УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ),
О. С. Кондур (Прикарпат. нац. ун-т, Івано-Франківськ)

ПРО АНАЛІТИЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ $\overrightarrow{2b}$-ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

We prove that if coefficients of a $\overrightarrow{2b}$-parabolic system admit an analytic continuation into a complex area in space variables, then a fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem and regular solutions of the system possess such property.

Доведено, що якщо коефіцієнти $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи допускають аналітичне продовження в комплексну область за просторовими змінними, то таку властивість мають фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші та регулярні розв'язки системи.

У фундаментальній праці [1] І. Г. Петровський для означених ним параболічних систем рівнянь у випадку залежних тільки від часової змінної t коефіцієнтів довів теореми про аналітичність за просторовими змінними $x_1, \ldots, x_n$ досить гладких розв'язків. Вивчаючи фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші (ФМРЗК) у комплексній області, С. Д. Ейдельман [2 – 4] одержав аналогічні результати для розв'язків параболічних за Петровським систем з коефіцієнтами, які залежать від усіх змінних і є аналітичними функціями $x_1, \ldots, x_n$.

У 1960 р. С. Д. Ейдельман [5] розглянув новий клас систем рівнянь, який узагальнював клас параболічних за Петровським систем. У цих системах диференціювання за різними просторовими змінними мають, взагалі кажучи, різні ваги відносно диференціювання за часовою змінною, тобто системи мають векторну параболічну вагу $\overrightarrow{2b} \equiv (2b_1, \ldots, 2b_n)$. Тому такі системи названі $\overrightarrow{2b}$-параболічними. Дослідженням для них задачі Коші та, зокрема, ФМРЗК присвячено праці [6, 7]. У роботі [6] висловлено гіпотезу про можливість аналітичного продовження в комплексну область ФМРЗК та розв'язків $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи за змінними $x_1, \ldots, x_r$, $r < n$, якщо коефіцієнти системи є аналітичними функціями цих змінних і виконується припущення $2b_1 = \ldots = 2b_r > 2b_{r+1} \geq \ldots \geq 2b_n$. У даній статті доводиться, що таке аналітичне продовження можливе за всіма просторовими змінними без жодних припущень щодо ваг $2b_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

1. Будемо використовувати такі позначення: $n, N, b_1, \ldots, b_n$ — задані натуральні числа; $\overrightarrow{2b} \equiv (2b_1, \ldots, 2b_n)$; b — найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_n$; $m_j \equiv b/b_j$, $q_j \equiv 2b_j/(2b_j - 1)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$; $M \equiv \sum_{j=1}^n (m_j/(2b))$; $\|k\| \equiv \sum_{j=1}^n m_j k_j$, якщо $k \equiv (k_1, \ldots, k_n)$ — мультиіндекс; T — задане додатне число; i — уявна одиниця; $\{x \equiv (x_1, \ldots, x_n), \xi \equiv (\xi_1, \ldots, \xi_n), y \equiv (y_1, \ldots, y_n)\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{x_{(j)} \equiv (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n), \xi_{(j)} \equiv (\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n), y_{(j)} \equiv (y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n)\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$; $\{z_j \equiv x_j + ix'_j, \zeta_j \equiv \xi_j + i\xi'_j, s_j \equiv y_j + iy'_j\} \subset \mathbb{C}$, $z^{(j)} \equiv (x_1, \ldots, x_{j-1}, z_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, $\zeta^{(j)} \equiv (\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \zeta_j, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n)$, $s^{(j)} \equiv (y_1, \ldots, y_{j-1}, s_j, y_{j+1}, \ldots, y_n)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $z \equiv (z_1, \ldots, z_n)$, $\zeta \equiv (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, $E_c(t, x; \tau, \xi) \equiv \exp\left\{-c \sum_{j=1}^n (t-\tau)^{1-q_j} \left|x_j - \xi_j\right|^{q_j}\right\}$, $t > \tau$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, c — стала;

$x^0 \equiv (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $r \equiv (r_1, \ldots, r_n)$ — фіксовані точки з $\mathbb{R}^n$, причому $r_j > 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$; U_j — проміжок $(x_j^0 - r_j, x_j^0 + r_j)$; V_j — круг у площині комплексної змінної z_j з центром у точці x_j^0 радіуса r_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$; $U \equiv U_1 \times \ldots \times U_n$ і $V \equiv V_1 \times \ldots \times V_n$ — відповідно паралелепіпед в $\mathbb{R}^n$ і круговий поліциліндр в $\mathbb{C}^n$ з центром у точці x^0 і полірадіусом r; $\Omega_V \equiv \{z \equiv x + ix' \in \mathbb{C}^n \,|\, z \in V$ для $x \in U$ і $x' = 0$ для $x \in \mathbb{R}^n \setminus U\}$; $Q_V \equiv [0, T] \times \Omega_V$.

