УДК 530.1

Аг. Х. Ханмамедов (Бакин. ун-т, Азербайджан)

БЫСТРОУБЫВАЮЩЕЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

By using the method of inverse scattering problem, we investigate an initial boundary-value problem with zero boundary condition for the Toda lattice. We prove the existence and uniqueness of a rapidly decreasing solution. We determine a class of initial data which guarantees the existence of rapidly decreasing solution.

Методом оберненої задачі розсіяння досліджується початково-крайова задача з нульовою крайовою умовою для ланцюжка Тоди. Доведено існування та єдиність швидкоспадного розв'язку. Вказано клас початкових даних, який забезпечує існування швидкоспадного розв'язку.

Введение. Для последовательностей $a_n = a_n(t) > 0$, $b_n = b_n(t)$, $n \geq 1$, вещественнозначных функций $a_n, b_n \in C^{(1)}[0, \infty)$ рассмотрим начально-краевую задачу для цепочки Тоды

$$\begin{aligned} \dot{a}_n &= \frac{1}{2} a_n (b_n - b_{n+1}), \quad &\cdot = \frac{d}{dt}, \\ \dot{b}_n &= a_{n-1}^2 - a_n^2, &n = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

$$a_n(0) = \hat{a}_n, \quad b_n(0) = \hat{b}_n, \tag{2}$$

$$a_0 = 0. \tag{3}$$

В работе [1] предложен способ интегрирования задачи (1) – (3), основывающийся на обратной задаче по спектральной функции. Там же установлено существование решения в классе ограниченных локально равномерно по t последовательностей a_n, b_n. С другой стороны, в работах [2, 3] методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) получена схема построения быстроубывающего решения задачи Коши для цепочки Тоды, а в работе [4] установлены формулы для нахождения быстроубывающего решения некоторой начально-краевой задачи для ленгмюровской цепочки. Однако в этих работах предполагается, что быстроубывающие решения существуют и начальные данные убывают достаточно быстро. Вместе с тем вопрос существования быстроубывающего решения остался открытым.

Решение $a_n(t)$, $b_n(t)$ задачи (1) – (3) назовем быстроубывающим, если $a_n(t) - 1$ и b_n — быстроубывающие функции, т. е. удовлетворяют условию

$$\sup_{0 \leq t \leq T} Q_1(t) < \infty, \quad \text{где} \quad Q_r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^r \left(|a_n(t) - 1| + |b_n(t)| \right), \quad r = 1 \ (\text{или } r = 3).$$

В настоящей работе с помощью МОЗР доказано существование быстроубывающего решения задачи (1) – (3). Кроме того, указан более широкий класс начальных данных, обеспечивающих существование такого решения. Рассмотрение начально-краевой задачи связано с тем, что с помощью МОЗР в общем случае начально-краевую задачу для нелинейных уравнений не удается решить столь же эффективно, как задачу Коши (см. [1, 5]).

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Быстроубывающее решение задачи* (1) – (3) *существует и единственно, если начальные данные удовлетворяют условию* $Q_3(0) < \infty$.

1. Предварительные сведения. В этом пункте мы сформулируем некоторые вспомогательные факты, многие из которых содержатся в [6]. Рассмотрим граничную задачу

$$\hat{a}_{n-1} y_{n-1} + \hat{b}_n y_n + \hat{a}_n y_{n+1} = \lambda y_n, \qquad \hat{a}_0 = 1, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

$$y_0 = 0, \tag{5}$$

где предполагается, что $Q_1(0) < \infty$. В уравнении (4) положим $\lambda = 2\cos z$, $z = \xi + i\tau$. При $\operatorname{Im} z \geq 0$ определим решения $f_n(z)$ типа Йоста уравнения (4), положив $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) e^{-inz} = 1$. Такое решение существует и определяется однозначно. Справедливо [6] представление через оператор преобразования

$$f_n(z) = \alpha_n e^{inz} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz} \right), \tag{6}$$

причем

$$\alpha_n = 1 + o(1), \quad n \to \infty, \qquad A_{nm} = O\left(\sum_{k=n+[m/2]}^{\infty} \left(|\hat{a}_k - 1| + |\hat{b}_k| \right) \right), \quad n + m \to \infty,$$

где $[x]$ — целая часть x.

