебре A порождает копроизведение $\hat{m} : \hat{A} \to \hat{A} \otimes \hat{A}$. Пусть $\rho : A \to B(H_\xi)$ — ГНС-представление, соответствующее состоянию $\xi \in \hat{A}$. Здесь H_ξ и $B(H_\xi)$ — соответственно гильбертово пространство и $*$-алгебра ограниченных операторов на H_ξ. Зафиксируем ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, где $e_1 = 1$, в H_ξ и положим $\xi_{ij}(a) = \left(\rho(a)e_j, e_i\right)_{H_\xi}$. Тогда $\xi_{11} = \xi$ и

$$\hat{m}(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{1i} \otimes \xi_{i1}.$$

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть* $\mathcal{A}_1 = (A_1, \Delta_1)$ *и* $\mathcal{A}_2 = (A_2, \Delta_2)$ — *две компактные квантовые группы и* $\pi : A_1 \to A_2$ — *эпиморфизм* C^*-*алгебр такой, что* $\Delta_2 \circ \circ\, \pi = (\pi \otimes \pi) \circ \Delta_2$. *Тогда сужение эпиморфизма* π *на* $*$-*алгебру* A_{10}, *образованную линейными комбинациями матричных элементов неприводимых унитарных копредставлений, является гомоморфизмом соответствующих алгебр Хопфа* $(A_{10}, \Delta_1, \kappa_1, \varepsilon_1)$ *и* $(A_{20}, \Delta_2, \kappa_2, \varepsilon_2)$, *в частности на* A_{10} *выполняются соотношения*

$$\varepsilon_2 \circ \pi = \varepsilon_1, \tag{1}$$

$$\kappa_2 \circ \pi = \pi \circ \kappa_2 \tag{2}$$

(*здесь* κ_i *и* ε_i *являются соответственно антиподом и коединицей* i-*й алгебры Хопфа*).

Доказательство. Выбирая ортонормированный базис в пространстве унитарного копредставления u^{α}, можно каждое такое копредставление отождествить с матрицей $(u_{ij}^{\alpha})_{i,j=1}^{\dim u^{\alpha}}$, где u_{ij}^{α} — матричные элементы копредставления.

Пусть $(u_{ij}^{\alpha})_{i,j=1}^{\dim u^{\alpha}}$ — матрица, соответствующая неприводимому унитарному копредставлению компактной квантовой группы $\mathcal{A}_1$. Положим $v_{ij}^{\alpha} = \pi(u_{ij}^{\alpha})$. Тогда, как нетрудно видеть, матрица $(v_{ij}^{\alpha})_{i,j=1}^{\dim u^{\alpha}}$ является матрицей конечномерного копредставления компактной квантовой группы $\mathcal{A}_2$. Хотя последнее представление, вообще говоря, не является неприводимым, оно разлагается в прямую сумму унитарных неприводимых копредставлений квантовой группы $\mathcal{A}_2$. Тем самым каждый элемент v_{ij}^{α} представим в виде линейной комбинации неприводимых унитарных копредставлений $\mathcal{A}_2$ и поэтому принадлежит $*$-алгебре A_{20}. Отсюда следует, что $\pi(A_{10}) \subset A_{20}$.

Равенство (1) следует из того, что коединица каждой из двух компактных квантовых групп действует на матричных элементах соответствующих неприводимых (и, следовательно, произвольных конечномерных) копредставлений по формуле $\varepsilon_i(u_{kl}) = \delta_{kl}$. Равенство (2) аналогично следует из формулы $\kappa_i(u_{kl}) = u_{lk}^*$.

Предложение доказано.

2. Компактная квантовая гипергруппа [1] — это набор $\mathcal{B} = (B, \delta, \varepsilon, \star, \sigma_t, \mu)$, в котором B — унитальная C^*-алгебра с вполне положительным коассоциативным коумножением $\delta : B \to B \otimes B$ (здесь под $B \otimes B$ понимается проективное тензорное произведение), $\varepsilon : B \to \mathbb{C}$ — коединица, $\star$ — коинволюция, σ_t, $t \in \mathbb{R}$, — непрерывная однопараметрическая группа автоморфизмов B и μ — мера Хаара. При этом выполняются следующие условия:

$$(a \cdot b)^{\star} = a^{\star} \cdot b^{\star}, \qquad \delta \circ * = (* \otimes *) \circ \delta,$$
$$\varepsilon(a \cdot b) = \varepsilon(a)\varepsilon(b), \qquad \delta(1) = 1 \otimes 1, \tag{3}$$
$$\star \circ * = * \circ \star$$

