УДК 517.911

А. Е. Зернов, О. Р. Чайчук (Южноукр. пед. ун-т, Одесса)

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

We consider the Cauchy singular problem

$$t x'(t) = f\big(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))\big), \qquad x(0) = 0,$$

where $x\colon (0,\tau) \to \mathbb{R}$, $g\colon (0,\tau) \to (0,+\infty)$, $h\colon (0,\tau) \to (0,+\infty)$, $g(t) \le t$, $h(t) \le t$, $t \in (0,\tau)$, for a linear, a perturbed linear, and a nonlinear equations. In each case, we prove that there exists a nonempty set of continuously differentiable solutions $x\colon (0,\rho\,] \to \mathbb{R}$ (ρ is sufficiently small) with required asymptotic properties.

Розглядається сингулярна задача Коші

$$t x'(t) = f\big(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))\big), \qquad x(0) = 0,$$

де $x\colon (0,\tau) \to \mathbb{R}$, $g\colon (0,\tau) \to (0,+\infty)$, $h\colon (0,\tau) \to (0,+\infty)$, $g(t) \le t$, $h(t) \le t$, $t \in (0,\tau)$, для лінійного, збуреного лінійного і нелінійного рівнянь. У кожному випадку доведено, що існує непорожня множина неперервно диференційовних розв'язків $x\colon (0,\rho\,] \to \mathbb{R}$ (ρ достатньо мале) з потрібними асимптотичними властивостями.

Регулярные начальные задачи для функционально-дифференциальных уравнений изучены достаточно подробно [1 – 6]. Столь же подробно исследованы сингулярные начальные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, прежде всего, разрешенных относительно старших производных неизвестных [7 – 9]. Вместе с тем сингулярные краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений изучены сравнительно мало; отметим работы [2, 3, 10 – 16], в которых рассмотрены вопросы существования и числа решений в различных функциональных пространствах. Но асимптотическое поведение решений таких задач в окрестности особой точки практически не исследовалось даже в простых случаях [2, 3, 17]. В предлагаемой работе рассматривается сингулярная задача Коши вида

$$t x'(t) = F\big(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))\big), \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

где $t \in (0, \tau)$ — действительная переменная, $x\colon (0,\tau) \to \mathbb{R}$ — неизвестная функция, $F\colon D \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $D \subset (0,\tau) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $g\colon (0,\tau) \to (0,+\infty)$, $h\colon (0,\tau) \to (0,+\infty)$ — непрерывные функции, $g(t) \le t$, $h(t) \le t$, $t \in (0,\tau)$. Под решением задачи (1), (2) понимается непрерывно дифференцируемая функция $x\colon (0,\rho\,] \to \mathbb{R}$ (ρ — постоянная, $\rho \in (0,\tau)$) со свойствами:

1) $\big(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))\big) \in D$ при всех $t \in (0,\rho\,]$;
2) x тождественно удовлетворяет уравнению (1) при всех $t \in (0,\rho\,]$;
3) $\lim\limits_{t \to +0} x(t) = 0$.

Исследуются последовательно частные случаи: линейное, возмущенное линейное и нелинейное уравнения вида (1). Предлагается единая схема исследования всех этих уравнений. Доказывается существование непустого множества непрерывно дифференцируемых решений с требуемыми асимптотическими свойствами в (малой) правой полуокрестности особой точки $t = 0$. При этом используются методы качественной теории дифференциальных уравнений [7, 18], а также [17, 19, 20].

1. Линейное уравнение. Рассмотрим задачу Коши

$$tx'(t) = a(t) + b_1(t)x(t) + b_2(t)x(g(t)) + b_3(t)tx'(h(t)), \qquad (3)$$
$$x(0) = 0,$$

в предположении, что выполнены *условия A*:

1) $a:(0,\tau)\to\mathbb{R}$, $b_i:(0,\tau)\to\mathbb{R}$, $i\in\{1,2,3\}$, — непрерывные функции, $b_i(t) = b_{i0} + o(1)$, $t\to+0$, b_{i0} — постоянные, $i\in\{1,2,3\}$, $|b_{30}| < 1$;

2) $g:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $\lim\limits_{t\to+0} tg'(t)(g(t))^{-1} = g_0$, $0\le g_0 < +\infty$;

3) для любых точек $t_j\in(0,\tau)$, $j\in\{1,2\}$,

$$|h(t_1) - h(t_2)| \le |t_1 - t_2|; \qquad (4)$$

4) для любых точек t_1, t_2, удовлетворяющих условию $0 < t_* \le t_j < \tau$, $j\in\{1,2\}$, выполнены неравенства

$$|a(t_1) - a(t_2)| \le l_0(t_*)|t_1 - t_2|, \qquad |b_i(t_1) - b_i(t_2)| \le l_0(t_*)|t_1 - t_2|, \quad i\in\{1,2,3\},$$

где $l_0:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ — непрерывная невозрастающая функция;

5) пусть существует непрерывно дифференцируемая функция $\xi:(0,\tau)\to\mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям

$$t\xi'(t) - a(t) - b_1(t)\xi(t) - b_2(t)\xi(g(t)) - b_3(t)t\xi'(h(t)) = O(t^N\beta(t)), \quad t\to+0, \qquad (5)$$

$$\xi(t) = o(1), \quad t\to+0, \qquad \xi'(t) = c_1 + o(1), \quad t\to+0, \qquad (6)$$

где N — натуральное, c_1 — постоянная, $\beta:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ — непрерывно дифференцируемая неубывающая функция, $\lim\limits_{t\to+0}\beta(t) = 0$.

Сформулируем эффективные достаточные условия существования функции $\xi:(0,\tau)\to\mathbb{R}$ указанного вида:

1) $a(t) = \sum_{k=1}^N a_k t^k + a^*(t)$, $b_i(t) = \sum_{k=0}^N b_{ik}t^k + b_i^*(t)$, $i\in\{1,2,3\}$, $g(t) = \sum_{k=1}^N g_k t^k + g^*(t)$, $h(t) = \sum_{k=1}^N h_k t^k + h^*(t)$, где a_k, b_{ik}, g_k, h_k — постоянные, $a^*(t) = O(t^N\beta(t))$, $b_i^*(t) = o(t^N)$, $g^*(t) = o(t^N)$, $h^*(t) = o(t^N)$, $t\to+0$;

2) $b_{10} + b_{20}g_1^k + kb_{30}h_1^{k-1} \ne k$, $k\in\{1,\ldots,N\}$;

3) $t = O(\beta(t))$, $t\to+0$.

Действительно, при выполнении указанных условий положим

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^N c_k t^k, \qquad (7)$$

где $c_1,\ldots,c_N$ — постоянные коэффициенты. Будем искать их так, чтобы выполнялось условие (5). Если подставить функцию (7) в левую часть равенства (5) и потребовать, чтобы в полученной сумме все коэффициенты при t^k, $k\in\{1,\ldots,N\}$, были равны нулю, то будем иметь систему равенств

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + b_{10}c_1 + b_{20}g_1c_1 + b_{30}c_1,\\ kc_k &= a_k + b_{10}c_k + b_{20}g_1^kc_k + kb_{30}h_1^{k-1}c_k + \varphi_k(c_1,\ldots,c_{k-1}), \quad k\in\{2,\ldots,N\}, \end{aligned} \qquad (8)$$

где φ_k, $k\in\{2,\ldots,N\}$, — известные многочлены. Отсюда последовательно (и единственным образом) определяются все коэффициенты c_k, $k \in \{1, \ldots, N\}$. Очевидно, для найденной функции (7) выполнены и условия (5), (6).