Розглянемо рівномірно $\overrightarrow{2b}$-параболічну систему N рівнянь вигляду

$$\partial_t u(t, x) = P(t, x, \partial_x) u(t, x) + f(t, x), \qquad t \in (0, T], \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

де

$$P(t, x, \partial_x) \equiv P_0(t, x, \partial_x) + P_1(t, x, \partial_x) \equiv \sum_{\|k\| = 2b} a_k(t, x) \partial_x^k + \sum_{\|k\| < 2b} a_k(t, x) \partial_x^k,$$

a_k і u, f — матриці розміру відповідно $N \times N$ і $N \times 1$.

Будемо використовувати такі припущення:

α_1) коефіцієнти $a_k(t, z)$, $\|k\| \le 2b$, визначені, обмежені та неперервні по t в області Q_V (при цьому неперервність по t коефіцієнтів $a_k(t, z)$, $\|k\| = 2b$, рівномірна щодо Ω_V) і є аналітичними функціями від z в області V;

α_2) коефіцієнти $a_k(t, z)$, $\|k\| \le 2b$, задовольняють рівномірно щодо t умову Гельдера по $z \in \Omega_V$ з показником $\alpha \in (0, 1]$;

α_3) існують похідні $\partial_x^k a_k(t, x)$, $\|k\| \le 2b$, які задовольняють умови α_1 і α_2.

Основними результатами цієї статті є наступні теореми.

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти системи* (1) *задовольняють умови* α_1 *та* α_2 *і* $Z(t, x; \tau, \xi)$, $0 \le \tau < t \le T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, — *ФМРЗК для системи* (1). *Тоді існує область* $\hat{V} \subset V$ *така, що* Z *допускає продовження по* x *і* ξ *до функції* $Z(t, z; \tau, \zeta)$, $0 \le \tau < t \le T$, $\{z, \zeta\} \subset \Omega_{\hat{V}}$, *яка є аналітичною по* z *і* ζ *у* $\hat{V}$ *і для якої справджуються оцінки*

$$\begin{gathered} \left|\partial_z^k Z(t, z; \tau, \zeta)\right| \le C(t - \tau)^{-M - \|k\|/(2b)} E_c(t, x; \tau, \xi) E_{-c'}(t, x'; \tau, \xi'), \\ 0 \le \tau < t \le T, \qquad \{z \equiv x + ix', \zeta \equiv \xi + i\xi'\} \subset \Omega_{\hat{V}}, \qquad \|k\| < 2b, \end{gathered} \tag{2}$$

де C, c *і* c' — *деякі додатні сталі.*

Теорема 2. *Якщо коефіцієнти системи* (1) *задовольняють умови* α_1, α_2 *та* α_3, *функція* $f(t, z)$, $(t, z) \in [0, T] \times V$, *неперервна і в області* V *аналітична як функція* z, *то будь-який регулярний в області* $[0, T] \times U$ *розв'язок и системи* (1) *можна продовжити в комплексну по* z *область* $\hat{V} \subset V$ *так, щоб він там був аналітичним.*

2. *Доведення теореми* 1. Відомо [7, с. 79 – 89], що ФМРЗК Z визначається формулою

$$\begin{gathered} Z(t, x; \tau, \xi) = Z_0(t, x; \tau, \xi; \xi) + \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} Z_0(t, x; \beta, y; y) \varphi(\beta, y; \tau, \xi) dy, \\ 0 \le \tau < t \le T, \qquad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \end{gathered} \tag{3}$$