для всех $a, b \in B$. Условия на однопараметрическую группу σ_t имеют следующий вид:

a) существуют плотные подалгебры $B_0 \subset B$ и $\tilde{B}_0 \subset B \otimes B$ такие, что однопараметрические группы $\sigma_t, \sigma_t \otimes \mathrm{id}$ и $\mathrm{id} \otimes \sigma_t$, $t \in \mathbb{R}$, могут быть продолжены до комплексных однопараметрических групп σ_z и $\sigma_z \otimes \mathrm{id}$, $\mathrm{id} \otimes \sigma_z$, $z \in \mathbb{C}$, автоморфизмов алгебр B_0 и $\tilde{B}_0$ соответственно;

b) B_0 инвариантна относительно $*$ и $\star$, и $\delta(B_0) \subset \tilde{B}_0$;

c) для любого $z \in \mathbb{C}$ на алгебре B_0 выполняются соотношения

$$\delta \circ \sigma_z = (\sigma_z \otimes \sigma_z) \circ \delta,$$
$$\mu(\sigma_z(a)) = \mu(a);$$

d) существует $z_0 \in \mathbb{C}$ такое, что мера Хаара μ удовлетворяет следующему условию сильной инвариантности: для любых $a, b \in B_0$ выполнено равенство

$$(\mathrm{id} \otimes \mu)\big[\big((* \circ \sigma_{z_0} \circ \star \otimes \mathrm{id}) \circ \delta(a)\big) \cdot (1 \otimes b)\big] = (\mathrm{id} \otimes \mu)\big((1 \otimes a) \cdot \delta(b)\big);$$

Наконец, предполагается, что мера Хаара μ точна на B_0.

Антипод κ определяется соотношением

$$\kappa = * \circ \sigma_{z_0} \circ \star. \tag{4}$$

Отсюда для любых $a, b \in B_0$ имеем

$$\kappa(ab) = \kappa(b)\kappa(a), \qquad \delta \circ \kappa = \Pi \circ (\kappa \otimes \kappa) \circ \delta,$$

$$\mu \circ \kappa = \mu, \qquad \kappa(1) = 1, \qquad \varepsilon \circ \kappa = \varepsilon.$$

Антипод обратим и $\kappa^{-1} = \star \circ \sigma_{-z_0} \circ *$. Тогда соотношение в условии d) имеет вид

$$(\mathrm{id} \otimes \mu)\big((\kappa \otimes \mathrm{id}) \circ \delta(a) \cdot (1 \otimes b)\big) = (\mathrm{id} \otimes \mu)\big((1 \otimes a) \cdot \delta(b)\big).$$

3. Пусть $\mathcal{A}_1 = (A_1, \Delta_1)$ и $\mathcal{A}_2 = (A_2, \Delta_2)$ — две компактные квантовые группы и μ_1, μ_2 — соответствующие меры Хаара. Предположим, что $\pi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ — эпиморфизм, т. е. такой эпиморфизм C^*-алгебр, что выполнено равенство $(\pi \otimes \pi) \circ \Delta_1 = \Delta_2 \circ \pi$. Тогда в силу предложения 1 $\pi(A_{10}) \subset A_{20}$ и на A_{10} выполняются равенства $\pi \circ \kappa_1 = \kappa_2 \circ \pi$ и $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \circ \pi$ (здесь A_{i0}, $i = 1, 2$, является $*$-подалгеброй, порожденной матричными элементами неприводимых копредставлений соответствующей компактной квантовой группы, а κ_i и ε_i — соответственно антипод и коединица на A_{i0}). Положим

$$A_{10}/A_2 = \{a \in A_{10} : (\mathrm{id} \otimes \pi) \circ \Delta_1(a) = a \otimes 1\},$$

$$A_2 \backslash A_{10} = \{a \in A_{10} : (\pi \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_1(a) = 1 \otimes a\},$$

$$A_2 \backslash A_{10}/A_2 = A_2 \backslash A_{10} \bigcap A_{10}/A_2.$$

Тогда линейное пространство $B_0 = A_2 \backslash A_{10}/A_2$ является инволютивной алгеброй с единицей 1. Коумножение $\delta : B_0 \to B_0 \otimes B_0$ определено с помощью сужения

$$\delta = (\mathrm{id} \otimes \mu_2 \circ \pi \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta_1 \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_1$$

на B_0 и инволюция $\star : B_0 \to B_0$ задается равенством

$$a^\star = f_{-1/2} \,.\, \kappa_1(a)^* \,.\, f_{1/2},$$

где $a \in B_0$, а f_z, $z \in \mathbb{C}$, — однопараметрическое семейство модулярных гомоморфизмов A_1. Через B обозначим C^*-подалгебру, полученную пополнением B_0 в C^*-алгебре A_1, продолжим отображения δ и $\star$ по непрерывности до соответствующих отображений на B и положим $\sigma_t(a) = f_{it} \,.\, a \,.\, f_{-it}$, $z_0 = -\frac{1}{2}\, i$.

