УДК 519.658

Е. И. Радзиевская (Нац. ун-т пищ. технологий Украины, Киев),
Г. В. Радзиевский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ*

Let Γ be a set of all permutations of positive integers, let $\alpha = \{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\nu = \{\nu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, and $\eta = \{\eta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ be nonnegative numerical sequences for which $\left\|\nu(\alpha\eta)_\gamma\right\|_1 := \sum_{j=1}^{\infty}\nu_j\alpha_{\gamma(j)}\eta_{\gamma(j)}$ is defined for all $\gamma := \{\gamma(j)\}_{j\in\mathbb{N}}\in\Gamma$ and $\eta\in\mathbf{l}_p$. We establish $\sup_{\eta:\|\eta\|_p=1}\inf_{\gamma\in\Gamma}\left\|\nu(\alpha\eta)_\gamma\right\|_1$ in the case where $1 < p < \infty$.

Нехай Γ — множина всіх перестановок натурального ряду, $\alpha = \{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\nu = \{\nu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ і $\eta = \{\eta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ — невід'ємні числові послідовності, для яких $\left\|\nu(\alpha\eta)_\gamma\right\|_1 := \sum_{j=1}^{\infty}\nu_j\alpha_{\gamma(j)}\eta_{\gamma(j)}$ визначено для усіх $\gamma := \{\gamma(j)\}_{j\in\mathbb{N}}\in\Gamma$ і $\eta\in\mathbf{l}_p$. Знайдено $\sup_{\eta:\|\eta\|_p=1}\inf_{\gamma\in\Gamma}\left\|\nu(\alpha\eta)_\gamma\right\|_1$ у випадку $1 < p < \infty$.

Данное сообщение инспирировано результатами работ [1] (гл. XI, лемма 6.1) и [2] (лемма). Доказательства соответствующих утверждений из [1, 2] весьма громоздки. Так, лемма 6.1 из гл. XI в [1] доказывается на 30 страницах и содержит 164 занумерованные формулы. Лемма из [2] обобщает соответствующий результат из [1], однако и ее доказательство занимает 13 страниц. Здесь приведено небольшое по объему доказательство теоремы, содержащей лемму из [2], а значит, и лемму 6.1 из гл. XI в [1]. (Необходимые пояснения даны в конце сообщения.) Отметим, что некоторая громоздкость приведенных перед формулировкой теоремы построений связана исключительно с громоздкостью понятий и обозначений, используемых в ней.

Как обычно, $\mathbb{N}$ — множество целых положительных (натуральных) чисел. В дальнейшем рассматриваются лишь последовательности $\xi := \{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ вещественных чисел, а K^∞ — множество неотрицательных последовательностей ξ, у которых $\xi_j \ge \xi_{j+1}$, $j\in\mathbb{N}$. Пусть $\mathbf{c}_0$ состоит из последовательностей ξ со свойством $\lim_{j\to\infty}\xi_j = 0$. Каждой $\xi = \{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ из $\mathbf{c}_0$ сопоставим последовательность $\xi^* = \{\xi_j^*\}_{j\in\mathbb{N}}$, положив $\xi_j^* = \left|\xi_{\varphi(j)}\right|$, где $\varphi(\cdot)$ — такая перестановка натурального ряда, что $\left\{\left|\xi_{\varphi(j)}\right|\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ является невозрастающей последовательностью. Для двух последовательностей $\alpha = \{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ и $\xi = \{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ определим их произведение $\alpha\xi := \{\alpha_j\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, а если все элементы $\alpha_j \ne 0$, то $\alpha^{-1} := \{\alpha_j^{-1}\}_{j\in\mathbb{N}}$ и $\xi/\alpha := \xi\alpha^{-1}$.

Введем банахово пространство $\mathbf{l}_r$, $1 \le r < \infty$, состоящее из последовательностей $\xi = \{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющих условию

$$\|\xi\|_r := \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j\right|^r\right)^{1/r} < \infty, \qquad \xi\in\mathbf{l}_r.$$

* Поддержана Государственным фондом фундаментальных исследований Украины (проект Ф7/329-2001).