Обозначим через $U_1(\rho, M, q)$ множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u: (0, \rho] \to \mathbb{R}$, каждая из которых удовлетворяет условиям

$$|u(t) - \xi(t)| \le M t^N \beta(t),$$
$$|u'(t) - \xi'(t)| \le qMt^{N-1}\beta(t), \tag{9}$$
$$t \in (0, \rho];$$

здесь ρ, M, q — положительные постоянные, $\rho < \tau$.

Назовем *условиями* В совокупность следующих условий:

1) $\lim\limits_{t \to +0} t\beta'(t)(\beta(t))^{-1} = \beta_0$, $0 \le \beta_0 < +\infty$;

2) $b_{10} \ne N + \beta_0$;

3) $|b_{20}| + |b_{10}||b_{30}| < |b_{10} - N - \beta_0|(1 - |b_{30}|)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* А, В. *Тогда существуют* ρ, M, q *такие, что*:

1) *если* $b_{10} > N + \beta_0$, *то задача* (3) *имеет бесконечное множество решений* $x: (0, \rho] \to \mathbb{R}$, *каждое из которых принадлежит множеству* $U_1(\rho, M, q)$. *При любом выборе постоянной* α, *удовлетворяющей неравенству* $|\alpha - \xi(\rho)| < M\rho^N \beta(\rho)$, *найдется решение* $x_\alpha \in U_1(\rho, M, q)$ *такое, что* $x_\alpha(\rho) = \alpha$;

2) *если* $b_{10} < N + \beta_0$, *то задача* (3) *имеет непустое множество решений* $x: (0, \rho] \to \mathbb{R}$, *каждое из которых принадлежит множеству* $U_1(\rho, M, q)$.

Доказательство. Выберем постоянные M, q так, чтобы выполнялись условия

$$|b_{10}| + |b_{10} - N - \beta_0| < q < (|b_{10} - N - \beta_0| - |b_{20}|)|b_{30}|^{-1}, \quad \text{если} \quad b_{30} \ne 0,$$
$$|b_{10}| + |b_{10} - N - \beta_0| < q, \quad \text{если} \quad b_{30} = 0,$$
$$M > K(|b_{10} - N - \beta_0| - |b_{20}| - |b_{30}|q)^{-1}.$$

Здесь постоянная K выбрана так, чтобы

$$|t\xi'(t) - a(t) - b_1(t)\xi(t) - b_2(t)\xi(g(t)) - b_3(t)t\xi'(h(t))|(t^N\beta(t))^{-1} \le K, \quad t \in (0, \tau).$$

Неравенства, определяющие выбор ρ, здесь не приведены ввиду ограниченности объема статьи; отметим лишь, что ρ достаточно мало.

Пусть B — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x: [0, \rho] \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|x\|_B = \max_{t \in [0, \rho]} (|x(t)| + |x'(t)|). \tag{10}$$

Обозначим через U подмножество B, каждый элемент $u: [0, \rho] \to \mathbb{R}$ которого удовлетворяет условиям (9), причем $u(0) = 0$, $u'(0) = c_1$ и, кроме того,

$$\forall u \in U \ \forall \varepsilon > 0 \ \forall t_i \in [0, \rho], \quad i \in \{1, 2\}: |t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow |u'(t_1) - u'(t_2)| \le \varepsilon, \tag{11}$$

где $\delta(\varepsilon) = (1 - |b_{30}|)\varepsilon(8B(t_\varepsilon))^{-1}$. Здесь $B(t_\varepsilon) = 2l_0(t_\varepsilon)t_\varepsilon^{-1} + t_\varepsilon^{-2}$, причем постоянная $t_\varepsilon \in (0, \rho)$ выбрана так, чтобы при $t \in (0, t_\varepsilon]$ одновременно выполнялись неравенства

$$t^{N-1}\beta(t) \le (qM)^{-1}(1 - |b_{30}|)\varepsilon/16, \qquad |\xi'(t) - c_1| \le (1 - |b_{30}|)\varepsilon/16.$$

Множество U замкнуто, выпукло, ограничено и (в соответствии с критерием Арцела) компактно.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x'(t) = t^{-1}\big(a(t) + b_1(t)x(t) + b_2(t)u(g(t)) + b_3(t)tu'(h(t))\big), \tag{12}$$

где $u \in U$ — произвольная фиксированная функция. Пусть $D_0 = \big\{(t, x)\colon t \in (0, \rho],\ x \in \mathbb{R}\big\}$. Если $(t, x) \in D_0$, то для уравнения (12) выполнены условия теоремы существования и единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных. Далее проводим рассуждения по схеме, предложенной в [17, 20] одним из авторов; для удобства ссылок здесь сохраняется терминология и обозначения, введенные в [17, 20]. Обозначим

$$\Phi_1 = \big\{(t, x)\colon t \in (0, \rho],\ |x - \xi(t)| = Mt^N\beta(t)\big\},$$

$$D_1 = \big\{(t, x)\colon t \in (0, \rho],\ |x - \xi(t)| < Mt^N\beta(t)\big\},$$

$$H = \big\{(t, x)\colon t = \rho,\ |x - \xi(\rho)| < M\rho^N\beta(\rho)\big\}.$$

Пусть вспомогательная функция $A_1 : D_0 \to [0, +\infty)$ определяется равенством

$$A_1(t, x) = (x - \xi(t))^2 (t^N\beta(t))^{-2}.$$

Нетрудно убедиться в том, что при $(t, x) \in \Phi_1$ производная этой функции в силу уравнения (12) имеет тот же знак, что и разность $b_{10} - (N + \beta_0)$. Поэтому если $b_{10} > N + \beta_0$, то каждая из интегральных кривых уравнения (12), пересекших H, определена при $t \in (0, \rho]$ и лежит в D_1 при всех $t \in (0, \rho]$. Выберем и зафиксируем любую точку $G(\rho, \alpha) \in H$ и обозначим через J_u: $(t, x_u(t))$ интегральную кривую уравнения (12), проходящую через точку G. Легко видеть, что если положить по определению $x_u(0) = 0$, $x'_u(0) = c_1$, то $x_u \in U$. Определим оператор $T\colon U \to U$ равенством $Tu = x_u$. Если же $b_{10} < N + \beta_0$, то среди интегральных кривых уравнения (12), пересекших H, найдется хотя бы одна, которая определена при $t \in (0, \rho]$ и лежит в D_1 при всех $t \in (0, \rho]$; обозначим эту интегральную кривую через J_u: $(t, x_u(t))$. Затем доказывается, что уравнение (12) имеет единственную интегральную кривую такого вида. Иными словами, доказывается, что если взять любую точку $(t_0, x_0) \in \overline{D_1} \setminus \{(0, 0)\}$ с условием $x_0 \ne x_u(t_0)$, то та интегральная кривая уравнения (12), которая проходит через точку (t_0, x_0), непременно выйдет из множества $\overline{D_1} \setminus \{(0, 0)\}$ при уменьшении t $(t < t_0)$. С этой целью рассматриваются однопараметрические семейства множеств

$$\Phi_2(\nu) = \big\{(t, x)\colon t \in (0, \rho],\ |x - x_u(t)| = \nu t^N\beta(t)(-\ln t)\big\},$$

$$D_2(\nu) = \big\{(t, x)\colon t \in (0, \rho],\ |x - x_u(t)| < \nu t^N\beta(t)(-\ln t)\big\},$$