Если коединица ε_1 на квантовой группе $\mathcal{A}_1$ непрерывна, то на B существует коединица ε, которая является сужением ε_1, и мера Хаара μ — сужение μ_1 на B. Тогда $\mathcal{B} = (B, \delta, \varepsilon, \star, \sigma_t, \mu)$ является компактной квантовой гипергруппой [1], которую мы обозначим через $A_2 \backslash A_1/A_2$ и назовем *квантовой гипергруппой двойных классов смежности* квантовой группы $\mathcal{A}_1$ относительно ее квантовой подгруппы $\mathcal{A}_2$. Отображение $P : A_1 \to B$, определенное соотношением

$$P = (\mu_2 \circ \pi \otimes \mathrm{id} \otimes \mu_2 \circ \pi) \circ (\Delta_1 \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_1,$$

является условным ожиданием, соответствующим конструкции двойных классов смежности. Полагая $A_2 = \mathbb{C}1$ с тривиальными операциями, получаем, что компактная квантовая группа $\mathcal{A}_1$ с непрерывной коединицей является примером компактной квантовой гипергруппы.

4. Пусть $\mathcal{A} = (A, \Delta, \varepsilon, \star, \sigma_t, \mu)$ — компактная квантовая гипергруппа и κ — антипод, определенный равенством (4). Пусть B — унитальная C^*-подалгебра A и $P : A \to B$ — соответствующее μ-инвариантное условное ожидание (т. е. $\mu \circ P = \mu$). Следующая теорема [8] позволяет строить новые примеры квантовых гипергрупп.

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{A}$ *— компактная квантовая гипергруппа,* B *— унитальная* C^**-подалгебра* C^**-алгебры* A *и* $P : A \to B$ *— соответствующее условное ожидание. Предположим, что для плотных подалгебр* A_0 *и* $\tilde{A}_0$ *выполнены соотношения* $P(A_0) \subset A_0$, $(P \otimes \mathrm{id})(\tilde{A}_0) \subset \tilde{A}_0$ *и* $(\mathrm{id} \otimes P)(\tilde{A}_0) \subset \tilde{A}_0$. *Пусть* P *удовлетворяет следующим условиям*:

$$(P \otimes \mathrm{id})\Delta \circ P = (P \otimes P)\Delta = (\mathrm{id} \otimes P)\Delta \circ P, \tag{5}$$

$$P \circ \star = \star \circ P, \tag{6}$$

$$P \circ \sigma_z = \sigma_z \circ P, \tag{7}$$

$$\mu \circ P = \mu. \tag{8}$$

Положим для любого $x \in B$

$$\tilde{\Delta}(x) = (P \otimes P)\Delta(x).$$

Тогда $(B, \tilde{\Delta}, \varepsilon, \star, \sigma_t, \mu)$ *является компактной квантовой гипергруппой.*

2. Теорема о факторизации.

Определение 1. *Условное ожидание* P *на компактной квантовой гипергруппе называется коунитальным, если* $\varepsilon \circ P = \varepsilon$, *где* ε *— коединица гипергруппы.*

Пусть $\mathcal{A}$ — компактная квантовая группа с непрерывной коединицей ε, B — унитальная C^*-подалгебра C^*-алгебры A. Пусть $P : A \to B$ — условное ожидание, удовлетворяющее условиям теоремы 1 (здесь под подалгебрами A_0 и $\tilde{A}_0$ понимаются соответственно алгебра, порожденная матричными элементами неприводимых представлений, и ее алгебраический тензорный квадрат). Обозначим $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \circ P$.

Лемма 1. *Отображение* $\tilde{\varepsilon} : A \to \mathbb{C}$ *является состоянием на* C^**-алгебре* A, *причем* $\tilde{\varepsilon}$, *понимаемый как элемент алгебры* $\hat{A}$, *является идемпотентом, т. е.* $\tilde{\varepsilon}^2 = \tilde{\varepsilon}$.

