УДК 517.9

О. Ю. Константінов (Київ. нац. ун-т ім.Т. Шевченка)

ТОЧКОВИЙ СПЕКТР СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ САМОСПРЯЖЕНИХ ОПЕРАТОРІВ*

We study an inverse spectral problem for the point spectrum of singularly perturbed self-adjoint operators.

Вивчається обернена спектральна задача для точкового спектра сингулярно збурених самоспряжених операторів.

1. Вступ. Розглянемо в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ необмежений самоспряжений оператор $A = A^*$ з областю визначення $\mathcal{D}(A)$. Будемо говорити, що оператор $\tilde{A} \neq A$ в $\mathcal{H}$ є (чисто) сингулярним збуренням A, якщо область

$$\mathcal{D} := \left\{ f \in \mathcal{D}(A) \bigcap \mathcal{D}(\tilde{A}) \,:\, Af = \tilde{A}f \right\} \tag{1}$$

є щільною в $\mathcal{H}$. У цьому випадку можна визначити щільно визначений симетричний оператор $\hat{A} := A \restriction \mathcal{D} = \tilde{A} \restriction \mathcal{D}$. Якщо додатково припустити, що оператор $\tilde{A}$ є самоспряженим, то A і $\tilde{A}$ будуть різними самоспряженими розширеннями $\hat{A}$.

Метою цієї роботи є дослідження умов існування сингулярного збурення $\tilde{A}$, що розв'язує задачу на власні значення

$$\tilde{A}\psi_k = \lambda_k \psi_k, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{2}$$

для довільних наперед заданих послідовності дійсних чисел $\Lambda := \{\lambda_k : k \geq 1\}$ та системи ортонормованих векторів $\Psi := \{\psi_k : k \geq 1\}$ таких, що

$$\mathcal{L} \bigcap \mathcal{D}(A) = \{0\}, \tag{3}$$

де

$$\mathcal{L} := \overline{\operatorname{span}\{\psi_k : k \geq 1\}}. \tag{4}$$

Тут $\overline{M}$ позначає замикання множини M, $\operatorname{span}\{M\}$ — лінійна оболонка множини M.

Зазначимо, що дослідження точкового спектра самоспряжених розширень симетричних операторів зі скінченними індексами дефекту вперше проводилось у роботі М. Г. Крейна [1]. Спектральні властивості самоспряжених розширень симетричних операторів з лакунами детально вивчалися в роботах [2 – 5]. Зокрема, в [2, 5] було розглянуто симетричні оператори з кількома лакунами і в термінах просторів граничних значень та функції Вейля було побудовано самоспряжені розширення з заданими спектральними властивостями (в лакунах і поза лакунами відповідного симетричного оператора). Відмітимо також роботу [6], де досліджувалось питання про кількість власних значень одновимірного оператора Шрьодінгера з точковими взаємодіями.

У випадку скінченних послідовностей Λ та Ψ задачу побудови сингулярного збурення $\tilde{A}$, що розв'язує задачу на власні значення (2), повністю розв'язано в [7 – 9].

У цій роботі (див. також [10]) ми узагальнюємо та розвиваємо результати

---

* Підтримано проектами DFG 436 UKR 113/67, 436 UKR 113/78 та Державним фондом фундаментальних досліджень України (грант 01.07/27).

[7 – 9] на випадок нескінченних Λ та Ψ. У п. 2 наведено критерій існування симетричного сингулярного збурення $\tilde{A}$ оператора A, що розв'язує задачу на власні значення (2). У п. 3 обговорюються умови існування самоспряжених розширень оператора $\tilde{A}$.

Далі через $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ позначаємо клас лінійних неперервних операторів з $\mathcal{H}$ в $\mathcal{K}$, а через $\operatorname{Ran} T$, $\operatorname{Ker} T$ та $\rho(T)$ — образ, ядро та резольвентну множину оператора T. Інтервал $\Delta \subset \mathbb{R}$ називається лакуною самоспряженого оператора T, якщо $\Delta \subset \rho(T)$.

2. Симетричні сингулярні збурення і задача на власні значення (2). Введемо множину

$$\mathcal{D}_0 := \{x \in \mathcal{D}(A) : (\psi_k, (A - \lambda_k)x) = 0 \;\; \forall k \geq 1\}. \tag{5}$$

Теорема 1. *Нехай A — необмежений самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ і $\Lambda = \{\lambda_k \colon k \geq 1\}$ — довільна послідовність дійсних чисел. Припустимо, що ортонормована система $\Psi := \{\psi_k \colon k \geq 1\}$ задовольняє умову* (3). *Тоді щільність $\mathcal{D}_0$ в $\mathcal{H}$ є необхідною і достатньою умовою для існування симетричного* (*щільно визначеного*) *сингулярного збурення $\tilde{A}$ оператора A, що розв'язує задачу на власні значення* (2).