Далее в работе $1 < p < \infty$, $q := p(p-1)^{-1}$, относительно последовательности $\alpha = \{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ предполагаем, что все ее элементы положительны, а относительно ненулевой последовательности $\nu = \{\nu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ — что $0 \le \nu_j \le \nu_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Пусть также $\alpha\nu \in \mathbf{l}_q$. Тем самым $\alpha \in \mathbf{l}_q$ и, следовательно, определена последовательность α^* и $\alpha^* \in \mathbf{l}_q$.

Введем подпоследовательность натуральных чисел $\{k_s\}_{s\in\mathbb{N}}$, положив $k_1 := 1$, а k_{s+1} — наибольшим из чисел, для которых

$$\mu_s := \frac{\sum_{j=k_s}^{k_{s+1}-1} \nu_j}{\sum_{j=k_s}^{k_{s+1}-1} (\alpha_j^*)^{-p}} = \max_{k:\,k\ge k_s} \frac{\sum_{j=k_s}^{k} \nu_j}{\sum_{j=k_s}^{k} (\alpha_j^*)^{-p}}. \tag{1}$$

Покажем существование указанных k_s. Поскольку ν — неубывающая последовательность, согласно теореме 368 из [3], $\left\|\alpha^*\nu\right\|_q \le \|\alpha\nu\|_q < \infty$, поэтому для некоторой постоянной $c > 0$ выполняется неравенство $\alpha_j^*\nu_j \le c$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Тем самым

$$\frac{\sum_{j=k_s}^{k} \nu_j}{\sum_{j=k_s}^{k} (\alpha_j^*)^{-p}} \le \frac{c\sum_{j=k_s}^{k} \nu_j}{\sum_{j=k_s}^{k} (\alpha_j^*)^{-p+1}\nu_j}. \tag{2}$$

Но $(\alpha_j^*)^{-p+1} \to \infty$ при $j \to \infty$, а $\nu_j \ge c_1 > 0$ для всех достаточно больших j. Значит, правая часть в (2) стремится к нулю при k, стремящемся к бесконечности, и поэтому в (1) максимум существует.

Отметим, что $\{\mu_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ — убывающая последовательность. Действительно, если бы это было не так, то $\mu_s \le \mu_{s+1}$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$ и тогда

$$\mu_s \le \left(\sum_{j=k_s}^{k_{s+2}-1} (\alpha_j^*)^{-p}\right)^{-1} \left(\sum_{j=k_s}^{k_{s+2}-1} \nu_j\right),$$

а это противоречит выбору числа k_{s+1}.

Далее потребуется последовательность $\kappa = \{\kappa_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ с элементами

$$\kappa_s := \left(\sum_{j=k_s}^{k_{s+1}-1} (\alpha_j^*)^{-p}\right)^{-1/p} \left(\sum_{j=k_s}^{k_{s+1}-1} \nu_j\right). \tag{3}$$

Покажем, что $\kappa \in \mathbf{l}_q$. Действительно, согласно неравенству Гельдера,

$$\sum_{j=k_s}^{k_{s+1}-1} \nu_j \le \left(\sum_{j=k_s}^{k_{s+1}-1} (\alpha_j^*)^{-p}\right)^{1/p} \left(\sum_{j=k_s}^{k_{s+1}-1} (\alpha_j^*\nu_j)^q\right)^{1/q},$$

а, как уже отмечалось, $\alpha^*\nu \in \mathbf{l}_q$. Тем самым $\|\kappa\|_q^q \le \left\|\alpha^*\nu\right\|_q^q < \infty$.

И, наконец, через Γ обозначим множество всех перестановок натурального ряда, а для $\gamma := \{\gamma(j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ из Γ и последовательности $\xi = \{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ положим $(\xi)_\gamma := \{\xi_{\gamma(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$.

Во введенных обозначениях и предположениях докажем следующее утверждение.