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из того, что P сохраняет конус положительных элементов C^*-алгебры A, ε является гомоморфизмом и $\tilde{\varepsilon}(1) = 1$.

Докажем второе утверждение. Имеем

$$\tilde{\varepsilon}^2 = (\varepsilon \circ P \otimes \varepsilon \circ P) \circ \Delta = (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon \circ P) \circ \Delta \circ P =$$

$$= (\mathrm{id} \otimes \varepsilon \circ P) \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \circ P = \varepsilon \circ P \circ P = \tilde{\varepsilon}.$$

Лемма 2. *Пусть* $\tilde{\varepsilon}$ *— след на* A. *Тогда левый идеал*

$$J = \{ a \in A \,|\, \tilde{\varepsilon}(a^* a) = 0 \}$$

является замкнутым двусторонним идеалом и коидеалом в A, *т. е.*

$$\Delta(J) \subset J \otimes A + A \otimes J. \tag{9}$$

Кроме того, идеал J *инвариантен относительно инволюции, коинволюции и группы* σ_t, *т. е.*

$$J^* = J, \quad J^\star = J, \quad \sigma_t(J) \subset J, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Доказательство. Поскольку $\tilde{\varepsilon}$ — след, левый идеал J является двусторонним. Покажем, что J — коидеал. Для $a \in J$ имеем

$$(\tilde{\varepsilon} \otimes \tilde{\varepsilon})(\Delta(a)^* \Delta(a)) = (\tilde{\varepsilon} \otimes \tilde{\varepsilon})(\Delta(a^* a)) = \tilde{\varepsilon}^2(a^* a) = \tilde{\varepsilon}(a^* a) = 0.$$

Используя снова следовое свойство $\tilde{\varepsilon}$, получаем

$$\tilde{\varepsilon}((a^*)^* a^*) = \tilde{\varepsilon}(a a^*) = \tilde{\varepsilon}(a^* a) = 0$$

для $a \in J$.

Наконец, используя коммутируемость инволюции и коинволюции, равенство $\tilde{\varepsilon}(a^\star) = \overline{\tilde{\varepsilon}(a)}$ [1] и (3), находим

$$\tilde{\varepsilon}((a^\star)^* a^\star) = \tilde{\varepsilon}((a^* a)^\star) = \overline{\tilde{\varepsilon}(a^* a)} = 0.$$

Докажем последнее из соотношений (10). Поскольку условное ожидание P коммутирует с σ_t и $\varepsilon \circ \sigma_t = \varepsilon$ [1], для любого $a \in A$ имеем $\tilde{\varepsilon}(\sigma_t(a)) = \varepsilon(P \circ \circ \sigma_t(a)) = \varepsilon(\sigma_t(P(a))) = \varepsilon \circ P(a) = \tilde{\varepsilon}(a)$. Поэтому для всех $a \in J$

$$\tilde{\varepsilon}(\sigma_t(a)^* \sigma_t(a)) = \tilde{\varepsilon}(\sigma_t(a^* a)) = \tilde{\varepsilon}(a^* a) = 0.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем будем предполагать, что $\tilde{\varepsilon}$ является следом на C^*-алгебре A.

Лемма 3. *Обозначим через* $\hat{J} = \{ \xi \in \hat{A} \,|\, \xi(a) = 0$ *для всех* $a \in J \}$ *аннулятор* J *в* $\hat{A}$. *Тогда*:

i) *состояние* $\tilde{\varepsilon}$ *принадлежит* $\hat{J}$;

ii) $\Delta \hat{J} \subset \hat{J} \otimes \hat{J}$;

iii) $\hat{J}$ *является замкнутой инволютивной подалгеброй инволютивной банаховой алгебры* $\hat{A}$;

iv) $\hat{J}$ *замкнута относительно отображений* $*$ *и* σ_t, *определенных равенствами* $\chi^*(a) = \overline{\chi}(a^*)$ *и* $\sigma_t(\chi)(a) = \chi(\sigma_t(a))$, *где* $\chi \in \hat{A}$, $a \in A$, $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Поскольку $|\tilde{\varepsilon}(a)|^2 \leq \tilde{\varepsilon}(1)\tilde{\varepsilon}(a^* a) = 0$ для всех $a \in J$, то $\tilde{\varepsilon} \in \hat{J}$.