Величины α_n, A_{nm} и коэффициенты $\hat{a}_n$, $\hat{b}_n$ уравнения (4) связаны соотношениями

$$\hat{b}_n = A_{n1} - A_{n-1,1}, \quad \hat{a}_n = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}, \quad \hat{a}_n^2 = 1 + A_{n2} - A_{n-1,2} - \hat{b}_n A_{n1}, \tag{7}$$

$$\hat{a}_n^2 A_{n+1,m} - A_{nm} + \hat{b}_n A_{n,m+1} + A_{n-1,m+2} - A_{n,m+2} = 0. \tag{8}$$

Через $\varphi_n = \varphi_n(z)$ обозначим решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 1$. Тогда [6] верно соотношение

$$-2i \sin\xi\, \varphi_n(\xi) = f_0(\xi) f_n(-\xi) - f_0(-\xi) f_n(\xi), \quad \xi \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{9}$$

Функция $f_0(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$ и там в полуполосе

$$\Pi = \{ z = \xi + i\tau \colon -\pi/2 \leq \xi \leq 3\pi/2, \ \tau > 0 \}$$

может иметь только конечное число простых нулей в точках $z_k = i\tau_k$, $k = 1, \ldots, N_1$, $z_k = \pi + i\tau_k$, $k = N_1 + 1, \ldots, N$ (см. [6]). Граничная задача (4), (5) порождает в пространстве $l_2(1, \infty)$ ограниченный самосопряженный оператор $\hat{L}$. При этом собственные значения оператора $\hat{L}$ являются простыми и совпадают с точками $\lambda_j = 2\cos z_j$, $j = 1, \ldots, N$.

Введем обозначения

$$S(\xi) = \frac{f_0(-\xi)}{f_0(\xi)}, \qquad M_j^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(z_j), \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Как показано в [6], векторы $\{u_n(\xi)\}_1^{\infty}$, $\{u_n(z_j)\}_1^{\infty}$, определенные по формулам

$$u_n(\xi) = f_n(-\xi) - S(\xi) f_n(\xi), \qquad 0 \leq \xi \leq \pi,$$

$$u_n(z_j) = M_j f_n(z_j), \qquad j = 1, \ldots, N,$$

образуют полный набор нормированных собственных векторов оператора $\hat{L}$, т. е. имеет место формула

$$\sum_{j=1}^{N} u_n(z_j)u_m(z_j) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} u_n(\xi)\overline{u_m(\xi)}d\xi = \delta_{nm}, \tag{10}$$

где δ_{nm} — символ Кронекера.

Набор величин $\{S(\xi);\ z_j;\ M_j > 0,\ j = 1,\ldots,N\}$ назовем данными рассеяния для задачи (4), (5). В [6] установлены характеристические свойства данных рассеяния, позволяющие по ним восстановить коэффициенты $\hat{a}_n$, $\hat{b}_n$ уравнения (4). Положим

$$F_n = \sum_{j=1}^{N} M_j^2 e^{inz_j} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(\xi)e^{in\xi}d\xi. \tag{11}$$

Справедливо следующее утверждение (см. [6]).

Утверждение 1. *Для того чтобы набор величин был данными рассеяния для некоторой задачи вида* (4), (5) *с конечным первым моментом* $Q_1(0) < \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

а) *функция* $S(\xi)$ *непрерывна на вещественной оси и*

$$S(\xi + 2\pi) = S(\xi), \qquad \overline{S(\xi)} = S(-\xi) = S^{-1}(\xi);$$

б) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} m|F_{m+2} - F_m| < \infty;$

в) *изменение аргумента функции* $S(\xi)$ *связано с числом* N *формулой*

$$N = \frac{\ln S(+0) - \ln S(\pi - 0)}{2\pi i} - \frac{2 - S(0) - S(\pi)}{4}.$$

При выполнении условий этого утверждения обратная задача рассеяния решается следующим образом. Сначала по данным рассеяния построим величину F_n по формуле (11). Тогда коэффициенты $\hat{a}_n$, $\hat{b}_n$ восстанавливаются по любым из формул (7), где величины A_{nm} и α_n находятся из соотношений

$$F_{2n+m} + A_{nm} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}F_{2n+m+k} = 0, \quad n \ge 0, \quad m \ge 1, \tag{12}$$

$$\alpha_n^{-2} = 1 + F_{2n} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}F_{2n+k}, \tag{13}$$

первое из которых имеет единственное решение в $l_p(1,\infty)$, $p = 1, 2$, относительно A_{nm}.

