УДК 517.925

А. К. Деменчук (Ин-т математики НАН Беларуси, Минск)

О ЧАСТИЧНО НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ*

For weakly nonlinear almost periodic ordinary differential systems, conditions for existence are obtained and algorithms of the construction of partially irregular almost periodic solutions are suggested.

Для слабко нелінійних майже періодичних звичайних диференціальних систем отримано умови існування та запропоновано алгоритми побудови частково нерегулярних майже періодичних розв'язків.

1. Предварительные сведения и определения. Пусть $\mathbf{R}^{n\times m}$ — пространство вещественных $(n\times m)$-матриц с нормой $|\cdot|$, $\mathbf{R}^{n\times 1}=\mathbf{R}^n$, D — компактное подмножество $\mathbf{R}^n$. Обозначим через $AP(\mathbf{R}^{n\times m})$ пространство почти периодических (по Бору) матричнозначных функций $h\colon \mathbf{R}\to \mathbf{R}^{n\times m}$, а через $AP(D,\mathbf{R}^{n\times m})$ пространство функций $H\colon \mathbf{R}\times D\to \mathbf{R}^{n\times m}$ таких, что каждая $H(t,x)$ из этого пространства является непрерывной по совокупности переменных и почти периодической по $t\in\mathbf{R}$ равномерно относительно $x\in D$. Отметим, что $AP(\mathbf{R}^n)$, наделенное нормой $\|h\|=\sup\{\,|h(t)|,\, t\in\mathbf{R}\}$, становится банаховым пространством. Для $h\in AP(\mathbf{R}^n)$ положим

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T h(t)dt = \hat{h},\qquad h(t)-\hat{h} = h_*(t).$$

Под частотным модулем $\operatorname{Mod}(h_1,\ldots,h_k,H_1,\ldots,H_l)$ функций $h_i\in AP(\mathbf{R}^n)$, $i=\overline{1,k}$, и $H_j\in AP(D,\mathbf{R}^n)$, $j=\overline{1,l}$; $k+l\geq 1$, будем понимать наименьшую аддитивную группу вещественных чисел, содержащую все показатели Фурье этих функций. Будем говорить, что столбцы $P_1,\ldots,P_k$ матрицы $P\in AP(\mathbf{R}^{n\times m})$ линейно независимы над $\mathbf{R}$, если линейные комбинации этих столбцов с вещественными коэффициентами тождественно равны нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты нулевые. Через $\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} P$ обозначим столбцовый ранг матрицы $P(t)$, т. е. наибольшее число линейно независимых столбцов этой матрицы.

Периодические, квазипериодические и почти периодические решения $x(t)$ системы

* Выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований „Математические структуры" при частичной поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad f \in AP(D, \mathbf{R}^n), \tag{1}$$

в регулярном случае, т. е. когда $\mathrm{Mod}\,(x) \subseteq \mathrm{Mod}\,(f)$, изучались во многих работах (см., например, [1 – 10]). Следует отметить, что эффективные методы решения задач теории колебаний были разработаны в трудах украинской школы, возглавляемой Ю. А. Митропольским и А. М. Самойленко (см., например, [4–7]).

Нерегулярный же случай, когда указанное включение частотных модулей не выполняется, длительное время оставался неисследованным. Впервые возможность его реализации была установлена для периодического случая в [11] и для почти периодического в [12].

Определение 1. *Почти периодическое решение* $x(t)$ *системы* (1) *будем называть нерегулярным, если* $\mathrm{Mod}\,(x) \cap \mathrm{Mod}\,(f) = \{0\}$.

В работе [13] получены необходимые и достаточные условия существования нерегулярных почти периодических решений системы (1). Аналогичные вопросы для периодических систем рассматривались в [14, 15]. В этом случае условие нерегулярности означает несоизмеримость периодов решения и самой системы. Квазипериодический случай изучался в [16]. Следует отметить, что такого рода колебания при определенных начальных данных возникают, например, в системе двух упруго связанных маятников с периодически меняющейся жесткостью.

В работе [17] показано, что некоторые классы квазипериодических систем допускают квазипериодические решения, частотный базис которых содержит лишь некоторые частоты правой части. Вполне естественно предположить, что подобное явление имеет место в почти периодическом случае. Пусть частотный модуль правой части системы (1) распадается на два подмодуля, т. е. $\mathrm{Mod}\,(f) = L_1 \oplus L_2$.