Теорема. *Имеет место нестрогое неравенство*

$$\inf_{\gamma\in\Gamma}\left\|\nu(\alpha\eta)_\gamma\right\|_1 \le \|\kappa\|_q\|\eta\|_p, \qquad \eta\in\mathbf{l}_p, \tag{4}$$

причем существует ненулевой элемент η *из* $\mathbf{l}_p$, *для которого* (4) *превращается в равенство.*

Доказательство. Поскольку ν — неубывающая последовательность неотрицательных чисел, используя теорему 368 из [3] и полагая $\xi := \alpha\eta$, имеем

$$\inf_{\gamma\in\Gamma}\left\|\nu(\alpha\eta)_\gamma\right\|_1 = \left\|\nu(\alpha\eta)^*\right\|_1 = \left\|\nu\xi^*\right\|_1.$$

Аналогично заключаем, что

$$\|\eta\|_p = \|\xi/\alpha\|_p \ge \left\|\xi^*/\alpha^*\right\|_p. \tag{5}$$

Тем самым для доказательства теоремы достаточно установить соотношение

$$\|\nu\xi\|_1 \le \|\kappa\|_q\left\|\xi/\alpha^*\right\|_p, \quad \xi\in K^\infty, \quad \xi/\alpha^*\in\mathbf{l}_p, \tag{6}$$

и показать, что равенство в нем достигается на некотором ненулевом элементе ξ из K^∞, для которого $\xi/\alpha^*\in\mathbf{l}_p$. Действительно, пусть ξ — указанный элемент из K^∞, а λ — такая перестановка натурального ряда, что $\alpha = (\alpha^*)_\lambda$. Тогда $\|(\xi)_\lambda/\alpha\|_p = \left\|\xi/\alpha^*\right\|_p$ и неравенство (5) превращается в равенство на последовательности ξ, равной $(\xi)_\lambda$. Следовательно, в (4) левая часть равна правой при $\eta = (\xi)_\lambda/\alpha\in\mathbf{l}_p$.

В случае $p(\xi) := \sum_{j=k_s}^{k_{s+1}-1}\nu_j|\xi_j|$ лемма из сообщения [4] примет вид

$$\sum_{j=k_s}^{k_{s+1}-1}\nu_j\xi_j \le \left(\max_{k=k_s,\ldots,k_{s+1}-1}\frac{\nu_{k_s}+\ldots+\nu_k}{(\alpha^*_{k_s})^{-p}+\ldots+(\alpha^*_k)^{-p}}\right)\left(\sum_{j=k_s}^{k_{s+1}-1}\frac{\xi_j}{(\alpha^*_j)^p}\right) \tag{7}$$

для всех $\xi_{k_s} \ge \xi_{k_s+1} \ge \ldots \ge \xi_{k_{s+1}-1} \ge 0$. Но функция $x\mapsto x^{1/p}$, $x\ge 0$, строго выпукла кверху, поэтому ввиду неравенства Иенсена

$$\left(\sum_{j=k_s}^{k_{s+1}-1}(\alpha^*_j)^{-p}\right)^{-1}\sum_{j=k_s}^{k_{s+1}-1}\frac{\xi_j}{(\alpha^*_j)^p} \le \left(\left(\sum_{j=k_s}^{k_{s+1}-1}(\alpha^*_j)^{-p}\right)^{-1/p}\left(\sum_{j=k_s}^{k_{s+1}-1}\left(\frac{\xi_j}{\alpha^*_j}\right)^p\right)\right)^{1/p},$$

причем равенство будет лишь в случае $\xi_{k_s} = \ldots = \xi_{k_{s+1}-1}$.

Отсюда и из неравенства (7), с учетом определений (1) и (3) чисел k_{s+1} и κ_s, имеем

$$\sum_{j=k_s}^{k_{s+1}-1} \nu_j \xi_j \;\le\; \kappa_s \left(\sum_{j=k_s}^{k_{s+1}-1} \left(\frac{\xi_j}{\alpha_j^*} \right)^p \right)^{1/p}$$

и, как видно из изложенного выше, равенство достигается лишь в случае $\xi_{k_s} = \ldots = \xi_{k_{s+1}-1}$.