Уравнение (12) называется основным уравнением типа Марченко. Оно играет центральную роль при исследовании обратной задачи и дает возможность получить некоторые оценки относительно A_{nm}. Действительно, из условия б) утверждения 1 следует, что уравнение (12) порождается вполне непрерывным оператором в $l_1(1,\infty)$, т. е. оператор $\mathcal{F}_{(n)}$, действующий по формуле $(\mathcal{F}_{(n)}y)_m = \sum_{k=1}^{\infty} F_{2n+m+k}y_k$, вполне непрерывен в $l_1(1,\infty)$. Поскольку уравнение (12) при каждом n имеет единственное решение в $l_1(1,\infty)$, оператор $I + \mathcal{F}_{(n)}$ для каждого n имеет ограниченный обратный. Легко видеть, что этот обратный оператор ограничен в $l_1(1,\infty)$ по норме равномерно относительно n. Тогда, переписав основное уравнение (12) и уравнение

$$(A_{nm} - A_{n-1,m}) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{nk} - A_{n-1,k}) F_{2(n-1)+m+k} =$$

$$= (F_{2(n-1)+m} - F_{2n+m}) + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} (F_{2(n-1)+m+k} - F_{2n+m+k})$$

в виде операторных уравнений и воспользовавшись равномерной ограниченностью семейства операторов $(I + \mathcal{F}_{(n)})^{-1}$, а также условием б), получим оценки

$$\begin{gathered} |A_{nm}| \le C\sigma(2n+m), \\ \left|(A_{nm} - A_{n-1,m}) + (F_{2n+m} - F_{2(n-1)+m})\right| \le C\sigma(2n-1)\sigma(m+2n-1), \end{gathered} \tag{14}$$

где

$$\sigma(n) = \sum_{k=n}^{\infty} |F_{k+2} - F_k|.$$

2. Преобразования данных рассеяния. Предположим, что в уравнении (4) стоят коэффициенты $a_n(t)$, $b_n(t)$, $n \ge 1$, являющиеся быстроубывающим решением задачи (1) – (3). Тогда справедливо соотношение (9), где функции $\varphi_n(\xi)$, $f_n(\xi)$ уже зависят от $t: \varphi_n = \varphi_n(\xi, t)$, $f_n = f_n(\xi, t)$.

Лемма 1. *Если в уравнении* (4) *с коэффициентами* $a_n = a_n(t)$, $b_n = b_n(t)$, $n \ge 1$, *последние являются быстроубывающим решением задачи* (1) – (3), *то эволюция данных рассеяния описывается формулами*

$$\begin{gathered} S(\xi, t) = S(\xi, 0) e^{-2it\sin\xi}, \quad z_k(t) = z_k(0), \quad M_k^2(t) = M_k^2(0) e^{-2it\sin z_k}, \\ k = 1, \ldots, N. \end{gathered} \tag{15}$$

Доказательство. Введем, как обычно, [1], операторы L и A, положив

$$(Ly)_1 = b_1(t) y_1 + a_1(t) y_2, \quad (Ly)_n = a_{n-1}(t) y_{n-1} + b_n(t) y_n + a_n(t) y_{n+1},$$

$$(Ay)_1 = -\frac{1}{2} a_1(t) y_2, \quad (Ay)_n = \frac{1}{2} a_{n-1}(t) y_{n-1} - \frac{1}{2} a_n(t) y_{n+1}, \quad n \ge 2.$$

Операторы L и A образуют [1] пару Лакса, и система уравнений (1) с учетом граничного условия (3) эквивалентна операторному уравнению

$$\dot{L} = AL - LA, \tag{16}$$

где точка означает дифференцирование по t. Заметим, что операторы L и A являются соответственно симметрическим и кососимметрическим в $l_2(1, \infty)$: $L^* = L$, $A^* = -A$.