где ν — параметр, $\nu \in (0, 1]$, вспомогательная функция $A_2 : D_0 \to [0, +\infty)$, которая определена равенством

$$A_2(t,x) = (x - x_u(t))^2 (t^N \beta(t)(-\ln t))^{-2},$$

и доказывается, что производная этой функции в силу уравнения (12) отрицательна при $(t,x) \in \Phi_2(\nu)$ для любого $\nu \in (0,1]$. При этом если (t,x) — любая точка множества $\overline{D_1} \setminus \{(0,0)\}$, то для любого фиксированного $\nu \in (0,1]$

$$|x - x_u(t)| \le |x - \xi(t)| + |x_u(t) - \xi(t)| \le 2Mt^N \beta(t) < \nu t^N \beta(t)(-\ln t),$$

если только $t \in (0, t(\nu)]$, где постоянная $t(\nu)$ достаточно мала, $t(\nu) \in (0, \rho)$.

Если положить по определению $x_u(0) = 0$, $x_u'(0) = c_1$, то легко видеть, что $x_u \in U$. Определим оператор $T\colon U \to U$ равенством $Tu = x_u$.

Докажем, что оператор $T\colon U \to U$ непрерывен. Пусть $u_i \in U$, $i \in \{1,2\}$, — произвольные фиксированные функции, $\|u_1 - u_2\|_B = d$, $d > 0$. Обозначим $Tu_i = x_i$, $i \in \{1,2\}$. Будем исследовать поведение интегральных кривых дифференциального уравнения

$$x'(t) = t^{-1}\big(a(t) + b_1(t)x(t) + b_2(t)u_1(g(t)) + b_3(t)tu_1'(h(t))\big). \tag{13}$$

Обозначим

$$\Phi_3 = \left\{(t,x) : t \in (0,\rho], \ |x - x_2(t)| = \gamma d^\nu (t^N \beta(t))^{1-\nu}\right\},$$

$$D_3 = \left\{(t,x) : t \in (0,\rho], \ |x - x_2(t)| < \gamma d^\nu (t^N \beta(t))^{1-\nu}\right\},$$

где γ, ν — постоянные, удовлетворяющие условиям

$$0 < \nu < \min\left\{1, \frac{|b_{10} - N - \beta_0|}{3(N + \beta_0)}\right\}, \qquad \gamma > \frac{3(2M)^{1-\nu}(|b_{20}| + 1)}{|b_{10} - N - \beta_0|}.$$

Пусть вспомогательная функция $A_3 : D_0 \to [0, +\infty)$ определяется равенством

$$A_3(t,x) = (x - x_2(t))^2 (t^N \beta(t))^{-2(1-\nu)}.$$

Нетрудно убедиться в том, что при $(t,x) \in \Phi_3$ производная этой функции в силу уравнения (13) имеет тот же знак, что и разность $b_{10} - (N + \beta_0)$. Если $b_{10} > N + \beta_0$, то мы используем равенства $x_1(\rho) = x_2(\rho) = \alpha$, в соответствии с которыми интегральная кривая $J_1 : (t, x_1(t))$ уравнения (13) лежит в D_3 при $t = \rho$. На основании изложенного выше при уменьшении t от $t = \rho$ до $t = 0$ эта интегральная кривая не может иметь общих точек с Φ_3. Поэтому она лежит в D_3 при всех $t \in (0, \rho]$. Если же $b_{10} < N + \beta_0$, то, поскольку

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le |x_1(t) - \xi(t)| + |x_2(t) - \xi(t)| \le 2Mt^N \beta(t) < \gamma d^\nu (t^N \beta(t))^{1-\nu}$$

при $t \in (0, t(d)]$, где постоянная $t(d)$ достаточно мала, $t(d) \in (0, \rho)$, интегральная кривая $J_1 : (t, x_1(t))$ уравнения (13) лежит в D_3 при $t \in (0, t(d)]$. Если t возрастает от $t = t(d)$ до $t = \rho$, то на основании изложенного выше эта интегральная кривая не может иметь общих точек с Φ_3. Поэтому она лежит в D_3 при всех $t \in (0, \rho]$. Итак, в обоих случаях

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le \gamma d^\nu (t^N \beta(t))^{1-\nu}, \qquad t \in (0, \rho],$$

откуда следует, что

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \le t^{-1} d^\nu, \qquad t \in (0, \rho]. \tag{14}$$

Перейдем непосредственно к доказательству непрерывности оператора $T\colon U \to$

$\to U$. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Существует такое $t_\varepsilon \in (0, \rho)$, что $2Mt^N\beta(t) + 2qMt^{N-1}\beta(t) \le \varepsilon/2$ при $t \in (0, t_\varepsilon]$. Если $t \in (0, t_\varepsilon]$, то

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \le$$
$$\le |x_1(t) - \xi(t)| + |x_2(t) - \xi(t)| + |x_1'(t) - \xi'(t)| + |x_2'(t) - \xi'(t)| \le$$
$$\le 2Mt^N\beta(t) + 2qMt^{N-1}\beta(t) \le \varepsilon/2.$$

Если же $t \in [t_\varepsilon, \rho]$, то из (14) следует, что $|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \le t_\varepsilon^{-1}d^\nu$. Если $d < \delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon) = (\varepsilon t_\varepsilon/2)^{1/\nu}$, то $|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \le \varepsilon/2$ при всех $t \in [0, \rho]$. Таким образом, если $\|u_1 - u_2\|_B = d < \delta(\varepsilon)$, то

$$\max_{t\in[0,\rho]}\left(|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)|\right) \le \varepsilon/2,$$

или

$$\|x_1 - x_2\|_B = \|Tu_1 - Tu_2\|_B \le \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Эти рассуждения не зависят ни от выбора функций $u_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$, ни от выбора $\varepsilon > 0$. Непрерывность оператора $T\colon U \to U$ доказана.

Для завершения доказательства теоремы 1 остается применить к оператору $T\colon U \to U$ теорему Шаудера о неподвижной точке.