Определение 2. *Почти периодическое решение* $x(t)$ *системы* (1) *будем называть нерегулярным по отношению к* L_1 (*или частично нерегулярным*), *если* $(\mathrm{Mod}\,(x) + L_2) \cap L_1 = \{0\}$.

В работе [18] изучались вопросы существования частично нерегулярных почти периодических решений системы (1).

Определение 3. *Почти периодическое решение* $x(t)$ *системы* (1) *будем называть слабо* L_1*-нерегулярным* (*или слабо нерегулярным*), *если* $\mathrm{Mod}\,(x) \subseteq L_2$.

В работе [19] приведены условия существования таких решений системы (1).

2. Постановка задачи. Будем рассматривать слабо нелинейную систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) + \mu F(t, x), \tag{2}$$

где $A(t) \in AP(\mathbf{R}^{n\times n})$, $f(t) \in AP(\mathbf{R}^n)$, $F(t, x) \in AP(D, \mathbf{R}^n)$, μ — достаточно малый вещественный параметр. Системы вида (2) с постоянной либо периодической матрицей A исследовались в [1, 7 – 10]. В работе [3] изучалась система (2), у которой соответствующее линейное приближение удовлетворяет условию экспоненциальной дихотомии.

Следует отметить, что рассматриваемые в этих работах решения не являются частично нерегулярными в смысле определения 2. В связи с этим возникает задача: получить условия существования и указать алгоритмы построения частично нерегулярных почти периодических решений системы (2).

3. Нерегулярность по отношению к частотному модулю матрицы коэффициентов системы линейного приближения. Допустим, что

$$\mathrm{Mod}\,(f, F) \cap \mathrm{Mod}\,(A) = \{0\}. \tag{3}$$

Выясним условия существования почти периодических решений $x(t)$ системы

(2), нерегулярных по отношению к $\mathrm{Mod}(A)$, т. е. таких, что $(\mathrm{Mod}(x) + \mathrm{Mod}(f, F)) \bigcap \mathrm{Mod}(A) = \{0\}$.

В дальнейшем нам понадобится вытекающая из [18] лемма.

Лемма. *Пусть* $P \in AP(\mathbf{R}^{n\times m})$. *Для того чтобы система* $P(t)z = 0$ *имела нетривиальное нерегулярное почти периодическое решение* $z(t)$, *т. е. такое, что* $\mathrm{Mod}(x) \bigcap \mathrm{Mod}(P) = \{0\}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $\mathrm{rank}_{\mathrm{col}}(P) < n$.

Из [18] следует, что система (2) имеет требуемое почти периодическое решение тогда и только тогда, когда это решение удовлетворяет системе

$$\dot{x} = \hat{A}x + f(t) + \mu F(t, x), \qquad A_*(t)x = 0. \tag{4}$$

Поскольку $\mathrm{Mod}(A_*) = \mathrm{Mod}(A)$, то в силу (3) функция $x(t)$ является нерегулярным решением второй системы из (4). Тогда из леммы следует, что если все столбцы матрицы $A_*(t)$ линейно независимы, то $x(t) \equiv 0$. Поэтому предположим, что

$$\mathrm{rank}_{\mathrm{col}}(A_*) = n_1 < n. \tag{5}$$

В силу результатов работы [20] найдется вещественная неособенная $(n \times n)$-матрица S такая, что преобразование

$$x = Sy \tag{6}$$

приводит (4) к системе

$$\dot{y} = By + h(t) + \mu H(t, y), \qquad B_*(t)y = 0, \tag{7}$$

где $B = S^{-1}\hat{A}S$, $h(t) = S^{-1}f(t)$, $H(t, y) = S^{-1}F(t, Sy)$, $B_*(t) = A_*(t)S$, причем первые $k = n - n_1$ столбцов матрицы $B_*(t)$ нулевые, а остальные n_1 столбцов линейно независимы. Последнее обстоятельство согласно лемме означает, что частично нерегулярное почти периодическое решение $y(t) = S^{-1}x(t)$ системы (7) имеет следующую структуру: $y(t) = (\tilde{y}(t), 0, \ldots, 0)$, $\tilde{y}(t) = (y_1, \ldots, y_k)$. Следовательно, система (7) примет вид

$$\dot{\tilde{y}} = B_{k,k}\tilde{y} + h^{(1)}(t) + \mu H^{(1)}(t, \tilde{y}), \qquad 0 = B_{n-k,k}\tilde{y} + h^{(2)}(t) + \mu H^{(2)}(t, \tilde{y}), \tag{8}$$

где $B_{k,k}$, $B_{n-k,k}$ — соответственно левый верхний и левый нижний блоки матрицы B (нижние индексы указывают размерность); $\mathrm{col}[h^{(1)}, h^{(2)}] = h(t)$, $\mathrm{col}[H^{(1)}, H^{(2)}] = H(t, \tilde{y}, 0, \ldots, 0)$.