Из (16) и равенства $\dot{L}\psi + L\dot{\psi} = \lambda\dot{\psi}$ следует, что оператор $M = \dfrac{d}{dt} - A$ переводит решения уравнения $L\psi = \lambda\psi$ в решения этого же уравнения. Рассмотрим равенство (9). Очевидно, что $\varphi = \{\varphi_n(\xi, t)\}_{n=1}^{\infty}$ является решением уравнения $L\varphi = \lambda\varphi$, где $\lambda = 2\cos\xi$. С другой стороны, $(M\varphi)_1 = a_1\varphi_2/2 = (\lambda - b_1)/2$, откуда следует $M\varphi = (\lambda - b_1)\varphi/2$. Кроме того, используя (9), при $n \to \infty$ находим

$$\begin{gathered} M[-2i\sin\xi\varphi_n(t, \xi)] = \left(\dot{f}_0(\xi, t) - i\sin\xi f_0(\xi, t)\right) e^{-in\xi} - \\ - \left(\dot{f}_0(-\xi, t) + i\sin\xi f_0(-\xi, t)\right) e^{in\xi} + o(1). \end{gathered}$$

Однако уравнение $L\psi = \lambda\psi$ имеет единственное решение с такой асимптотикой.

Следовательно,

$$M[-2i\sin\xi\varphi_n(t,\xi)] = \left[\dot{f}_0(\xi,t) - i\sin\xi f_0(\xi,t)\right]f_n(-\xi,t) -$$
$$- \left[\dot{f}_0(-\xi,t) + i\sin\xi f_0(-\xi,t)\right]f_n(\xi,t).$$

Сопоставляя это тождество с (9) и равенством

$$M[\varphi_n(\xi,t)] = \frac{\lambda - b_1}{2}\varphi_n(\xi,t), \qquad \lambda = 2\cos\xi,$$

получаем уравнения

$$\dot{f}_0(\xi,t) - i\sin\xi f_0(\xi,t) = \frac{\lambda - b_1}{2} f_0(\xi,t),$$
$$\dot{f}_0(-\xi,t) + i\sin\xi f_0(-\xi,t) = \frac{\lambda - b_1}{2} f_0(-\xi,t),$$

из которых следует первое из соотношений (15). Кроме того, в силу предпоследнего уравнения имеем

$$f_0(z,t) = f_0(z,0)\exp\left\{(i\sin z + \cos z)t - \frac{1}{2}\int_0^t b_1(\tau)d\tau\right\}, \qquad \operatorname{Im} z \ge 0.$$

Согласно последнему тождеству нули $z_k(t)$ функции $f_0(z,t)$ от t не зависят: $z_k(t) = z_k(0)$.

Рассмотрим теперь нормированную собственную функцию $u^{(k)}(t) = \{u_n(z_k,t)\}_{n=1}^{\infty}$ оператора L. Поскольку собственные значения этого оператора являются простыми, то

$$\dot{u}^{(k)}(t) - Au^{(k)}(t) = Cu^{(k)}(t).$$

Умножив обе части последнего равенства скалярно в $l_2(1,\infty)$ на $u^{(k)}(t)$ и воспользовавшись тем, что $u^{(k)}(t)$ — нормированная собственная функция, а A — кососимметрический оператор, получим $C = 0$. Следовательно, $Mu^{(k)}(t) = 0$. С другой стороны, при $n \to \infty$

$$\left(Mu^{(k)}(t)\right)_n = \left[\dot{M}_k(t) + i\sin z_k M_k(t)\right]e^{inz_k} + o(e^{inz_k}).$$

Поэтому $\dot{M}_k(t) + i\sin z_k M_k(t) = 0$, откуда и следует справедливость третьего тождества из (15).

Лемма доказана.

Формулы (15) позволяют найти быстроубывающее решение задачи (1) – (3). Для этого нужно найти данные рассеяния при $t = 0$, затем построить функцию $F_n(t)$ по формуле (11), в которой вместо $S(\xi, 0)$, $M_k^2(0)$ следует использовать (15). Далее следует решить уравнение (11) с параметром t относительно $A_{nm}(t)$ и найти $a_n(t)$, $b_n(t)$ по формулам (7).