Докажем ii). Пусть $a \in J$, $b \in A$ и $\xi \in \hat{J}$. Поскольку J — левый идеал, то $\langle \Delta\xi, a \otimes b \rangle = \xi(ab) = 0$, откуда $\Delta\xi \subset \hat{J} \otimes \hat{A}$, а так как J также является правым идеалом, то $\langle \Delta\xi, b \otimes a \rangle = \xi(ba) = 0$, откуда $\Delta\xi \subset \hat{A} \otimes \hat{J}$. Следовательно, $\Delta \hat{J} \subset \hat{J} \otimes \hat{J}$.

Наконец, последние два утверждения следуют из того, что замкнутый идеал J инвариантен относительно $*$, $\star$ и σ_t, $t \in \mathbb{R}$.

Обозначим через $A/\hat{J} = \{a \in A \,|\, a\,.\,\xi = \langle \xi, 1\rangle a$ для всех $\xi \in \hat{J}\}$ пространство $\hat{J}$-правоинвариантных элементов A и через $\hat{J}\backslash A = \{a \in A \,|\, \xi\,.\,a = \langle \xi, 1\rangle a$ для всех $\xi \in \hat{J}\}$ пространство $\hat{J}$-левоинвариантных элементов A. Пусть $\hat{J}\backslash A/\hat{J} = \hat{J}\backslash A \bigcap A/\hat{J}$ — пространство $\hat{J}$-биинвариантных элементов A.

Лемма 4. *Пространство* $\hat{J}\backslash A/\hat{J}$ $\hat{J}$*-биинвариантных элементов является* C^**-подалгеброй* C^**-алгебры* A.

Доказательство. Покажем, что $\hat{J}/A$ является подалгеброй A. Пусть a, $b \in A/\hat{J}$. Поскольку $\Delta\xi \in \hat{J} \otimes \hat{J}$ для всех $\xi \in \hat{J}$, то

$$ab\,.\,\xi = (\xi \otimes \mathrm{id})\Delta(ab) = (\xi \otimes \mathrm{id})\Delta(a)\Delta(b) =$$

$$= (\xi \otimes \mathrm{id})\left(\sum_i (a_1^i \otimes a_2^i)(b_1^i \otimes b_2^i)\right) = \sum_i \xi(a_1^i b_1^i) a_2^i b_2^i =$$

$$= \sum_i \langle \Delta\xi, a_1^i \otimes b_1^i\rangle a_2^i b_2^i = \sum_{ij} \xi_j^1(a_1^i) a_2^i \xi_j^2(b_1^i) b_2^i =$$

$$= \sum_j (\xi_j^1 \otimes \mathrm{id})\Delta a (\xi_j^2 \otimes \mathrm{id})\Delta b = \sum_j a\,.\,\xi_j^1\, b\,.\,\xi_j^2 =$$

$$= \sum_j \langle \xi_j^1, 1\rangle a \langle \xi_j^2, 1\rangle b = \langle \Delta\xi, 1 \otimes 1\rangle ab = \langle \xi, 1\rangle ab,$$

откуда следует, что $ab \in A/\hat{J}$ и $A/\hat{J}$ является алгеброй.

Поскольку

$$(\xi \otimes \mathrm{id})\Delta(a^*) = (\xi \circ * \otimes *)\Delta(a) = \big((\xi^* \otimes \mathrm{id})\Delta(a)\big)^* = \overline{\langle \xi^*, 1\rangle} a^* = \langle \xi, 1\rangle a^*,$$

$A/\hat{J}$ является инволютивной алгеброй и, в силу замкнутости по норме, C^*-подалгеброй A.

Все приведенные выше рассуждения также справедливы для $\hat{J}\backslash A$.

Лемма 5. *Определим* $\pi^R(a) = a\,.\,\tilde{\varepsilon}$ *и* $\pi^L(a) = \tilde{\varepsilon}\,.\,a$, $a \in A$. *Тогда*:

i) *проекторы* π^L, π^R *коммутируют на* A;

ii) π^L *и* π^R *являются условными ожиданиями на* A;

iii) *для любого* $\xi \in \hat{J}$ *выполняются соотношения*

$$\xi \cdot \tilde{\varepsilon} = \langle \xi, 1\rangle \tilde{\varepsilon}, \tag{11}$$

$$\tilde{\varepsilon} \cdot \xi = \langle \xi, 1\rangle \tilde{\varepsilon}; \tag{12}$$

iv) $\pi^R(A) = A/\hat{J}$ *и* $\pi^L(A) = \hat{J}\backslash A$.