Теперь, принимая во внимание неравенство Гельдера, получаем $\|\nu\xi\|_1 \le$ $\le \|\kappa\|_q \|\xi/\alpha^*\|_p$, а ввиду предыдущих рассуждений равенство будет лишь в случае, если у последовательности $\xi = \{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ элементы

$$\xi_{k_s} \;=\; \ldots \;=\; \xi_{k_{s+1}-1} \quad \text{и} \quad \left(\sum_{j=k_s}^{k_{s+1}-1} (\alpha_j^*)^{-p} \right) \xi_{k_s}^p \;=\; c\kappa_s^q,$$

где c — некоторая неотрицательная постоянная. Поэтому последовательность $\xi/\alpha^* \in \mathbf{l}_p$. Но на основании определений (1) и (3) чисел μ_s и κ_s

$$\xi_{k_s}^p \;=\; c\left(\sum_{j=k_s}^{k_{s+1}-1} (\alpha_j^*)^{-p} \right)^{-1} \kappa_s^q \;=\; c\mu_s^q,$$

а $\{\mu_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ — убывающая последовательность, значит, $\xi \in K^\infty$.

Тем самым, установлено неравенство (6), а следовательно, и (4) и, кроме того, описаны все последовательности $\xi \in K^\infty$, для которых (6) превращается в равенство.

Заметим, что согласно неравенству Гельдера и теореме Банаха – Штейнгауза требование $\alpha\nu \in \mathbf{l}_q$ является не только достаточным, но и необходимым условием для конечности $\|\nu(\alpha\eta)_\gamma\|_1$ для любой последовательности $\eta \in \mathbf{l}_p$. (Это утверждение принадлежит Э. Ландау, см. теорему 161 в [3].)

В случае ограниченной последовательности ν утверждение теоремы совпадает с леммой из работы [2], а в случае последовательности ν, равной последовательности

$$\hat{\nu} \;:=\; \{\hat{\nu}_j\}_{j\in\mathbb{N}}, \quad \hat{\nu}_j = 0 \quad \text{при} \quad j \le n \quad \text{и} \quad \hat{\nu}_j = 1 \quad \text{при} \quad j > n,$$

где $n \in \mathbb{N}$, и в предположении о невозрастании последовательности α (т. е. $\alpha = \alpha^*$) — с леммой 6.1 из гл. XI монографии [1]. Отметим, что в этом случае подавляющее число построений, выполненных перед формулировкой теоремы, следует опустить. Например, числа k_s можно положить такими: $k_1 := 1$, k_2 равно наибольшему из чисел, для которого выражение

$$(k-n-1)\left(\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j^{-p} \right)^{-1}$$

достигает своего максимума по $k > n$, а все оставшиеся $k_{s+2} := k_2 + s$, $s \in \mathbb{N}$. При таком выборе чисел k_s справедливы соотношения

$$(k_2 - n - 1)\left(\sum_{j=1}^{k_2-1} \alpha_j^{-p}\right)^{-1} > \alpha_{k_2}^p \geq \alpha_{k_2+1}^p \geq \ldots ,$$

достаточные, чтобы на заключительном этапе доказательства теоремы для нестрогого неравенства $\|\nu\xi\|_1 \leq \|\kappa\|_q \|\xi/\alpha\|_p$ существовала отличная от нулевой последовательность ξ из конуса K^∞ и $\xi/\alpha \in \mathbf{l}_p$, для которой это неравенство превращалось бы в равенство.

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т. 2. – 468 с.
2. *Шидліч А. Л.* Найкращі *n*-членні наближення Λ-методами в просторах S_φ^p // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2003. – **46**. – С. 283 – 306.
3. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
4. *Радзиевская Е. И., Радзиевский Г. В.* Об одной экстремальной задаче для полунормы на пространстве $\mathbf{l}_1$ с весом // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 7. – С. 1002 – 1006.

Получено 01.11.2004