***Пример* 1.** Рассмотрим задачу Коши

$$tx'(t) = \frac{35}{8}t - x(t) + \frac{1}{4}x\left(\frac{t}{4}\right) - \frac{t}{4}x'\left(\frac{t}{2}\right), \quad x(0) = 0, \tag{15}$$

где $x\colon (0, \tau) \to \mathbb{R}$ — неизвестная функция ($\tau > 0$ — любое фиксированное). Здесь

$$a(t) = a_1 t = \frac{35}{8}t, \quad b_1(t) = b_{10} = -1, \quad b_2(t) = b_{20} = \frac{1}{4}, \quad b_3(t) = b_{30} = -\frac{1}{4},$$
$$g(t) = g_1 t = \frac{1}{4}t, \quad h(t) = h_1 t = \frac{1}{2}t, \quad \beta(t) = t \quad (\text{и потому } \beta_0 = 1).$$

Поскольку в данном случае выполнены указанные выше достаточные условия существования функции $\xi\colon (0, \tau) \to \mathbb{R}$ вида (7) (для любого фиксированного натурального N), из системы равенств (8) последовательно находим $c_1 = 2$, $c_2 = c_3 = \ldots = c_N = 0$. Поэтому $\xi(t) = 2t$. Очевидно, все условия A, B выполнены, причем $b_{10} < N + \beta_0$. Поэтому согласно теореме 1 задача (15) имеет непустое множество решений $x\colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$ таких, что

$$|x(t) - 2t| \le Mt^{N+1}, \quad |x'(t) - 2| \le qMt^N, \quad t \in (0, \rho], \tag{16}$$

где $\rho \in (0, \tau)$, ρ достаточно мало, M, q достаточно велики.

С другой стороны, полагая $\omega(t) = x(t) + \frac{1}{2}x\left(\frac{t}{2}\right)$, получаем задачу Коши

$$t\omega'(t) = \frac{35}{8}t - \omega(t) + \frac{1}{2}\omega\left(\frac{t}{2}\right), \quad \omega(0) = 0,$$

или

$$t(t\omega(t))' = \frac{35}{8}t^2 + \frac{t}{2}\omega\left(\frac{t}{2}\right), \quad \omega(0) = 0.$$

Положив $t\omega(t) = z(t)$, получим задачу Коши

$$tz'(t) = \frac{35}{8}t^2 + z\left(\frac{t}{2}\right), \qquad z(0) = 0.$$

Если искать ее решение в виде степенного ряда $z(t) = e_1 t + e_2 t^2 + e_3 t^3 + \ldots$, то последовательно найдем $e_1 = 0$, $e_2 = \frac{5}{2}$, $e_3 = e_4 = \ldots = 0$. Значит, $z(t) = \frac{5}{2}t^2$. Поэтому $\omega(t) = \frac{5}{2}t$, и для $x(t)$ имеем функциональное уравнение

$$x(t) + \frac{1}{2}x\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{5}{2}t$$

с начальным условием $x(0) = 0$. Если искать решение этой задачи в виде степенного ряда $x(t) = \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \gamma_3 t^3 + \ldots$, то последовательно получим $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = \gamma_3 = \ldots = 0$. Таким образом, задача (15) имеет решение $x(t) = 2t$. Очевидно, для любого фиксированного натурального N это решение удовлетворяет условиям (16).

***Пример* 2.** Рассмотрим задачу Коши

$$tx'(t) = -\frac{8}{5}t + \frac{12}{5}x(t) - \frac{16}{15}x\left(\frac{t}{4}\right) - \frac{t}{3}x'\left(\frac{t}{2}\right), \qquad x(0) = 0, \tag{17}$$

где $x\colon (0, \tau) \to \mathbb{R}$ — неизвестная функция ($\tau > 0$ — любое фиксированное). Здесь

$$a(t) = a_1 t = -\frac{8}{5}t, \;\; b_1(t) = b_{10} = \frac{12}{5}, \;\; b_2(t) = b_{20} = -\frac{16}{15}, \; b_3(t) = b_{30} = -\frac{1}{3},$$

$$g(t) = g_1 t = \frac{1}{4}t, \quad h(t) = h_1 t = \frac{1}{2}t, \quad \beta(t) = t \qquad (\text{и потому } \beta_0 = 1).$$

Хотя указанные выше достаточные условия существования функции $\xi\colon (0, \tau) \to \mathbb{R}$ здесь не выполнены (они не выполнены для $k = 2$), нетрудно убедиться в том, что функция $\xi(t) = 2t + Ct^2$ ($C \in \mathbb{R}$ — любое) удовлетворяет условиям (5) и (6) для любого фиксированного натурального $N \geq 5$. Очевидно, условия A, B выполнены, причем $b_{10} < N + \beta_0$. В соответствии с теоремой 1 для каждого фиксированного значения $C \in \mathbb{R}$ задача (17) имеет непустое множество решений $x\colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\left|x(t) - 2t - Ct^2\right| \leq Mt^{N+1}, \qquad \left|x'(t) - 2 - 2Ct\right| \leq qMt^N, \qquad t \in (0, \rho], \tag{18}$$

где $\rho \in (0, \tau)$ достаточно мало, M, q достаточно велики.

С другой стороны, полагая $\omega(t) = x(t) + \frac{2}{3}x\left(\frac{t}{2}\right)$, получаем задачу Коши

$$t\omega'(t) = -\frac{8t}{5} + \frac{12}{5}\omega(t) - \frac{8}{5}\omega\left(\frac{t}{2}\right), \qquad \omega(0) = 0.$$

Если искать ее решение в виде степенного ряда $\omega(t) = e_1 t + e_2 t^2 + e_3 t^3 + \ldots$, то последовательно найдем

$$e_1 = \frac{8}{3}, \qquad e_2 \in \mathbb{R} \text{ — произвольное}, \qquad e_3 = e_4 = \ldots = 0.$$

Таким образом, $\omega(t) = \frac{8}{3}t + e_2t^2$, $e_2 \in \mathbb{R}$ — любое. Для $x(t)$ имеем функциональное уравнение

$$x(t) + \frac{2}{3}x\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{8}{3}t + e_2t^2 \qquad (e_2 \in \mathbb{R} \text{ — любое})$$

с начальным условием $x(0) = 0$. Будем искать решение этой задачи в виде степенного ряда $x(t) = \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \gamma_3 t^3 + \ldots$ и последовательно найдем

$$\gamma_1 = 2, \quad \gamma_2 = \frac{6}{7}e_2, \quad e_3 = e_4 = \ldots = 0.$$

Значит, задача (17) имеет множество решений вида $x(t) = 2t + Ct^2$, где $C = \frac{6}{7}e_2$, так как $e_2 \in \mathbb{R}$ произвольно, то и $C \in \mathbb{R}$ произвольно. Очевидно, при любых фиксированных $C \in \mathbb{R}$ и N (N натуральное, $N \geq 5$) это решение удовлетворяет условиям (18).