Предположим, что собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ матрицы $B_{k,k}$ удовлетворяют условию

$$\mathrm{Re}\,\lambda_j \neq 0, \qquad j = \overline{1, k}. \tag{9}$$

Согласно [1, с. 157] условие (9) обеспечивает существование единственного почти периодического решения

$$\tilde{y}^{(0)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)h^{(1)}(\tau)d\tau \tag{10}$$

линейной системы

$$\dot{\tilde{y}} = B_{k,k}\tilde{y} + h^{(1)}(t), \tag{11}$$

где $G(t)$ — функция Грина соответствующей однородной системы, причем

$$\left|\tilde{y}^{(0)}(t)\right| \le M_0 < \infty. \tag{12}$$

Из [3, с. 91] следует, что $\mathrm{Mod}(\tilde{y}) = \mathrm{Mod}\,(h^{(1)})$.

Допустим, что вектор-функция $H^{(1)}(t, \tilde{y})$ удовлетворяет условию Липшица по $\tilde{y}$ в области $\tilde{D}$, содержащей замыкание соответствующей (10) траектории

$$\left|H^{(1)}(t,\tilde{y}'')-H^{(1)}(t,\tilde{y}')\right|\le L|\tilde{y}''-\tilde{y}'|, \qquad \tilde{y}',\tilde{y}''\in\tilde{D}=\left\{\tilde{y}\in\mathbf{R}^k, |\tilde{y}|\le\rho, \rho>2M_0\right\}, \tag{13}$$

где M_0 определяется (12) и $L = L(\rho)$. Тогда из [8] следует существование положительного $\mu_0 = \mu_0(\rho)$ такого, что для $|\mu| < \mu_0$ система

$$\dot{\tilde{y}} = B_{k,k}(t)\tilde{y} + h^{(1)}(t) + \mu H^{(1)}(t, \tilde{y}) \tag{14}$$

имеет в области $\tilde{D}$ единственное почти периодическое решение $\tilde{y}(t, \mu)$. Покажем, что

$$\mathrm{Mod}(\tilde{y}) \subseteq \mathrm{Mod}\,(h^{(1)}, H^{(1)}). \tag{15}$$

Для этого отметим, что любой общий ε-почти период τ функций $h^{(1)}(t)$ и $H^{(1)}(t, \tilde{y})$ при $|\mu| < \mu_0$ является ε_1-почти периодом для решения $\tilde{y}(t, \mu)$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что из $\left|h^{(1)}(t + \tau) - h^{(1)}(t)\right| < \varepsilon$ и $\left|H^{(1)}(t + \tau, \tilde{y}) - H^{(1)}(t, \tilde{y})\right| < \varepsilon$ следует $\left|\tilde{y}(t + \tau, \mu) - \tilde{y}(t, \mu)\right| < \varepsilon_1$, т. е. множество почти периодов функций $h^{(1)}(t)$ и $H^{(1)}(t, \mu)$ содержится во множестве почти периодов решения $\tilde{y}(t, \mu)$ системы (14). Тогда из соотношения между почти периодами и показателями Фурье для почти периодических функций [3, с. 61] вытекает (15).

Следуя [8], почти периодическое решение $\tilde{y}(t, \mu)$ системы (14) можно найти методом последовательных приближений

$$\tilde{y}(t, \mu) = \lim_{m\to\infty} \tilde{y}^{(m)}(t, \mu), \tag{16}$$

где в качестве нулевого приближения $\tilde{y}^{(0)}(t)$ используется решение (10) системы (11), а

$$\tilde{y}^{(m+1)}(t, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t - \tau)\left(h^{(1)}(\tau) + \mu H^{(1)}(\tau, \tilde{y}^{(m)}(\tau, \mu))\right)d\tau, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots . \tag{17}$$

Заметим, что (16) будет удовлетворять всей системе (8), если выполняется тождество

$$B_{n-k,k}\tilde{y}(t,\mu) + h^{(2)}(t) + \mu H^{(2)}(t, \tilde{y}(t,\mu)) \equiv 0. \tag{18}$$

Пусть тождество (18) имеет место. Тогда с учетом структуры $y(t)$ и замены (6) находим почти периодическое решение системы (4)

$$x(t) = S\,\mathrm{col}[\tilde{y}(t,\mu), 0,\ldots, 0], \qquad \mathrm{Mod}\,(x) = \mathrm{Mod}(\tilde{y}), \tag{19}$$

где $\tilde{y}(t)$ определяется посредством (16), (17). Из (4) следует, что (19) удовлетворяет и системе (2).