В описанной схеме построения быстроубывающего решения задачи (1) – (3) предполагается, что такое решение существует. От последнего предположения можно избавиться, убедившись, что построенные указанным выше способом функции $a_n(t)$, $b_n(t)$ действительно удовлетворяют соотношениям (1), (3).

Как отмечалось выше, если $a_n(t)$, $b_n(t)$ — быстроубывающее решение задачи (1) – (3), то оператор M переводит решения уравнения $L\psi = \lambda\psi$ в решения этого же уравненния. Наоборот, если $a_n(t)$, $b_n(t)$ и их первые производные по t быстро убывают и оператор M переводит любое решение ψ уравнения $L\psi = \lambda\psi$ в какое-то решение этого же уравнения, то $(\dot{L} - AL + LA)\psi = 0$. Тогда в силу (10) получим (16). Согласно (10) быстроубывающие функции $a_n(t)$, $b_n(t)$ с быстроубывающими производными $\dot{a}_n$, $\dot{b}_n$ являются решением задачи (1), (3) в том и только в том случае, когда $M[u_n(\xi, t)]$, $M[u_n(z_j, t)]$, $j = 1, \ldots, N$, являются решениями уравнения $L\psi = \lambda\psi$. Поскольку $u_0(\xi, t) \equiv 0$, $u_0(z_j, t) \equiv \equiv 0$, то

$$M[u_n(\xi, t)] = \hat{M}[u_n(\xi, t)], \qquad M[u_n(z_j, t)] = \hat{M}[u_n(z_j, t)],$$

где оператор $\hat{M}$ действует по формуле

$$(\hat{M}y)_n = \dot{y}_n + \frac{1}{2}a_n y_{n+1} - \frac{1}{2}a_{n-1}y_{n-1}, \qquad n \geq 1.$$

С другой стороны, выражения $\hat{M}[u_n(\xi, t)]$, $\hat{M}[u_n(z_j, t)]$, $j = 1, \ldots, N$, заведомо являются решениями уравнения $L\psi = \lambda\psi$, если $\hat{M}[f_n(z, t)]$ при $\operatorname{Im} z \geq \geq 0$ служит решением уравнения (4), коэффициентами которого являются $a_n(t)$, $b_n(t)$, $n \geq 1$.

Замечая, что $\hat{M}[f_n(z, t)]$ при $n \to \infty$ имеет асимптотику

$$\hat{M}[f_n(z, t)] = 2i\sin z\, e^{inz} + o(e^{inz}), \qquad \operatorname{Im} z \geq 0,$$

получаем

$$\hat{M}[f_n(z, t)] = 2i\sin z\, f_n(z, t), \tag{17}$$

так как решение уравнения (4) с такой асимптотикой единственно.

Таким образом, если функции $a_n(t)$, $b_n(t)$ и их первые производные по t быстро убывают и верно равенство (17), то $a_n(t)$, $b_n(t)$ — быстроубывающее решение задачи (1), (3).

Рассмотрим теперь соотношения (11), (15). Из этих соотношений следует, что функция $F_n(t)$ непрерывно дифференцируема по t и

$$\dot{F}_n(t) = F_{n-1}(t) - F_{n+1}(t). \tag{18}$$

В пространстве $l_1(1, \infty)$ определяем оператор $\mathcal{F}_{(n)}(t)$, полагая

$$\left(\mathcal{F}_{(n)}(t)\, y\right)_m = \sum_{k=1}^{\infty} F_{2n+m+k}(t)\, y_k.$$

Норма оператора $\mathcal{F}_{(n)}(t)$ в пространстве $l_1(1, \infty)$ оценивается неравенствами

$$\left\| \mathcal{F}_{(n)}(t) \right\| \leq \sup_{m \geq 1} \sum_{k=1}^{\infty} |F_{2n+m+k}(t)| \leq \sum_{s=2n+2}^{\infty} |F_s(t)|. \tag{19}$$

Если $Q_3(0) < 0$, то функция $S(\xi, 0)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеет непрерывную производную второго порядка. Тогда, подставляя (15) в формулу (11), интегрируя по частям и используя (19), находим, что оператор $\mathcal{F}_{(n)}(t)$ непрерывен по норме на каждом конечном отрезке $[0, T]$. В той же формуле интегрируя дважды по частям, имеем

$$\sup_{0 \le t \le T} \sum_{n=1}^{\infty} \left| F_{n+2}(t) - F_n(t) \right| < \infty. \tag{20}$$