Доказательство. Для любого $a \in A$ имеем $(\pi^L)^2(a) = \tilde{\varepsilon}\,.\,(\tilde{\varepsilon}\,.\,a) = \tilde{\varepsilon}^2\,.\,a = \pi^L(a)$, поскольку $\tilde{\varepsilon}^2 = \tilde{\varepsilon}$. Поэтому π^L и π^R — проекторы на A. Поскольку $(\tilde{\varepsilon}\,.\,a)\,.\,\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}\,.\,(a\,.\,\tilde{\varepsilon})$, проекторы π^L и π^R коммутируют.

Далее, поскольку $\|\pi^L\| \le 1$ и $\|\pi^R\| \le 1$, из теоремы Томиямы [15] следует, что π^L и π^R — условные ожидания на A.

В силу того, что π^L является условным ожиданием на A, для любых a, $b \in A$ имеем $\tilde{\varepsilon}\,.\,\big((\tilde{\varepsilon}\,.\,a)b\big) = (\tilde{\varepsilon}\,.\,a)(\tilde{\varepsilon}\,.\,b)$. Применяя ε к обеим частям этого равенства, получаем

$$\tilde{\varepsilon}\big((\tilde{\varepsilon}\,.\,a)b\big) = \tilde{\varepsilon}(a)\tilde{\varepsilon}(b). \tag{13}$$

Докажем iii). Равенство (11) достаточно доказать для положительных $\xi \in \hat{J}$. Поскольку $\tilde{\varepsilon}$ является следом на A, идеал J совпадает с ядром представления Гельфанда – Наймарка – Сигала, построенного по состоянию $\tilde{\varepsilon}$. Используя следствие 3.4.3 из [16], получаем, что равенство (11) достаточно доказать для положительных состояний ξ вида $\xi(a) = \tilde{\varepsilon}(c^*ac)$, где $a, c \in A$.

Используя (13) и следовое свойство состояния $\tilde{\varepsilon}$, для любого состояния ξ вида $\xi(a) = \tilde{\varepsilon}(c^*ac)$ получаем

$$\langle \xi \cdot \tilde{\varepsilon}, a \rangle = \langle \xi \otimes \tilde{\varepsilon}, \Delta a \rangle = \xi(\tilde{\varepsilon} \,.\, a) = \tilde{\varepsilon}(c^*(\tilde{\varepsilon} \,.\, a)c) =$$

$$= \tilde{\varepsilon}(cc^*(\tilde{\varepsilon} \,.\, a)) = \tilde{\varepsilon}(cc^*)\tilde{\varepsilon}(\tilde{\varepsilon} \,.\, a) = \tilde{\varepsilon}(c^*c)(\tilde{\varepsilon} \otimes \tilde{\varepsilon})\Delta a =$$

$$= \xi(1)\langle \tilde{\varepsilon}^2, a \rangle = \xi(1)\tilde{\varepsilon}(a),$$

откуда следует (11). Доказательство равенства (12) основано на равенстве $\tilde{\varepsilon}((a \,.\, \tilde{\varepsilon})b) = \tilde{\varepsilon}(a)\tilde{\varepsilon}(b)$, которое справедливо в силу того, что π^R — условное ожидание.

Докажем iv). Вложения $A / \hat{J} \subset \pi^R(A)$ и $\hat{J} \setminus A \subset \pi^L(A)$ очевидны. В силу (11) для любых $\xi \in \hat{J}$, $a \in A$ имеем

$$\xi \,.\, (\pi^L(a)) = \xi \,.\, (\tilde{\varepsilon} \,.\, a) = (\xi \,.\, \tilde{\varepsilon}) \,.\, a = \langle \xi, 1 \rangle \tilde{\varepsilon} \,.\, a = \langle \xi, 1 \rangle \pi^L(a),$$

откуда следует обратное вложение $\pi^L(A) \subset \hat{J} \setminus A$. Вложение $\pi^R(A) \subset A / \hat{J}$ следует из (12).

Лемма доказана.

Обозначим через $C = A / J$ фактор-алгебру C^*-алгебры A по идеалу J. Пусть $\pi : A \to C$ — соответствующий морфизм C^*-алгебр. Наделим алгебру C коумножением $\Delta_1(\pi(a)) = (\pi \otimes \pi)\Delta a$, которое корректно определено в силу (9). Тогда C^*-алгебра C с коумножением Δ_1 является компактной квантовой группой. Действительно, коассоциативность коумножения и плотность множеств $\{(b \otimes 1)\Delta_1(c) : b, c \in C\}$ и $\{(1 \otimes b)\Delta_1(c) : b, c \in C\}$ в C очевидны.