Поскольку $\mathrm{Mod}\,(h^{(1)}, H^{(1)}) \subseteq \mathrm{Mod}\,(h, H) = \mathrm{Mod}\,(f, F)$ и $\mathrm{Mod}\,(x) = \mathrm{Mod}(\tilde{y})$, на основании (15) имеем $\mathrm{Mod}\,(x) \subseteq \mathrm{Mod}\,(f, F)$. В силу (3) это означает, что почти периодическое решение (19) системы (2) является слабо нерегулярным.

При выполнении условий (3), (5), (9), (13) и (18) в области $D' = \{x \in \mathbf{R}^n, |x| \leq \leq \rho', \rho' = |S|\rho\}$ функция (19) будет единственным слабо $\mathrm{Mod}\,(A)$-нерегулярным решением системы (2). Действительно, если бы система (2) в D' имела еще одно такого рода почти периодическое решение, то согласно [18] система (14) в области $\tilde{D}$ имела бы два почти периодических решения, что противоречит [1, с. 158].

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для системы* (2) *выполнены условия* (3), (9), (13). *Тогда*:

1) *если в области* D' *система* (2) *имеет нерегулярное по отношению к* $\mathrm{Mod}\,(A)$ *почти периодическое решение, то оно единственное, слабо нерегулярное и имеет вид* (19);

2) *система* (2) *имеет решение* (19) *тогда и только тогда, когда для столбцового ранга матрицы* $A_*(t)$ *справедлива оценка* (5) *и верно тождество* (18).

Следствие. *Тождество* (18) *заведомо выполняется, например, в случае нулевых блоков* $B_{n-k,k}$, $h^{(2)}$, $H^{(2)}$.

4. Нерегулярность по отношению к частотному модулю системы линейного приближения. Перейдем к исследованию вопросов существования нерегулярных по отношению к $\mathrm{Mod}\,(A, f)$ почти периодических решений системы (2). Для этого предположим, что

$$\mathrm{Mod}\,(A, f) \cap \mathrm{Mod}\,(F) = \{0\}, \tag{20}$$

и наряду с исходной будем рассматривать систему

$$\dot{x} = \hat{A}x + \hat{f} + \mu F(t, x). \tag{21}$$

Допустим, что собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы $\hat{A}$ имеют ненулевые вещественные части

$$\mathrm{Re}\,\lambda_j \neq 0, \qquad j = \overline{1, n}. \tag{22}$$

В этом случае матрица $\hat{A}$ невырожденная. Тогда при $\mu = 0$ система (21) имеет единственное периодическое решение, которое является постоянным

$$x^{(0)}(t) = -\hat{A}^{-1}\hat{f}, \qquad |x^{(0)}| \leq M^*. \tag{23}$$

Предположим, что вектор-функция $F(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица по x

$$|F(t,x'') - F(t,x')| \leq N|x'' - x'|, \quad x', x'' \in D'' = \{x \in \mathbf{R}^n, |x| \leq \rho'', \rho'' > 2M^*\}, \tag{24}$$

где $N = N(\rho'')$. Согласно [8] при выполнении условий (22), (24) найдется $\mu^* = = \mu(\rho'') > 0$ такое, что при $|\mu| < \mu^*$ система (21) в области D'' имеет единственное почти периодическое решение $x(t, \mu)$. Это решение находится методом последовательных приближений, где за нулевое приближение $x^{(0)}(t)$ берется решение (23) соответствующей (21) линейной системы, а

$$x^{(m+1)}(t,\mu) = x^{(0)} + \mu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau) F\Big(\tau, x^{(m)}(\tau,\mu)\Big) d\tau, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots . \tag{25}$$

Как и в предыдущем пункте, можно показать, что $\mathrm{Mod}\,(x) \subseteq \mathrm{Mod}\,(F)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть для системы* (2) *выполнены условия* (20), (22), (24). *Тогда*:

1) *если в области* D'' *система* (2) *имеет нерегулярное по отношению к* $\mathrm{Mod}\,(A, f)$ *почти периодическое решение* $x(t,\mu)$, *то оно единственное, слабо нерегулярное и может быть построено методом последовательных приближений* (25);

2) *система* (2) *имеет решение* $x(t,\mu)$ *тогда и только тогда, когда справедливо тождество*

$$A_*(t) x(t,\mu) + f_*(t) \equiv 0, \qquad t \in \mathbf{R}. \tag{26}$$

Доказательство. Пусть выполнены условия (20), (22), (24) и система (2) имеет в области D'' нерегулярное по отношению к $\mathrm{Mod}\,(A, f)$ почти периодическое решение. В силу [18] это решение удовлетворяет системе (21). Как отмечено ранее, условие (22), (24) обеспечивает при $|\mu| < \mu^*$ сходимость в области D'' последовательных приближений (25) к единственному почти периодическому решению $x(t,\mu)$ системы (21), при этом частотный модуль $x(t,\mu)$ содержится в $\mathrm{Mod}\,(F)$. Поэтому нерегулярное по отношению к $\mathrm{Mod}\,(A, f)$ почти периодическое решение системы (2) совпадает с $x(t,\mu)$ и является слабо нерегулярным. Согласно [18] функция $x(t,\mu)$ удовлетворяет также системе $A_*(t)x + f_*(t) = 0$, откуда вытекает справедливость тождества (26).

Покажем, что верно обратное. Действительно, при выполнении условий (22), (24) система (21) имеет для $|\mu| < \mu^*$ единственное в области D'' почти периодическое решение $x(t,\mu)$, причем $\mathrm{Mod}\,(x) \subseteq \mathrm{Mod}\,(F)$. Поэтому $\dot{x}(t,\mu) \equiv \hat{A}x(t,\mu) + \hat{f} + \mu F(t, x(t,\mu))$. С другой стороны, из (26) следует $\hat{A}x(t,\mu) + \hat{f} \equiv A(t)x(t,\mu) + f(t)$. Из последних двух тождеств имеем $\dot{x}(t,\mu) \equiv A(t)x(t,\mu) + f(t) + \mu F(t, x(t,\mu))$, т. е. $x(t,\mu)$ — почти периодическое решение системы (2). Тот факт, что $\mathrm{Mod}\,(x) \subseteq \mathrm{Mod}\,(F)$, означает, что решение $x(t,\mu)$ является слабо нерегулярным.

***Пример* 1.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = x + a_1(t)y + f_1(t) + \mu\big(F_1(t,x,y) + \alpha x^2\big),$$

$$\dot{y} = a_2(t)y + \mu F_2(t,x,y),$$

где $a_j \in AP(\mathbf{R})$, $F_j \in AP(D,\mathbf{R})$, $F_j(t,x,0) \equiv 0$, $j = 1, 2$, причем

$$\mathrm{Mod}\,(a_1, a_2) \bigcap \mathrm{Mod}\,(f, F_1, F_2) = \{0\}.$$

Пусть $\alpha = 0$. Для нахождения нерегулярных по отношению к частотному модулю матрицы коэффициентов системы линейного приближения почти периодических решений построим систему

$$\dot{x} = x + \hat{a}_1 y + f_1(t) + \mu F_1(t,x,y),$$

$$\dot{y} = \hat{a}_2 y + \mu F_2(t,x,y),$$

$$\big(a_j(t) - \hat{a}_j\big) y = 0, \qquad j = 1, 2.$$

Из последнего соотношения в силу нерегулярности искомого решения по отношению к $\operatorname{Mod}(a_1, a_2)$ следует $y \equiv 0$. Поэтому получим

$$\dot{x} = x + f_1(t), \qquad y = 0.$$

Эта система имеет почти периодическое решение

$$x(t) = \int_t^{+\infty} \exp(t-\tau) f_1(\tau) d\tau, \qquad y = 0, \quad \operatorname{Mod}(x) = \operatorname{Mod}(f_1),$$

которое на основании теоремы 1 будет нерегулярным по отношению к $\operatorname{Mod}(a_1, a_2)$ решением исходной системы.