2. Возмущенное линейное уравнение. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{gathered} tx'(t) = at + b_1x(t) + b_2x(g(t)) + \varphi(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), \\ x(0) = 0, \end{gathered} \tag{19}$$

в предположении, что выполнены следующие *условия* C :

1) a, b_1, b_2 — постоянные, $g: (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $g(t) = g_1t + g_*(t)$, $t \in (0, \tau)$, g_1 — постоянная, $b_1 + b_2g_1 \neq 1$, $\lim\limits_{t\to+0} g_*(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+0} tg'(t)(g(t))^{-1} = g_0$, $0 \leq g_0 < +\infty$;

2) для любых точек $t_i \in (0, \tau)$, $i \in \{1, 2\}$, выполнено условие (4);

3) φ: $D \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $D = \{(t, y_1, y_2, y_3, y_4): t \in (0, \tau), |y_1| < r_1t, |y_2| < r_2g(t), |y_3| < r_3, |y_4| < r_4\}$;

4) $|\varphi(t, y_1, y_2, y_3, y_4) - \varphi(s, y_1, y_2, y_3, y_4)| \leq l_0(t_*)|t - s|$ для любых точек $(t, y_1, y_2, y_3, y_4) \in D$, $(s, y_1, y_2, y_3, y_4) \in D$, удовлетворяющих условию $0 < t_* \leq t$, $0 < t_* \leq s$, где $l_0: (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — непрерывная невозрастающая функция;

5) $|\varphi(t, y_1, y_2, y_3, y_4) - \varphi(t, z_1, z_2, z_3, z_4)| \leq l_1(t)|y_1 - z_1| + l_2(t)|y_2 - z_2| + l_3t|y_3 - z_3| + l_4t|y_4 - z_4|$ для любых точек $(t, y_1, y_2, y_3, y_4) \in D$, $(t, z_1, z_2, z_3, z_4) \in D$, где $l_i: (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — непрерывные функции, $\lim\limits_{t\to+0} l_i(t) = 0$, $i \in \{1, 2\}$, l_3, l_4 — постоянные, $l_3 + l_4 < 1$;

6) $|\varphi(t, ct, cg(t), c, c)| \leq t\alpha(t)$, $t \in (0, \tau)$, где c — постоянная, удовлетворяющая условиям $a + b_1c + b_2g_1c = c_1$, $|c| < \min\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$, $\alpha: (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — непрерывная функция, $\lim\limits_{t\to+0} \alpha(t) = 0$.

Обозначим через $U_2(\rho, M, q)$ множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u: (0, \rho] \to \mathbb{R}$, каждая из которых удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} |u(t) - ct| \leq Mt\beta(t), \\ |u'(t) - c| \leq qM\beta(t), \\ t \in (0, \rho]. \end{gathered} \tag{20}$$

Здесь ρ, M, q — положительные постоянные, $\rho < \tau$.

Назовем *условиями* D совокупность следующих условий :

1) существует непрерывно дифференцируемая неубывающая функция β: $(0,\tau)\to(0,+\infty)$, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{t\to+0}\beta(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+0} t\beta'(t)(\beta(t))^{-1} = \beta_0,$$

$$\lim_{t\to+0} g_*(t)(\beta(t))^{-1} = L_1, \qquad \lim_{t\to+0}\alpha(t)(\beta(t))^{-1} = L_2,$$

$$0 \le \beta_0 < +\infty, \qquad 0 \le L_i < \infty, \qquad i\in\{1,2\};$$

2) $b_1 \ne 1+\beta_0$;

3) $(l_3+l_4)|b_1| + |b_2| < |b_1-1-\beta_0|(1-l_3-l_4)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* C, D. *Тогда существуют* ρ, M, q *такие, что*:

1) *если* $b_1 > 1+\beta_0$, *то задача* (19) *имеет бесконечное множество решений* $x:(0,\rho]\to\mathbb{R}$, *каждое из которых принадлежит множеству* $U_2(\rho, M, q)$. *При любом выборе постоянной* α, *удовлетворяющей неравенству* $|\alpha - c\rho| < M\rho\beta(\rho)$, *найдется решение* $x_\alpha \in U_2(\rho, M, q)$ *такое, что* $x_\alpha(\rho) = \alpha$;

2) *если* $b_1 < 1+\beta_0$, *то задача* (19) *имеет непустое множество решений* $x:(0,\rho]\to\mathbb{R}$, *каждое из которых принадлежит множеству* $U_2(\rho, M, q)$.

Доказательство. Выберем постоянные M, q так, чтобы выполнялись условия

$$|b_1| + |b_1-1-\beta_0| < q < \big(|b_1-1-\beta_0| - |b_2|\big)(l_3+l_4)^{-1}, \quad \text{если} \quad l_3+l_4 > 0,$$

$$q > |b_1| + |b_1-1-\beta_0|, \quad \text{если} \quad l_3+l_4 = 0,$$

$$M > \big(|b_2|L_1 + L_2\big)\big(|b_1-1-\beta_0| - |b_2| - q(l_3+l_4)\big)^{-1}.$$

Неравенства, определяющие выбор ρ, здесь не приводятся ввиду ограниченности объема статьи; отметим лишь, что ρ достаточно мало. Пусть B — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x:[0,\rho]\to\mathbb{R}$ с нормой (10). Обозначим через U подмножество B, каждый элемент $u:[0,\rho]\to\mathbb{R}$ которого удовлетворяет условиям (20), причем $u(0)=0$, $u'(0)=c$, и, кроме того, выполнено условие (11), где $\delta(\varepsilon) = (1-l_3-l_4)\varepsilon(2B(t_\varepsilon))^{-1}$. Здесь $B(t_\varepsilon) = l_0(t_\varepsilon)t_\varepsilon^{-1} + t_\varepsilon^{-2}$, причем постоянная $t_\varepsilon \in (0,\rho)$ выбрана так, чтобы $\beta(t) < (1-l_3-l_4)(8qM)^{-1}\varepsilon$ при $t\in(0,t_\varepsilon]$. Множество U замкнуто, выпукло, ограничено и (в соответствии с критерием Арцела) компактно.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x'(t) = a + b_1t^{-1}x(t) + b_2t^{-1}u(g(t)) + t^{-1}\varphi(t, u(t), u(g(t)), u'(t), u'(h(t))), \tag{21}$$

где $u\in U$ — произвольная фиксированная функция. Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, которые проведены при доказательстве теоремы 1. Здесь следует положить

$$\Phi_1 = \{(t,x): t\in(0,\rho], |x-ct| = Mt\beta(t)\},$$

$$D_1 = \{(t,x): t\in(0,\rho], |x-ct| < Mt\beta(t)\},$$

$$H = \{(t,x): t=\rho, |x-c\rho| < M\rho\beta(\rho)\},$$

$$A_1(t,x) = (x-ct)^2(t\beta(t))^{-2},$$

затем

$$\Phi_2(\nu) = \{(t,x): t \in (0,\rho],\ |x - x_u(t)| = \nu t\beta(t)(-\ln t)\},$$

$$D_2(\nu) = \{(t,x): t \in (0,\rho],\ |x - x_u(t)| < \nu t\beta(t)(-\ln t)\},$$

где ν — параметр, $\nu \in (0, 1]$, $A_2(t,x) = (x - x_u(t))^2 (t\beta(t)(-\ln t))^{-2}$ и, наконец,

$$\Phi_3 = \left\{(t,x): t \in (0,\rho],\ |x - x_2(t)| = \gamma d^{\nu}(t\beta(t))^{1-\nu}\right\},$$

$$D_3 = \left\{(t,x): t \in (0,\rho],\ |x - x_2(t)| < \gamma d^{\nu}(t\beta(t))^{1-\nu}\right\},$$