Доведення. Припустимо спочатку, що існує симетричний оператор $\tilde{A}$, який розв'язує задачу на власні значення (2) і є сингулярним збуренням оператора A. Нехай множина $\mathcal{D}$ визначається формулою (1) і $\hat{A} := A \upharpoonright \mathcal{D}$. Тоді $\hat{A}^* \supset \tilde{A}^* \supset \tilde{A}$ і внаслідок (2) $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_0$. Зокрема, множина $\mathcal{D}_0$ є щільною в $\mathcal{H}$. Навпаки, нехай $\mathcal{D}_0$ є щільною в $\mathcal{H}$ і

$$A_0 := A \upharpoonright \mathcal{D}_0. \tag{6}$$

Тоді на підставі (5)

$$A_0^* \psi_k = \lambda_k \psi_k, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Розглянемо самоспряжений у підпросторі $\mathcal{L}$ (див. (4)) оператор

$$B := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\cdot, \psi_k) \psi_k \tag{7}$$

і визначимо оператор

$$A_\Lambda := A_0^* \upharpoonright_{\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}(B)}. \tag{8}$$

Згідно з лемою 2.2 роботи [3]

$$A_\Lambda = B \oplus C \tag{9}$$

для деякого симетричного оператора C в $\mathcal{L}^\perp$. Зокрема, A_Λ — симетричний оператор, що розв'язує задачу на власні значення (2). Більш того, A_Λ збігається з A на щільній множині $\mathcal{D}_0$.

Теорему доведено.

Розглянемо гільбертове оснащення (див. [11])

$$\mathcal{H}_- \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_+,$$

де $\mathcal{H}_+ := \mathcal{D}(A)$ зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_+ = ((A + i)\cdot, (A + i)\cdot)$, $\mathcal{H}_-$ — поповнення $\mathcal{H}$ у нормі $\|\cdot\|_- = \|(A + i)^{-1} \cdot\|$. Оператор A стандартним чином продовжується до обмеженого оператора $\mathbb{A}$ з $\mathcal{H}$ до $\mathcal{H}_-$. Покладемо

$$\mathcal{M} := \overline{\operatorname{span}\{(\mathbb{A}-\lambda_k)\psi_k : k \geq 1\}}$$

(замикання береться в $\mathcal{H}_-$). Тоді

$$\mathcal{D}_0 = \{x \in \mathcal{D}(A) : x \perp \mathcal{M}\}.$$

Тепер легко бачити (див. [10]), що умова щільності множини $\mathcal{D}_0$ в $\mathcal{H}$ рівносильна тому, що для деякого (а тоді і для довільного) $\lambda \in \rho(A)$

$$\mathcal{G}_\lambda \bigcap \mathcal{D}(A) = \{0\}, \tag{10}$$

де

$$\mathcal{G}_\lambda := \overline{\operatorname{span}\left\{(A-\lambda_k)(A-\lambda)^{-1}\psi_k : k \geq 1\right\}}. \tag{11}$$

Умова (10), очевидно, виконується у випадку скінченних послідовностей $\Lambda = \{\lambda_k : 1 \leq k \leq n\}$ і $\Psi = \{\psi_k : 1 \leq k \leq n\}$ (див. (3)). Навпаки, у випадку нескінченних Λ і Ψ множина $\mathcal{D}_0$ може бути нещільною в $\mathcal{H}$. Наведемо одну достатню умову щільності $\mathcal{D}_0$ (див. також [10]).

Теорема 2. *Нехай A — необмежений самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ і ортонормована система $\Psi := \{\psi_k : k \geq 1\}$ задовольняє умову* (3). *Припустимо, що існує обмежений інтервал $\Delta = (a, b)$ такий, що для деякого $k_0 \geq 1$ виконуються умови $\overline{\{\lambda_k : k \geq k_0\}} \subset \Delta$ і $\{\psi_k : k \geq k_0\} \subset E(\mathbb{R} \setminus \Delta)\mathcal{H}$. Тоді $\mathcal{D}_0$ є щільною в $\mathcal{H}$.*