Однако при условии (20) для любого n оператор $I + \mathcal{F}_{(n)}(t)$ имеет при всех $t \in [0, T]$ ограниченный обратный $(I + \mathcal{F}_{(n)}(t))^{-1}$. Поскольку оператор $I + \mathcal{F}_{(n)}(t)$ непрерывен по норме на $[0, T]$, этот обратный также непрерывен [7, с. 12, 13] по норме на $[0, T]$ и, в частности, равномерно ограничен на $[0, T]$. Кроме того, в силу (18), (20) оператор $I + \mathcal{F}_{(n)}(t)$ сильно непрерывно дифференцируем. Тогда [7, с. 12, 13] оператор $(I + \mathcal{F}_{(n)}(t))^{-1}$ также сильно непрерывно дифференцируем и справедлива формула

$$[(I + \mathcal{F}_{(n)}(t))^{-1}]'_t = -(I + \mathcal{F}_{(n)}(t))^{-1}[\mathcal{F}_{(n)}(t)]'_t (I + \mathcal{F}_{(n)}(t))^{-1}. \tag{21}$$

Заметим, что обратный оператор $(I + \mathcal{F}_{(n)}(t))^{-1}$ ограничен в $l_1(1, \infty)$ по норме равномерно относительно n, $n \ge 0$, и t, $t \in [0, T]$. Действительно, в силу (19), (20) при $n > n_0$ имеем

$$\sup_{0 \le t \le T} \left\| \mathcal{F}_{(n)}(t) \right\| \le \sup_{0 \le t \le T} \sum_{s=2n+2}^{\infty} \left| \mathcal{F}_s(t) \right| < \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\left\| (I + \mathcal{F}_{(n)}(t))^{-1} \right\| \le \left(1 - \left\| \mathcal{F}_{(n)}(t) \right\| \right)^{-1} < 2 \quad \text{при} \quad n > n_0.$$

Остается конечное число операторов $(I + \mathcal{F}_{(n)}(t))^{-1}$, $0 \le n \le n_0$, каждый из которых равномерно ограничен на $[0, T]$.

С другой стороны, при выполнении неравенства (20) уравнение (12) при каждом n однозначно разрешимо в $l_1(1, +\infty)$. При этом решение $A_{nm}(t)$ и, согласно (21), его производная по t удовлетворяют неравенствам, аналогичным (14), а сами равенства (12), (13) можно дифференцировать по t.

3. Доказательство теоремы. Пусть $Q_3(0) < \infty$. Определим функции $a_n = a_n(t)$, $b_n = b_n(t)$ по формулам

$$b_n = A_{n1} - A_{n-1,1}, \qquad a_n^2 = 1 + A_{n2} - A_{n-1,2} - b_n A_{n1},$$

где A_{nm} — решение уравнения (12). Из результатов предыдущего пункта следует, что функции a_n, b_n, $\dot{a}_n$, $\dot{b}_n$ являются быстроубывающими. Для доказательства теоремы покажем, что если $Q_3(0) < \infty$, то решение $A_{nm}(t)$ уравнения (12) удовлетворяет равенству

$$\dot{A}_{nm} + (A_{n,m+1} - A_{n-1,m+1}) - b_n A_{nm} = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

а величина α_n, определяемая по формуле (13), — соотношению

$$\dot{\alpha}_n = -\frac{1}{2} b_n \alpha_n. \tag{23}$$

Согласно результатам п. 2, к обеим частям равенства (12) можно применить оператор $\hat{M}_1$, действующий по формуле

$$(\hat{M}_1 h)_{nm} = \dot{h}_{nm} + (h_{n,m+1} - h_{n-1,m+1}) - b_n h_{nm}.$$

Тогда получим

$$\dot{F}_{2n+m} + (F_{2n+m+1} - F_{2(n-1)+m+1}) - b_n F_{2n+m} + (M_2 A)_{nm} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_{nk} F_{2n+m+k} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \dot{F}_{2n+m+k} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} F_{2n+m+1+k} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} A_{n-1,k} F_{2(n-1)+m+1+k} - b_n \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} F_{2n+m+k} = 0.$$