где $d = \|u_1 - u_2\|_B$, $d > 0$, $x_2 = Tu_2$, γ, ν — постоянные, удовлетворяющие условиям

$$0 < \nu < \min\left\{1, \frac{|b_1 - 1 - \beta_0|}{3(1+\beta_0)}\right\}, \qquad \gamma > \frac{3(|b_2|(2M)^{1-\nu} + 1)(\beta_0 + 1)}{|b_1 - 1 - \beta_0|},$$

$$A_3(t,x) = (x - x_2(t))^2 (t\beta(t))^{-2(1-\nu)}.$$

Если $b_1 > 1 + \beta_0$, то доказываем, что каждая из интегральных кривых уравнения (21), пересекающих H, лежит в D_1 при всех $t \in (0, \rho]$. Затем выбираем и фиксируем точку $G(\rho, \alpha) \in H$ и обозначаем через J_u: $(t, x_u(t))$ интегральную кривую уравнения (21), проходящую через точку G. Если $b_1 < 1 + \beta_0$, то доказываем, что среди интегральных кривых уравнения (21), пересекающих H, лишь одна лежит в D_1 при всех $t \in (0, \rho]$. Ее мы и обозначаем через J_u: $(t, x_u(t))$. Полагаем по определению $x_u(0) = 0$, $x_u'(0) = c$ и доказываем, что $x_u \in U$. Определяем оператор $T: U \to U$ равенством $Tu = x_u$. При доказательстве непрерывности оператора $T: U \to U$ снова приходим к неравенству (14). Для завершения доказательства теоремы 2 применяем к оператору T: $U \to U$ теорему Шаудера о неподвижной точке.

***Пример* 3.** Рассмотрим задачу Коши

$$tx'(t) = -t + 2x(t) + t^2 x'(t)x'(t^2) + t^2 x'(t^2) - 2tx(t)x'(t^2), \quad x(0) = 0, \tag{22}$$

где $x: (0, \tau) \to \mathbb{R}$ — неизвестная функция ($\tau > 0$ — постоянная). Здесь $a = -1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 0$, функция $\varphi: D \to \mathbb{R}$ определена равенством

$$\varphi(t, y_1, y_3, y_4) = t^2 y_3 y_4 + t^2 y_4 - 2t y_1 y_4,$$

причем

$$D = \{(t, y_1, y_3, y_4): t \in (0,\tau),\ |y_1| < 2t,\ |y_3| < 2,\ |y_4| < 2\}.$$

Можем взять $l_3 = 2\tau^2$, $l_4 = 4\tau + 3\tau^2$. Постоянная c определяется из уравнения $-1 + 2c = c$, т.е. $c = 1$, поэтому $\varphi(t, ct, c, c) = \varphi(t, t, 1, 1) = 0$, $t \in (0, \tau)$, и можно считать, что $\alpha(t) = t^r$, где $r > 0$ — любое. Пусть $\beta(t) = t^r$, где $r > 0$, $r \neq 1$. Тогда $\beta_0 = r$. Если при постановке задачи выбрать $\tau > 0$ достаточно малым, то можно добиться выполнения условия

$$0 + (l_3 + l_4)\cdot 2 < |2 - 1 - r|(1 - l_3 - l_4).$$

Поскольку выполнены условия C, D, согласно теореме 2 имеем следующее.

1. Если $0 < r < 1$, то $b_1 > 1 + \beta_0$. Поэтому задача (22) имеет бесконечное множество решений $x: (0, \rho] \to \mathbb{R}$, каждое из которых удовлетворяет условиям

$$|x(t)-t| \le Mt^{1+r}, \qquad |x'(t)-1| \le qMt^r, \qquad t \in (0,\rho]. \tag{23}$$

Здесь $\rho \in (0,\tau)$, ρ достаточно мало, M, q достаточно велики.

2. Если $r > 1$, то $b_1 < 1+\beta_0$. Поэтому задача (22) имеет непустое множество решений $x\colon (0,\rho] \to \mathbb{R}$, каждое из которых удовлетворяет условиям (23).

С другой стороны, переписав задачу (22) в виде

$$(tx'(t)+t-2x(t))(1-tx'(t^2)) = 0, \qquad x(0) = 0,$$

найдем множество ее решений:

$$x(t) = t + Ct^2, \quad \text{где} \quad C \in \mathbb{R} \text{ — любое}, \quad x(t) = 2\sqrt{t}.$$

Легко видеть, что при $r < 1$ каждое из решений семейства $x(t) = t + Ct^2$ удовлетворяет неравенствам (23) (для $|C| \le M$), а если $r > 1$, то среди решений указанного семейства найдется только одно, имеющее свойства (23), а именно $x(t) = t$. Наличие „дополнительного" решения $x(t) = 2\sqrt{t}$ не противоречит утверждению теоремы 2.

3. Нелинейное уравнение. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{gathered} tx'(t) = f(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), \\ x(0) = 0, \end{gathered} \tag{24}$$

в предположении, что выполнены *условия* E:

1) $g\colon (0,\tau) \to (0,+\infty)$, $h\colon (0,\tau) \to (0,+\infty)$ — непрерывно дифференцируемые неубывающие функции, $\lim\limits_{t\to+0} tg'(t)(g(t))^{-1} = g_0$, $\lim\limits_{t\to+0} th'(t)(h(t))^{-1} = h_0$, $0 \le g_0 < +\infty$, $0 \le h_0 < +\infty$ и для любых точек $t_i \in (0,\tau)$, $i \in \{1,2\}$, выполнено условие (4);

2) $f\colon D \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция,

$$\begin{gathered} D = \{(t, y_1, y_2, y_3, y_4)\colon t \in (0,\tau), |y_1| < \mu(t), |y_2| < \mu(g(t)), \\ |y_3| < \mu(t)t^{-1}, |y_4| < \mu(h(t))(h(t))^{-1}\}; \end{gathered}$$

здесь $\mu\colon (0,\tau) \to (0,+\infty)$ — непрерывная функция, $\lim\limits_{t\to+0} \mu(t) = 0$;

3) $|f(t,0,0,0,0)| \le \alpha(t)$, $t \in (0,\tau)$, где $\alpha\colon (0,\tau) \to (0,+\infty)$ — непрерывно дифференцируемая неубывающая функция, $\lim\limits_{t\to+0} \alpha(t)(\mu(t))^{-1} = 0$;

4) $|f(t,y_1,y_2,y_3,y_4) - f(s,y_1,y_2,y_3,y_4)| \le l_0(t_*)|t-s|$ для любых точек $(t, y_1, y_2, y_3, y_4) \in D$, $(s, y_1, y_2, y_3, y_4) \in D$, удовлетворяющих условию $0 < t_* \le t$, $0 < t_* \le s$, где $l_0\colon (0,\tau) \to (0,+\infty)$ — непрерывная невозрастающая функция;

5) $|f(t,y_1,y_2,y_3,y_4) - f(t,z_1,z_2,z_3,z_4)| \le l_1|y_1-z_1| + l_2\alpha(t)(\alpha(g(t)))^{-1}|y_2-z_2| + l_3t|y_3-z_3| + l_4h(t)|y_4-z_4|$ для любых точек $(t, y_1, y_2, y_3, y_4) \in D$, $(t, z_1, z_2, z_3, z_4) \in D$, где l_j — постоянные, $j \in \{1,2,3,4\}$, $l_3 + l_4 < 1$.

