УДК 517.5:514.17:513.83

Ю. Б. Зелинский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОБЛАСТЯХ С РЕГУЛЯРНЫМИ СЕЧЕНИЯМИ*

We prove the generalized convexity of domains whose sections by some continuously parametrized family of two-dimensional planes are acyclic.

Доведено узагальнену опуклість областей, які задовольняють умову ациклічності їх перерізів деякою неперервно параметризованою сім'єю двовимірних площин.

Изучение глобальных свойств множеств по известным характеристикам его сечений имеет ряд практических применений в вопросах медицинской томографии и стереологии [1, 2]. Во многих случаях, имея некоторые сведения о сечениях множества плоскостями фиксированной размерности, нужно сделать выводы о множестве в целом.

В работах [3, 4] изучались общие свойства κ-выпуклых множеств, т. е. подмножеств евклидового пространства $\mathbb{R}^n$, через каждую точку дополнения к которым проходит κ-плоскость, не пересекающая самого множества. В случае, когда граница области D является гладким ограниченным многообразием, $\kappa = n - 2$ и множество κ-плоскостей наделено комплексной структурой (т. е. n четно, а κ-плоскости являются комплексными гиперплоскостями), известно, что область D топологически эквивалентна шару [5].

Цель настоящей работы — изучить случаи, когда комплексной структуры априори нет, но сохранены некоторые свойства минимальности и непрерывности.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задано семейство Ω двумерных плоскостей, имеющее такие свойства:

а) через произвольную пару различных точек проходит единственная плоскость, принадлежащая семейству Ω;

б) если двумерная плоскость является пределом последовательности плоскостей семейства Ω, то она также принадлежит этому семейству.

Такое семейство назовем *минимальным*.

Легко видеть, что если мы рассматриваем комплексное пространство $\mathbb{C}^n$, то минимальным семейством, в частности, будет семейство комплексных прямых, или семейство, полученное из семейства комплексных прямых действительным аффинным преобразованием, не обязательно сохраняющим комплексную структуру.

Пусть $G'(n, n-2)$ — грассманово многообразие $(n-2)$-плоскостей в $\mathbb{R}^n$, а M — его гладкое подмногообразие, имеющее свойство:

для произвольной пары (T, x), где T — гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, а $x \in T$ —

---

* Выполнена при частичной поддержке Государственной программы Украины № 0102 U 000917.

точка, существует единственная плоскость $L \in G'(n, n-2)$ со свойством $x \in L \subset T$.

Пусть M_l — гладкое подмногообразие многообразия $G'(n, 2)$, такое, что для произвольной пары различных точек $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ существует единственная плоскость $L \in M_l$, содержащая их. Очевидно, что такое подмногообразие является минимальным семейством.

Будем говорить, что подмногообразия M и M_l *согласованы,* если для произвольной плоскости $L \in M$ и пары различных точек $x_1, x_2 \in L$ 2-плоскость l из M_l, содержащая эту пару, лежит в L $(l \subset L)$, а для произвольной плоскости l из M_l и точки $x \in l$ существует плоскость $L \in M$ такая, что $l \bigcap L = \{x\}$.

Определение 1. *Будем говорить, что множество* $E \subset \mathbb{R}^n$ M*-выпукло, если для произвольной точки* $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ *существует плоскость* $L \in M$ *такая, что* $x \in L$ *и* $l \bigcap E = \varnothing$.

Определение 2. *Будем говорить, что множество* $E \subset \mathbb{R}^n$ *локально* M*-выпукло, если для произвольной точки* $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ *существуют плоскость* $L \in M$ *и окрестность* $U(x)$ *такие, что* $x \in L$ *и* $L \bigcap E \bigcap U(x) = \varnothing$.

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть* D — *локально* M*-выпуклая ограниченная область с гладкой класса* C^l *границей.*

Если существует согласованное с M *многообразие* M_l, *то*:

1) D — M*-выпуклая область*;

2) *все сечения области* D *двумерными плоскостями, принадлежащими* M_l, *связные и односвязные*;

3) *область* D — *ациклична.*

Доказательство разобьем на несколько вспомогательных утверждений.

Докажем сначала, что каждая двумерная плоскость l, задаваемая многообразием M_l и пересекающая область D, пересекает ∂D так, что ни в одной точке $x \in \overline{l \bigcap D} \setminus l \bigcap D$ она не является касательной к многообразию ∂D. Если же это не так, то в соответствии с согласованностью многообразий M и M_l существует плоскость $L \supset l$. Теперь в силу локальной M-выпуклости D вся окрестность $U(x) \bigcap L \supset U(x) \bigcap l$ точки x не принадлежит $l \bigcap D$, а следовательно, и замыканию $\overline{l \bigcap D}$.

Докажем связность пересечений $l \bigcap D$. Пусть $l \bigcap D$ — несвязное множество, содержащее компоненты D_1 и D_2. Выберем пару точек $a \in D_1$ и $b \in D_2$. В силу связности D существует простая дуга $\gamma(t)\colon [0, 1] \to D$ такая, что $\gamma(0) = a$ и $\gamma(1) = b$. Пусть l_t — двумерная плоскость из M_l, соединяющая пару точек a и $\gamma(t)$ при $t \in (0, 1]$ (при $t = 0$ l_0 — предельная плоскость, полученная при $t \to 0$).

Множество значений t, для которых $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$ принадлежат одной компоненте $V_t \subset l_t \bigcap D$, замкнуто и открыто, а поскольку для достаточно малых t $\gamma(0)$ и $\gamma(t)$ принадлежат, очевидно, одной компоненте, то это справедливо и при $t = 1$. Полученное противоречит выбору точек a и b и, следовательно, $l \bigcap$ $\bigcap D$ — связное множество, т. е. область в двумерной плоскости l.