Если в данном примере взять $\alpha = 1$ и $f(t) = \cos t - \sin t$, то искомое решение является 2π-периодическим и находится следующим образом:

$$x(t, \mu) = \lim_{m \to \infty} x^{(m)}(t, \mu), \qquad y(t) = 0,$$

$$x^{(m+1)}(t,\mu) = x^{(0)}(t) + \mu \int_t^{\infty} \exp(t-\tau) \left(x^{(m)}(\tau,\mu) \right)^2 d\tau \quad \left(x^{(0)} = \sin t,\ \mu < 0{,}25,\ m = 0,1,2,\ldots \right).$$

В частности, $x^{(1)}(t, \mu) = \sin t + (0{,}5 + 0{,}2 \sin 2t - 0{,}1 \cos 2t)\mu$.

***Пример* 2.** Пусть $a_j \in AP(\mathbf{R})$, $F_j \in AP(D, \mathbf{R})$, $j = 1, 2$, такие, что

$$\operatorname{Mod}(a_1, a_2) \bigcap \operatorname{Mod}(F_1, F_2) = \{0\}.$$

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = x + a_1(t) y - a_1(t) + \mu F_1(t, x, y),$$

$$\dot{y} = a_2(t) y - a_2(t) + \mu (y-1)^k F_2(t, x, y),$$

где $\hat{a}_2 \neq 0$, $k \in \mathbf{N}$, функции F_1, F_2 липшицевы по x, y в некоторой области D''. Данная система имеет нерегулярное по отношению к частотному модулю ее линейного приближения почти периодическое решение, которое можно построить методом последовательных приближений

$$x(t, \mu) = \lim_{m \to \infty} x^{(m)}(t, \mu), \qquad \operatorname{Mod}(x) = \operatorname{Mod}(F_1), \quad y(t) = 1,$$

$$x^{(m+1)}(t,\mu) = \mu \int_t^{\infty} \exp(t-\tau) F_1\left(\tau, x^{(m)}(\tau,\mu), 1\right) d\tau, \quad x^{(0)} = 0, \ m = 0, 1, 2, \ldots .$$

1. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. – М.: Мир, 1966. – 230 с.
2. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания. – М.: Наука, 1970. – 352 с.
3. *Fink A. M.* Almost periodic differential equations // Lect. Notes Math. – 1974. – **377**. – 336 p.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 248 с.
5. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
6. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
7. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1990. – 96 с.
8. *Бирюк Г. И.* Об одной теореме существования почти периодических решений некоторых систем нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Докл. АН СССР. – 1954. – **97**, № 4. – С. 577–579.

9. *Бибиков Ю. Н.* О существовании квазипериодических решений квазилинейных систем // Прикл. математика и механика. – 1995. – **59**, вып. 1. – С. 21 – 29.
10. *Чуйко С. М.* Почти-периодические решения слабонелинейных систем в критических случаях //Докл. РАН. – 1998. – **359**, № 3. – С. 316 – 318.
11. *Massera J. L.* Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales // Bol. Fac. Ing. – 1950. – **4**, № 1. – P. 37 – 45.
12. *Курцвейль Я., Вейвода О.* О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Чехосл. мат. журн. – 1955. – **5**, № 3. – С. 362 – 370.
13. *Деменчук А. К.* О почти периодических решениях обыкновенных дифференциальных систем // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1987. – № 4. – С. 16 – 22.
14. *Еругин Н. П.* О периодических решениях линейной однородной системы дифференциальных уравнений // Докл. АН БССР. – 1962. – **6**, № 7. – С. 407 – 410.
15. *Грудо Э. И., Деменчук А. К.* О периодических решениях с несоизмеримыми периодами линейных неоднородных периодических дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 3. – С. 409 – 416.
16. *Деменчук А. К.* О квазипериодических решениях дифференциальных систем с линейной независимостью над Q частотных базисов решения и правой части // Там же. – 1991. – **27**, № 10. – С. 1673 – 1679.
17. *Деменчук А. К.* Об одном классе квазипериодических решений дифференциальных систем // Докл. АН Беларуси. – 1992. – **36**, № 1. – С. 14 – 17.
18. *Demenchuk A. K.* Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems // Math. Bohemica. – 2001. – **126**, № 1. – P. 221 – 228.
19. *Деменчук А. К.* О почти периодических слабо нерегулярных решениях обыкновенных нелинейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 2002. – **38**, № 8. – С. 1125 – 1127.
20. *Деменчук А. К.* О существовании частично нерегулярных почти периодических решений линейных дифференциальных систем в критическом случае // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2003. – № 2. – С. 11 – 16.

Получено 15.03.2004