Обозначим через $U_3(\rho, M, q)$ множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u\colon (0,\rho] \to \mathbb{R}$, каждая из которых удовлетворяет условиям

$$|u(t)| \le M\alpha(t), \qquad |u'(t)| \le (q+1)M\alpha(t)/t, \qquad t \in (0,\rho].$$

Здесь ρ, M, q — положительные постоянные, $\rho < t$. Заметим, что из сделанных предположений не следует, что выражение $\alpha(t)/t$ ограничено при $t \in (0,\rho]$.

Назовем *условиями* F совокупность следующих условий:

1) $\lim\limits_{t\to+0} t\alpha'(t)(\alpha(t))^{-1} = \alpha_0,\ 0 < \alpha_0 < +\infty;$

2) $l_1 + l_2 + (\alpha_0 + 2)(l_3 + l_4) < \alpha_0.$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* E, F. *Тогда существуют* $\rho,\ M,\ q$ *такие, что задача* (24) *имеет непустое множество решений* $x : (0, \rho\,] \to \mathbb{R}$, *каждое из которых принадлежит множеству* $U_3(\rho, M, q)$.

Доказательство. Выберем постоянные $M,\ q$ так, чтобы выполнялись условия

$$1 + \alpha_0 < q < (\alpha_0 - l_1 - l_2)(l_3 + l_4)^{-1} - 1, \qquad \text{если} \quad l_3 + l_4 > 0,$$

$$q > 2 + \alpha_0, \qquad \text{если} \quad l_3 + l_4 = 0,$$

$$M > (\alpha_0 - l_1 - l_2 - (l_3 + l_4)(q+1))^{-1}.$$

Неравенства, определяющие выбор ρ, здесь не приведены ввиду ограниченности объема статьи; отметим лишь, что ρ достаточно мало. Пусть B — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x : [0, \rho\,] \to \mathbb{R}$ с нормой (10). Обозначим через U подмножество B, каждый элемент $u : [0, \rho\,] \to \mathbb{R}$ которого удовлетворяет неравенствам

$$|u(t)| \le Mt\alpha(t), \qquad |u'(t)| \le qM\alpha(t), \qquad t \in (0, \rho\,],$$

причем $u(0) = 0,\ u'(0) = 0$ и, кроме того, выполнено условие (11), где $\delta(\varepsilon) = (1 - l_3 - l_4)\varepsilon(2B(t_\varepsilon))^{-1}$. Здесь

$$B(t_\varepsilon) = l_0(t_\varepsilon) + \big(g(t_\varepsilon)\alpha\big(g(t_\varepsilon)\big)\big)^{-1} + \big(h(t_\varepsilon)\big)^{-1},$$

причем постоянная $t_\varepsilon \in (0, \rho)$ выбрана так, чтобы $\alpha(t) < (1 - l_3 - l_4)(8qM)^{-1}\varepsilon$ при $t \in (0, t_\varepsilon]$. Множество U замкнуто, выпукло, ограничено и (в соответствии с критерием Арцела) компактно.

Полагая $x = y/t$, где $y : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ — новая неизвестная функция, получаем задачу Коши

$$ty'(t) = y(t) + tf\left(t, \frac{y(t)}{t}, \frac{y(g(t))}{g(t)}, \frac{y'(t)}{t} - \frac{y(t)}{t^2}, \frac{y'(h(t))}{h(t)} - \frac{y(h(t))}{(h(t))^2}\right),$$

$$y(0) = 0.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'(t) = \frac{y(t)}{t} + f\left(t, \frac{u(t)}{t}, \frac{u(g(t))}{g(t)}, \frac{u'(t)}{t} - \frac{u(t)}{t^2}, \frac{u'(h(t))}{h(t)} - \frac{u(h(t))}{(h(t))^2}\right), \tag{25}$$

где $u \in U$ — произвольная фиксированная функция. Пусть $D_0 = \{(t, y) : t \in (0, \rho],\ y \in \mathbb{R}\}$. Если $(t, y) \in D_0$, то для уравнения (25) выполнены условия теоремы существования и единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных. Далее проводим рассуждения, аналогичные таковым при доказательстве теоремы 1. Обозначим

$$\Phi_1 = \{(t, y) : t \in (0, \rho],\ |y| = Mt\alpha(t)\},$$

$$D_1 = \{(t, y) : t \in (0, \rho],\ |y| < Mt\alpha(t)\},$$

$$H = \{(t, y) : t = \rho,\ |y| < M\rho\alpha(\rho)\}.$$

Определим вспомогательную функцию $A_1 : D_0 \to [0, +\infty)$ равенством $A_1(t, y) = y^2(t\alpha(t))^{-2}$ и докажем, что ее производная в силу уравнения (25) отрицательна при $(t, y) \in \Phi_1$. Поэтому среди интегральных кривых уравнения (25), пересекающих H, найдется хотя бы одна, которая определена при $t \in (0, \rho]$ и лежит в D_1 при всех $t \in (0, \rho]$; обозначим эту интегральную кривую через J_u: $(t, y_u(t))$. Затем докажем, что среди интегральных кривых уравнения (25), пересекающих H, только J_u: $(t, y_u(t))$ лежит в D_1 при всех $t \in (0, \rho]$. С этой целью рассмотрим однопараметрические семейства множеств

$$\Phi_2(\nu) = \{(t, y) : t \in (0, \rho], |y - y_u(t)| = \nu t\alpha(t)(-\ln t)\},$$

$$D_2(\nu) = \{(t, y) : t \in (0, \rho], |y - y_u(t)| < \nu t\alpha(t)(-\ln t)\},$$

где ν — параметр, $\nu \in (0, 1]$; вспомогательная функция $A_2 : D_0 \to [0, +\infty)$ определена равенством $A_2(t, y) = (y - y_u(t))^{-2}(t\alpha(t)(-\ln t))^{-2}$. Затем полагаем по определению $y_u(0) = 0$, $y_u'(0) = 0$ и доказываем, что $y_u \in U$. Определяем оператор $T : U \to U$ равенством $Tu = y_u$ и доказываем, что оператор $T : U \to U$ непрерывен. Для этого проводим те же рассуждения, что и в соответствующей части доказательства теоремы 1 (случай $b_{10} < N + \beta_0$). Здесь

$$\Phi_3 = \left\{(t, y) : t \in (0, \rho], |y - y_2(t)| = \gamma d^{\nu} t\alpha(t)(g(t)h(t)\alpha(g(t)))^{-\nu}\right\},$$

$$D_3 = \left\{(t, y) : t \in (0, \rho], |y - y_2(t)| < \gamma d^{\nu} t\alpha(t)(g(t)h(t)\alpha(g(t)))^{-\nu}\right\},$$

где $d = \|u_1 - u_2\|_B$, $d > 0$, $y_2 = Tu_2$, ν, γ — постоянные, удовлетворяющие условиям

$$0 < \nu < \min\left\{1, \frac{\alpha_0}{3}(g_0 + h_0 + \alpha_0 g_0)^{-1}\right\}, \quad \text{если} \quad g_0 + h_0 + \alpha_0 g_0 > 0,$$

$$0 < \nu < 1, \quad \text{если} \quad g_0 = h_0 = 0,$$

$$\gamma > \frac{3}{\alpha_0}(2M)^{1-\nu}(l_1 + l_2 + 2),$$

вспомогательная функция $A_3 : D_0 \to [0, +\infty)$ определяется равенством

$$A_3(t, y) = (y - y_2(t))^2 \left(t\alpha(t)(g(t)h(t)\alpha(g(t)))^{-\nu}\right)^{-2}.$$