M-выпуклость области D доказывается аналогично предыдущему. Если область D только локально M-выпукла, то для некоторой точки $x \in \partial D$ существуют плоскость L, принадлежащая многообразию M, и окрестность U такие, что $U \bigcap L \bigcap D = \varnothing$, но $L \bigcap D \neq \varnothing$. Тогда, как и при доказательстве связности, выберем пару точек $a = x$ и b, принадлежащую $L \bigcap D$, и соединим их путем, лежащим в D, за исключением точки a. Повторяя предыдущие рассуждения, придем к противоречию.

Докажем связность границы ∂D. Если граница не связна, то в силу ограниченности области D ее дополнение $\mathbb{R}^n \setminus \overline{D}$ содержит ограниченную компоненту V. Пусть точка $x \in V$, тогда произвольная $(n-2)$-плоскость, проходящая через x, пересекает область D, что противоречит M-выпуклости D.

Докажем односвязность $l \bigcap D$. Предположим, что это пересечение неодносвязно, следовательно, граница $\partial(l \bigcap D)$ не связна. Для точек x_1, x_2, принадлежащих разным компонентам $\partial(l \bigcap D)$, существует замкнутая жорданова кривая $\Gamma \subset l \bigcap D$, которая разделяет в l точки x_1, x_2. В силу связности и гладкости границы ∂D можно соединить точки x_1, x_2 непрерывным путем $\gamma\colon [0, 1] \to \partial D$, $\gamma(0) = x_1$, $\gamma(1) = x_2$. Каждой точке $\gamma(t)$ в силу M-выпуклости D соответствует $(n-2)$-плоскость $L(t)$, задаваемая многообразием M, такая, что $\gamma(t) \in L(t)$ и $L(t) \bigcap D = \varnothing$. Поэтому $l \not\subset L(t)$ для всех $t \in [0, 1]$. Плоскости l и $L(t)$ дополнительных размерностей (соответственно 2 и $n-2$) в силу согласованности имеют одну общую точку $\tau(t)$ (конечную, если они не параллельны, и бесконечную — в случае параллельности).

В силу гладкости границы ∂D семейство $L(t)$ непрерывно зависит от t, и поэтому получаем непрерывный путь $\gamma_1 = \{x \mid x = \tau(t),\ 0 \le t \le 1\}$, соединяющий точки $x_1 = \tau(0)$ и $x_2 = \tau(1)$ в двумерной сфере $S^2 = l \bigcup (\infty)$, полученной из двумерной плоскости одноточечной компактификацией. Поскольку замкнутая жорданова кривая Γ разделяет точки x_1, x_2, то $\Gamma \bigcap \gamma_1 \ne \varnothing$. Следовательно, для некоторого $t = t^0$ $L(t^0) \bigcap \Gamma \subset L(t^0) \bigcap D \ne \varnothing$, что приводит к противоречию.

Доказательство третьего утверждения теоремы базируется на следующих леммах.

Лемма 1. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт и $a \in K$ — такая точка, что сечение K произвольной плоскостью из минимального семейства M_l, проходящей через точку a, ациклично. Тогда K — ацикличный компакт.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.2 [4]. Отличие состоит в том, что многообразие плоскостей семейства M_l, проходящих через фиксированную точку a, уже не будет в общем случае проективным пространством CP^{n-1}, но на ход дальнейших рассуждений это не влияет.

Лемма 2. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — открытая область, $a \in D$ — такая точка, что сечение D произвольной плоскостью минимального семейства M_l, проходящей через точку a, связно и односвязно. Тогда область D — ациклична.*

Пусть $a \in D$ — фиксированная точка. Множество двумерных плоскостей из семейства M_1, проходящих через эту точку, образует некоторое подмножество $M_0 \subset M_1$.

Если воспользоваться инверсией $I\colon \mathring{\mathbb{R}}^n \to \mathring{\mathbb{R}}^n$ $\left(\mathring{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \bigcup \infty\right)$,

$$I(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{|x-a|^2}, & x \ne a, \infty, \\ \infty, & x = a, \\ 0, & x = \infty, \end{cases}$$

то аналогично теоремам 4.2 и 4.3 [4] получим ацикличность области $D_1 = I(D)$.

Теперь третье утверждение теоремы очевидным образом следует из второго утверждения теоремы и леммы 2, где в качестве точки a можно взять произвольную точку области D.

В завершение заметим, что при выполнении условий теоремы область D может не быть выпуклой [6].

1. *Знаменский С. В.* Томография в пространствах аналитических функционалов // Докл. АН СССР. – 1990. – **312**, № 5. – С. 1037–1040.
2. *Амбарцумян Р. В., Мекке Й., Штойян Д.* Введение в стохастическую геометрию. – М.: Наука, 1989. – 400 с.
3. *Зелинский Ю. Б.* О строении k-выпуклых компактов // Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 29–38.
4. *Зелинский Ю. Б.* Многозначные отображения в анализе. – Киев: Наук. думка, 1993. – 264 с.
5. *Юзаков А. П., Кривоколеско В. П.* Некоторые свойства линейно выпуклых областей с гладкими границами в $\mathbb{C}^n$ // Сиб. мат. журн. – 1971. –**12**, № 2. – С. 452–458.
6. *Andersson M., Passare M., Sigurdsson R.* Complex convexity and analytic functionals. I. – Reykjavik: Sci. Inst. Univ. Iceland, 1995. – 71 p.

Получено 02.03.2004