Из (18) следует

$$\dot{F}_{2n+m} + (F_{2n+m+1} - F_{2(n-1)+m+1}) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \dot{F}_{2n+m+k} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} F_{2n+m+1+k} - \sum_{k=1}^{\infty} A_{n-1,k} F_{2(n-1)+m+1+k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (A_{nk} - A_{n-1,k}) F_{2n+m+k-1} = (A_{n1} - A_{n-1,1}) F_{2n+m} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (A_{n,k+1} - A_{n-1,k+1}) F_{2n+m+k} =$$

$$= b_n F_{2n+m} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{n,k+1} - A_{n-1,k+1}) F_{2n+m+k}.$$

Следовательно,

$$(\hat{M}_1 A)_{nm} + \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{M}_1 A)_{nk} F_{2n+m+k} = 0.$$

Поскольку это уравнение для $(\hat{M}_1 A)_{nm}$ имеет лишь тривиальное решение, то $(\hat{M}_1 A)_{nm} \equiv 0$, что доказывает справедливость равенства (22).

Докажем теперь равенство (23). Известно, что правая часть равенства (13) положительна (см. [5]). Тогда, дифференцируя равенство (13) по t, получаем

$$\dot{\alpha}_n = -\frac{1}{2} (\alpha_n)^3 p_n,$$

где

$$p_n = \dot{F}_{2n} + \sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_{nk} F_{2n+k} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \dot{F}_{2n+k}.$$

Используя (12), (18) и (22), имеем

$$p_n = \left[F_{2(n-1)+1} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{n-1,k} F_{2(n-1)+1+k} \right] - \left[F_{2n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{n,k} F_{2n+1+k} \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (A_{nk} - A_{n-1,k}) F_{2n+k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_{nk} F_{2n+k} =$$

$$= - A_{n-1,1} + A_{n1} + (A_{n1} - A_{n-1,1}) F_{2n} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (A_{n,k+1} - A_{n-1,k+1}) F_{2n+k} + \sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_{nk} F_{2nk} =$$

$$= b_n + b_n F_{2n} + b_n \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} F_{2n+k} = b_n (\alpha_n)^{-2},$$

что и требовалось доказать.

Завершим доказательство теоремы. В силу (8), (22) имеем

$$\dot{A}_{n1} + \frac{1}{2}(A_{n2} - A_{n-1,2}) - \frac{1}{2} b_n A_{n1} = \frac{1}{2}(1 - a_n^2),$$

$$\dot{A}_{nm} - \frac{1}{2} b_n A_{nm} + \frac{1}{2} a_n^2 A_{n+1,m-1} - \frac{1}{2} A_{n-1,m+1} = \frac{1}{2} A_{n,m-1} - \frac{1}{2} A_{n,m+1}.$$

Записывая теперь в уравнении (17) вместо $f_n(z)$ его представление (6), видим, что последние равенства вместе с (23) эквивалентны уравнению (17). Тем самым существование быстроубывающего решения доказано. Единственность решения следует из однозначной разрешимости обратной задачи*.

Теорема доказана.

1. *Березанский Ю. М.* Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи // Докл. АН СССР. – 1985. – **281**, № 1. – С. 16 – 19.
2. *Flashka H.* On the Toda lattice. Inverse scattering solutions // Progr. Theor. Phys. – 1974. – **51**, № 3. – P. 703 – 716.
3. *Манаков С. В.* О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах // Журн. эксперим. и теор. физики. – 1974. – **67**, № 2. – С. 543 – 555.
4. *Кас М.,van Moerbeke P.* On the explicitly soluble system of nonlinear differential equation related to certain Toda lattices // Adv. Math. – 1975. – **16**, № 2. – P. 160 – 169.
5. *Хабибулин И. Т.* Уравнение КДФ на полуоси с нулевым краевым условием // Теор. и мат. физика. – 1999. – **119**, № 3. – С. 397 – 404.
6. *Гусейнов Г. Ш.* Определение бесконечной матрицы Якоби по данным рассеяния // Докл. АН СССР. – 1976. – **227**, № 6. – С. 1289 – 1292.
7. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967.

Получено 10.06.2004

* Единственность быстроубывающего решения следует также из [1].