Доведення. Покладемо $\lambda := (a+b)/2 + i$ і розглянемо оператори

$$B'_\lambda := \sum_{k=k_0}^{\infty} (\lambda_k - \lambda)(\cdot, \psi_k)\psi_k,$$

$$B''_\lambda := \sum_{k=1}^{k_0-1} (\lambda_k - \lambda)(\cdot, \psi_k)\psi_k,$$

$$T_\lambda x := x - (A-\lambda)^{-1}\left(B'_\lambda + B''_\lambda\right)x, \qquad x \in \mathcal{L}.$$

Зрозуміло, що $T_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{L}, \mathcal{H})$ і $\mathcal{G}_\lambda = \overline{\operatorname{Ran} T_\lambda}$ (див. (11)). На підставі (3) $\operatorname{Ran} T_\lambda \bigcap \mathcal{D}(A) = \{0\}$. Таким чином, досить довести, що $\operatorname{Ran} T_\lambda$ — замкнена множина в $\mathcal{H}$. Безпосередньо видно, що $\left\|(A-\lambda)^{-1}B'_\lambda\right\| < 1$, а $(A-\lambda)^{-1}B''_\lambda$ — скінченновимірний оператор із $\mathcal{L}$ у $\mathcal{H}$. Звідси випливає, що T_λ — напівфредгольмовий оператор з $\mathcal{L}$ в $\mathcal{H}$ (див. [12]). Зокрема, $\operatorname{Ran} T_\lambda$ — замкнений підпростір у $\mathcal{H}$.

Наведемо також приклад нещільності множини $\mathcal{D}_0$.

Приклад. Нехай $\mathcal{K}$ — нескінченновимірний гільбертів простір і $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$. Будемо ототожнювати елементи $\mathcal{H}$ з парами $\langle x, y\rangle$, $x \in \mathcal{K}$, $y \in \mathcal{K}$. Припустимо, що S, T — необмежені самоспряжені оператори в $\mathcal{K}$ такі, що $\operatorname{Ker} S = \{0\}$ і $\mathcal{D}(S) \bigcap \mathcal{D}(T) = \{0\}$. Розглянемо оператор

$$A(\langle x, y\rangle) := \langle 0, Sy\rangle, \qquad \mathcal{D}(A) = \mathcal{K} \oplus \mathcal{D}(S)$$

і підпростір

$$\mathcal{L} := \{\langle Ty, y\rangle : y \in \mathcal{D}(T)\}.$$

Зрозуміло, що A — самоспряжений оператор в $\mathcal{H}$ і $\mathcal{L}$ — нескінченновимірний підпростір в $\mathcal{H}$, що задовольняє умову (3). Нехай $\{\psi_k : k \geq 1\}$ — довільний ортонормований базис в $\mathcal{L}$ і $\lambda_k := 0$ для всіх $k \geq 1$. Тоді

$$\mathcal{D}_0 = \{(\langle x, y\rangle) \in \mathcal{D}(A) : A(\langle x, y\rangle) \perp \mathcal{L}\} =$$
$$= \{(\langle x, y\rangle) \in \mathcal{D}(A) : Sy \perp \mathcal{D}(T)\} = \mathcal{K} \oplus \{0\}.$$

3. Самоспряжені сингулярні збурення. У цьому пункті ми наведемо достатні умови, що забезпечують існування самоспряженого сингулярного збурення $\tilde{A}$ оператора A, що розв'язує задачу на власні значення (2) (див. також [10]).

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми* 2 *і, більш того, підпростір* $\mathcal{L} \subset E(\mathbb{R} \setminus \Delta)\mathcal{H}$. *Тоді існує самоспряжене сингулярне збурення* $\tilde{A}$ *оператора* A, *що розв'язує задачу на власні значення* (2).

Доведення. З огляду на умову на $\mathcal{L}$ досить довести теорему у випадку, коли Δ є лакуною оператора A. Нехай оператор A_0 визначено формулою (6). Розглянемо в підпросторі $\mathcal{L}' := \overline{\operatorname{span}\{\psi_k : k \geq k_0\}}$ самоспряжений оператор

$$B' := \sum_{k \geq k_0} \lambda_k (\psi_k, \cdot)\psi_k$$

і симетричний в $\mathcal{H}$ оператор $A'_\Lambda := A_0^* \restriction_{\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}(B')}$. На підставі леми 2.2 [3] (пор. з (9))

$$A'_\Lambda := B' \oplus C'$$

для деякого симетричного оператора C' в $\mathcal{L}'^{\perp}$. Зауважимо, що Δ — лакуна A_0, і згідно з лемою 2.1 роботи [3] Δ є лакуною оператора C'. Зокрема, A'_Λ має однакові індекси дефекту. З іншого боку, A_Λ (див. (8)) є скінченновимірним збуренням оператора A'_Λ і, зокрема, A_Λ також має однакові індекси дефекту. Таким чином, довільне самоспряжене розширення A_Λ розв'язує задачу на власні значення (2).