Доказываем, что интегральная кривая $J_1 : (t, y_1(t))$ дифференциального уравнения

$$y'(t) = \frac{y(t)}{t} + f\left(t, \frac{u_1(t)}{t}, \frac{u_1(g(t))}{g(t)}, \frac{u_1'(t)}{t} - \frac{u_1(t)}{t^2}, \frac{u_1'(h(t))}{h(t)} - \frac{u_1(h(t))}{(h(t))^2}\right)$$

лежит в D_3 при всех $t \in (0, \rho]$, после чего получаем

$$|y_1(t) - y_2(t)| + |y_1'(t) - y_2'(t)| \le d^{\nu}(g(t)h(t)\alpha(g(t)))^{-\nu}, \quad t \in (0, \rho]. \tag{26}$$

Поскольку $y_i(t) \to 0$, $y_i'(t) \to 0$, $t \to +0$, $i \in \{1, 2\}$, из (26) следует непрерывность оператора $T : U \to U$ (аналогичными рассуждениями с помощью (14) была доказана непрерывность оператора $T : U \to U$ при доказательстве теоремы 1).

Доказательство теоремы 3 завершается применением к оператору $T : U \to U$ теоремы Шаудера о неподвижной точке.

***Пример* 4.** Рассмотрим задачу Коши

$$tx'(t) = \frac{t}{20}x'\left(\frac{t}{2}\right) + x^2\left(\frac{t}{9}\right)x'(t) - \frac{1}{20}x^2\left(\frac{t}{9}\right)x'\left(\frac{t}{2}\right), \quad x(0) = 0, \tag{27}$$

где $x\colon (0, \tau) \to \mathbb{R}$ — неизвестная функция ($\tau > 0$ — постоянная). Пусть далее

$$D = \left\{(t, y_2, y_3, y_4) : t \in (0, \tau),\ |y_2| < \frac{t}{9},\ |y_3| < 1,\ |y_4| < 1\right\}$$

(т. е. полагаем $\mu(t) = t$), а функция $f\colon D \to \mathbb{R}$ определена равенством

$$f(t, y_2, y_3, y_4) = \frac{ty_4}{20} + y_2^2 y_3 - \frac{y_2^2 y_4}{20}.$$

Тогда задачу (27) можно записать в виде

$$tx'(t) = f\left(t, x\left(\frac{t}{9}\right), x'(t), x'\left(\frac{t}{2}\right)\right), \quad x(0) = 0. \tag{28}$$

Здесь $f(t, 0, 0, 0) = 0,\ t \in (0, \tau)$, и поэтому полагаем $\alpha(t) = t^r$, где $r > 1$ — любое фиксированное; тогда $\alpha_0 = r$. Легко видеть, что можно выбрать

$$l_1 = 0, \quad l_2 = \frac{7\tau}{30}, \quad l_3 = \frac{\tau}{81}, \quad l_4 = \frac{1}{10} + \frac{\tau}{810}.$$

При постановке задачи можно взять столь малое τ, чтобы выполнялось условие

$$l_1 + l_2 + (\alpha_0 + 2)(l_3 + l_4) < \alpha_0,$$

так как

$$\alpha_0 > 1 \Rightarrow \alpha_0 > \frac{2}{9} \Rightarrow (\alpha_0 + 2)\frac{1}{10} < \alpha_0.$$

Поскольку выполнены условия E, F, на основании теоремы 3 задача (28) имеет непустое множество решений $x\colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$ таких, что

$$|x(t)| \le Mt^r, \quad |x'(t)| \le (q+1)Mt^{r-1}, \quad t \in (0, \rho], \tag{29}$$

где $\rho \in (0, \tau)$, ρ достаточно мало, M, q достаточно велики.

С другой стороны, рассматриваемую задачу (27) можно записать в виде

$$\left(x'(t) - \frac{1}{20}x'\left(\frac{t}{2}\right)\right)\left(t - x^2\left(\frac{t}{9}\right)\right) = 0, \quad x(0) = 0,$$

откуда следует, что либо $x = \pm 3\sqrt{t}$, либо $x(t)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$x(t) = \frac{1}{10}x\left(\frac{t}{2}\right)$$

с начальным условием $x(0) = 0$. Если искать решения последней задачи в виде степенного ряда $x(t) = c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \ldots$, то последовательно получим $c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = 0$ и, следовательно, $x(t) = 0$.

Очевидно, решение $x(t) = 0$ задачи (27) удовлетворяет условиям (29) при любом фиксированном $r > 1$ и при любых положительных q, M. Существование „дополнительных" двух решений задачи (27)

$$x(t) = 3\sqrt{t}, \quad x(t) = -3\sqrt{t}$$

не противоречит утверждению теоремы 3.

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 280 с.
2. *Азбелев Н. В.* Современное состояние и тенденции развития теории функционально-дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 6. – С. 8 – 19.
3. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. – М.: Ин-т компьютер. исслед., 2002. – 384 с.
4. *Ахмеров Р. Р., Каменский М. И., Потапов А. С. и др.* Теория уравнений нейтрального типа // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – 1981. – **19**. – С. 55 – 126.
5. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1974. – 120 с.
6. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
7. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1972. – 664 с.
8. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. – 352 с.
9. *Чечик В. А.* Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1959. – № 8. – С. 155 – 198.
10. *Азбелев Н. В., Алвеш М. Ж., Бравый Е. И.* О сингулярных краевых задачах для линейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 2. – С. 3 – 11.
11. *Алвеш М. Ж.* О разрешимости двухточечной краевой задачи для сингулярного нелинейного функционально-дифференциального уравнения // Там же. – С. 12 – 19.
12. *Бравый Е. И.* О разрешимости одной краевой задачи для нелинейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения // Там же. – 1993. – № 5. – С. 17 – 23.
13. *Бравый Е. И.* Линейные функционально-дифференциальные уравнения с внутренними сингулярностями: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Пермь, 1996. – 18 с.
14. *Шиндяпин А. И.* О краевой задаче для одного сингулярного уравнения // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 3. – С. 450 – 455.
15. *Grimm L. J.* Analytic solutions of a neutral differential equation near a singular point // Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – **36**, № 1. – P. 187 – 190.
16. *Grimm L. J., Hall L. M.* Holomorphic solutions of singular functional differential equations // J. Math. Anal. and Appl. – 1975. – **50**, № 3. – P. 627 – 638.
17. *Зернов А. Е.* О разрешимости и асимптотике решений некоторого функционально-дифференциального уравнения с сингулярностью // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 4. – С. 455 – 465.
18. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
19. *Зернов А. Е.* О разрешимости и асимптотических свойствах решений одной сингулярной задачи Коши // Дифференц. уравнения. – 1992. – **28**, № 5. – С. 756 – 760.
20. *Зернов А. Е.* Качественный анализ неявной сингулярной задачи Коши // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 302 – 310.

Получено 23.03.2004,
после доработки — 05.10.2004