Эпиморфизм $\pi : A \to C$, очевидно, является эпиморфизмом компактных квантовых групп. В силу предложения 1 можно построить компактную квантовую гипергруппу двойных классов смежности $\mathcal{B} = (C \setminus A / C, \delta, \varepsilon, \star, \sigma_t, \nu)$, использовав конструкцию, приведенную в пп. 3 п. 1 (напомним, что $C \setminus A / C$ здесь понимается как замыкание $C \setminus A_0 / C$ в A). Обозначим через $P_1 : A \to C \setminus A / C$ соответствующее условное ожидание [8].

Введем следующие обозначения: $A / C = \{ a \in A \,|\, (\mathrm{id} \otimes \pi) \circ \Delta(a) = a \otimes 1_C \}$ и $C \setminus A = \{ a \in A \,|\, (\pi \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(a) = 1_C \otimes a \}$. Покажем, что C^*-алгебры A / C и $C \setminus A$ совпадают с замыканиями $*$-алгебр A_0 / C и $C \setminus A_0$ соответственно.

Лемма 6. *C^*-алгебры $\hat{J} \setminus A / \hat{J}$ и $C \setminus A / C$ совпадают как подалгебры C^*-алгебры A и, следовательно, $P_1 = \pi^R \pi^L$.*

Доказательство. Очевидно, что формула $\tilde{\xi} \circ \pi = \xi$ осуществляет изоморфизм $C' \ni \tilde{\xi} \mapsto \xi \in \hat{J}$ между дуальным пространством C' фактор-алгебры $C = A / J$ и $\hat{J}$.

Из равенств (11), (12) следует, что $\tilde{\varepsilon}$ при этом изоморфизме соответствует состоянию Хаара μ_1 на C. Отсюда следует равенство C^*-алгебр $C \setminus A = \hat{J} \setminus A$ и $A / C = A / \hat{J}$.

Осталось показать, что замыкания $*$-алгебр A_0 / C и $C \backslash A_0$ совпадают с $A / \hat{J}$ и $\hat{J} \backslash A$ соответственно. Включения $A_0 / C \subset A / \hat{J}$ и $C \backslash A_0 \subset \hat{J} \backslash A$ очевидны. Покажем, что замыкание A_0 / C содержит $A / \hat{J}$. Пусть $a \in A / \hat{J}$, т. е. $a = a \,.\, \tilde{\varepsilon}$. Поскольку A_0 плотно в A, существует последовательность $a_n \in A_0$, сходящаяся к a. Рассмотрим последовательность $a_n \,.\, \tilde{\varepsilon}$. Заметим, что $a_n \,.\, \tilde{\varepsilon} \in A_0 / \hat{J}$ в силу того, что $u_{ij}^{\alpha} \,.\, \xi \in A_0$ для любого непрерывного функционала $\xi \in \hat{A}$ и произвольного матричного элемента неприводимого унитарного копредставления. Но $a_n \,.\, \tilde{\varepsilon}$ сходится к элементу a в силу $a = a \,.\, \tilde{\varepsilon}$. Второе утверждение доказывается аналогично.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A}$ — компактная квантовая группа с непрерывной коединицей ε. Пусть $P : A \to B$ — условное ожидание на C^*-алгебре A, удовлетворяющее условиям теоремы* 1. *Предположим также, что $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \circ P$ является следом на A. Тогда существуют компактная квантовая группа C и эпиморфизм $\pi : \mathcal{A} \to C$. Обозначим через $P_1 : A \to C \backslash A / C$ условное ожидание, которое соответствует конструкции двойных квантовых классов смежности. Тогда существует такое коунитальное условное ожидание $P_2 : C \backslash A / C \to B$, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "P_1"'] \arrow[dr, "P"] & \\ C \backslash A / C \arrow[r, "P_2"'] & B \end{tikzcd} \tag{14}$$

коммутативна.

Доказательство. Гипергруппа $C \backslash A / C$ и условное ожидание P_1 были построены выше. В силу леммы 6 для всех $a \in C \backslash A / C$ имеем $P_1(a) = (\mu_1 \circ \circ\, \pi \otimes \mathrm{id} \otimes \mu_1 \circ \pi)\Delta^2(a) = \tilde{\varepsilon} \,.\, a \,.\, \tilde{\varepsilon}$.