***Зауваження* 1.** Теореми 2, 3 залишаються справедливими і для порожньої множини Δ. У цьому випадку $\mathcal{L}$ — скінченновимірний підпростір, що задовольняє умову (3), і Λ — довільна скінченна множина. Явну конструкцію відповідного самоспряженого розширення наведено в [7].

Інша можливість забезпечити існування самоспряженого сингулярного збурення $\tilde{A}$ оператора A, що розв'язує задачу на власні значення (2), полягає в більш спеціальних припущеннях на систему векторів $\{\psi_k : k \geq 1\}$. Позначимо через $\mathcal{H}_\varphi$ мінімальний інваріантний відносно A підпростір, що містить $\varphi \in \mathcal{H}$.

Теорема 4. *Нехай* A *— необмежений самоспряжений оператор у гільбертовому просторі* $\mathcal{H}$ *і* $\Lambda = \{\lambda_k : k \geq 1\}$ *— довільна послідовність дійсних чисел. Припустимо, що система* $\Psi = \{\psi_k : k \geq 1\}$ *така, що для всіх* $k \geq 1$ $\psi_k \notin \mathcal{D}(A)$ *і підпростори* $\mathcal{H}_{\psi_k}$ *є попарно ортогональними. Тоді існує самоспряжене сингулярне збурення* $\tilde{A}$ *оператора* A, *що розв'язує задачу на власні значення* (2).

Доведення. Покладемо $\mathcal{H}_k := \mathcal{H}_{\psi_k}$, $k \in \mathbb{N}$, і $\mathcal{H}_0 := \mathcal{H} \ominus \left(\oplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_k\right)$. Нехай $A_k := A \restriction \mathcal{H}_k$ — звуження A на $\mathcal{H}_k$, $k \geq 0$. Тоді для кожного $k \geq 1$

існує самоспряжене сингулярне збурення рангу один $\tilde{A}_k$ оператора A_k таке, що $\tilde{A}_k \psi_k = \lambda_k \psi_k$ (див., наприклад, [7, 9]). Залишається розглянути

$$\tilde{A} := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \tilde{A}_k,$$

де $\tilde{A}_0 := A_0$.

***Зауваження* 2.** Теорема 4 доповнює відповідний результат [9], де було доведено існування самоспряженого сингулярного збурення з довільним точковим спектром.

1. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. I // Мат. сб. – 1947. – **20(62)**, № 3. – С. 431 – 495.
2. *Derkach V. A., Malamud M. M.* General resolvents and the boundary-value problem for Hermitian operators with gaps // J. Funct. Anal. – 1991. – **95**. – P. 1 – 95.
3. *Albeverio S., Brasche J. F., Neidhardt H.* On inverse spectral theory of self-adjoint extensions: mixed types of spectra // Ibid. – 1998. – **154**. – P. 130 – 173.
4. *Brasche J. F., Malamud M. M., Neidhardt H.* Weyl function and spectral properties of self-adjoint extensions // Integr. Equat. Oper. Theory. – 2002. – **43**. – P. 264 – 289.
5. *Albeverio S., Brasche J. F., Malamud M. M., Neidhardt H.* Inverse spectral theory for symmetric operators with several gaps: scalar-type Weyl functions. – Bonn, 2004. – 50 p. – Preprint № 166.
6. *Albeverio S., Nizhnik L.* On the number of negative eigenvalues of one-dimensional Schrödinger operators with point interaction // Lett. Math. Phys. – 2003. – **65**. – P. 27 – 35.
7. *Дудкін М. Є., Кошманенко В. Д.* Про точковий спектр самоспряжених операторів, що виникає при сингулярних збуреннях скінченного рангу // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 9. – С. 1269 – 1276.
8. *Koshmanenko V.* A variant of inverse negative eigenvalues problem in singular perturbation theory // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2002. – **8**, № 1. – C. 49 – 69.
9. *Albeverio S., Dudkin M., Konstantinov A., Koshmanenko V.* On the point spectrum of $\mathcal{H}_{-2}$ singular perturbations. – Bonn, 2003. – 10 p. – Preprint № 122.
10. *Albeverio S., Konstantinov A., Koshmanenko V.* On inverse spectral theory for singularly perturbed operators: point spectrum. – Bonn, 2004. – 12 p. – Preprint № 182.
11. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
12. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.

Одержано 10.01.2005