Обозначим через $P_2 = P \upharpoonright C \backslash A / C$ сужение P на C^*-алгебру $C \backslash A / C$. Очевидно, что P_2 является условным ожиданием и удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Покажем, что условное ожидание P_2 коунитально. Для всех $a \in \in C \backslash A / C$ имеем $(\varepsilon \circ P_2)(a) = (\varepsilon \circ P)(\tilde{\varepsilon} \,.\, a) = \varepsilon(P \otimes \tilde{\varepsilon})\Delta a = \tilde{\varepsilon}^2(a) = \tilde{\varepsilon}(a)$. С другой стороны, $\varepsilon(a) = \varepsilon(\tilde{\varepsilon} \,.\, a) = (\varepsilon \otimes \tilde{\varepsilon})\Delta a = \tilde{\varepsilon}(a)$. Следовательно, $(\varepsilon \circ P_2)(a) = = \varepsilon(a)$ для всех $a \in C \backslash A / C$, т. е. P_2 является коунитальным условным ожиданием.

Используя (5), для всех $a \in A$ имеем

$$P_2(P_1(a)) = P(\tilde{\varepsilon} \,.\, a \,.\, \tilde{\varepsilon}) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id} \otimes \varepsilon)(P \otimes P \otimes P)(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta a =$$

$$= (\varepsilon \otimes \mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\mathrm{id} \otimes P \otimes \mathrm{id})(\Delta \otimes \mathrm{id})(P \otimes P)\Delta a =$$

$$= (\varepsilon \otimes \mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\mathrm{id} \otimes P \otimes \mathrm{id})(\Delta \otimes \mathrm{id})(P \otimes \mathrm{id})\Delta P a =$$

$$= (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes P)(P \otimes \varepsilon)\Delta P a =$$

$$= (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes P)\Delta P a = P^2 a = P a,$$

откуда $P = P_2 P_1$, т. е. диаграмма (14) коммутативна.

1. *Chapovsky Yu. A., Vainerman L. I.* Compact quantum hypergroups // J. Operator Theory. – 1999. – **41**. – P. 261 – 289.

2. *Berezansky Yu. M., Kalyzhnyi A. A.* Harmonic analysis in hypercomplex systems. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1998. – 483 p.
3. *Bloom W. R., Heyer H.* Harmonic analysis of probability measures on hypergroups. – Berlin; New York: de Grueter, 1995. – VI + 602 p.
4. *Woronowicz S. L.* Compact matrix preudogroups // Communs Math. Phys. – 1987. – **111**. – P. 613 – 665.
5. *Koornwinder T. H.* Discrete hypergroups associated with compact quantum Gelfand pairs // Contemp. Math. – 1995. – **183**. – P. 213 – 235.
6. *Chapovsky Yu. A., Vainerman L. I.* Hypergroup structures associated with a pair of quantum groups $(SU_q(n), U_q(n-1))$ // Meth. Funct. Anal. in Problems Math. Phys. – 1992. – P. 47 – 69.
7. *Vainerman L. I.* Gelfand pairs of quantum groups, hypergroups and q-special functions // Contemp. Math. – 1995. – **183**. – P. 373 – 394.
8. *Kalyzhnyi A. A.* Conditional expectations on quantum groups and new examples of quantum hypergroups // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2001. – **7**, № 4. – P. 49 – 68.
9. *Jewett R.* Spaces with abstract convolution of measures // Adv. Math. – 1975. – **18**, № 1. – P. 1 – 101.
10. *Vainerman L. I.* 2-Cocycles and twisting of Kac algebras // Communs Math. Phys. – 1998. – **191**. – P. 697 – 721.
11. *Nikshych D.* K_0 rings and twisting of finite dimensional semisimple Hopf algebras // Communs Algebra. – 1998. – **26**. – P. 321 – 342.
12. *Chapovsky Yu. A., Kalyzhnyi A. A.* A factorization of conditional expectations on Kac algebras and quantum double coset hypergroups // Ukr. Mat. Zh. – 2003. – **55**, № 12. – P. 1669 – 1677.
13. *Woronowicz S. L.* Compact quantum groups // Symetries Quantiques (Les Houches, 1995). – Amsterdam: North-Holland, 1998. – P. 845 – 884.
14. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. – New York: Springer, 1979. – 415 p.
15. *Tomiyama J.* On the projection of norm one in W^*-algebras. I – III // Proc. Jap. Acad. Sci. – 1957. – **33**. – P. 608 – 612; Tohoku Math. J. – 1958. – **10**. – P. 204 – 209; 1959. – **11**. – P. 125 – 129.
16. *Dixmier J.* Les C^*-algebras et leur representations. – Paris: Gauthier-Villars Edit., 1969.

Получено 24.01.2005