де $Z_0(t, x; \tau, \xi; y)$ — ФМРЗК для системи

$$\partial_t u(t, x) = P_0(t, y, \partial_x) u(t, x),$$

$$\begin{gathered}\varphi(t, x; \tau, \xi) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} K_m(t, x; \tau, \xi), \\ K_1(t, x; \tau, \xi) \equiv \big(P_0(t, x, \partial_x) - P_0(t, \xi, \partial_x) + P_1(t, y, \partial_x)\big) Z_0(t, x; \tau, \xi; \xi), \\ K_m(t, x; \tau, \xi) = \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t, x; \beta, y) K_{m-1}(\beta, y; \tau, \xi)\, dy, \quad m \geq 2.\end{gathered} \tag{4}$$

Оскільки

$$Z_0(t, x; \tau, \xi; y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x - \xi, \sigma)\} V_0(t, \tau, \sigma; y)\, d\sigma,$$

де V_0 — розв'язок задачі

$$\frac{dV_0}{dt} = P_0(t, y, i\sigma) V_0, \qquad V_0(t, \tau, \sigma; y)\big|_{t=\tau} = I$$

(I — одинична матриця порядку N), то на підставі припущень α_1, α_2 з урахуванням властивостей матриці V_0 і леми 1.1 [7, с. 28] ФМРЗК Z_0 допускає аналітичне продовження по x, ξ, y до функції $Z_0(t, z; \tau, \zeta; s)$, $\{z, \zeta, s\} \subset \Omega_V$, причому справджуються оцінки

$$\begin{gathered}\left|\partial_z^k Z_0(t, z; \tau, \zeta; \zeta)\right| \leq C(t - \tau)^{-M - \|k\|/(2b)} E_{c_0}(t, x; \tau, \xi) E_{-c_0'}(t, x'; \tau, \xi'), \\ \|k\| \leq 2b,\end{gathered} \tag{5}$$

з деякими додатними сталими C, c_0 і c_0'. Тоді на підставі (4) функція $K_1(t, z; \tau, \zeta)$, $0 \leq \tau < t$, $\{z, \zeta\} \subset \Omega_V$, є аналітичною по z та ζ в області V і виконується оцінка

$$|K_1(t, z; \tau, \zeta)| \leq C_1(t - \tau)^{-M - 1 + \alpha/(2b)} E_{c_1}(t, x; \tau, \xi) E_{-c_1'}(t, x'; \tau, \xi'), \tag{6}$$

де $0 < c_1 < c_0$, $c_1' > c_0'$.

Для ядер K_m, $m \geq 2$, аналітичне продовження здійснимо за однією з просторових змінних, наприклад x_1. У цьому випадку за Ω_V візьмемо $\Omega_{V_1} \equiv \big\{ z^{(1)} \equiv (z_1, x_2, \ldots, x_n) \,\big|\, z_1 \equiv x_1 + i x_1' \in V_1$ для $x_1 \in U_1$ і $x_1' = 0$ для $x_1 \in \mathbb{R} \setminus U_1$; $x_j \in \mathbb{R}, j \in \{2, \ldots, n\}\big\}$. Загальну схему міркувань наведемо для ядра K_2.

Для випадку, який розглядається, оцінка (6) набирає вигляду

$$\begin{gathered}\left|K_1(t, z^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)})\right| \leq C_1(t - \tau)^{-M - 1 + \alpha/(2b)} E_{c_1}(t, x; \tau, \xi) \times \\ \times \exp\left\{c_1'(t - \tau)^{1 - q_1} |x_1' - \xi_1'|^{q_1}\right\}.\end{gathered} \tag{7}$$

Звідси випливає існування такого числа $\eta > 0$, що у випадку виконання нерівності

$$\frac{|x_1' - \xi_1'|}{|x_1 - \xi_1|} \leq \eta \tag{8}$$

правильною є оцінка

$$\left|K_1(t, z^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)})\right| \leq C_1(t - \tau)^{-M - 1 + \alpha/(2b)} E_{c_2}(t, x; \tau, \xi). \tag{9}$$

Як зазначено вище, функції $K_1(t, x; \beta, y)$, $K_1(\beta, y; \tau, \xi)$ визначені для комплексних значень z_1, ζ_1 і s_1 з області V_1 відповідно аргументів x_1, ξ_1 і y_1.

Вони аналітичні за цими аргументами для будь-яких $\{x_{(1)}, \xi_{(1)}, y_{(1)}\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$, якщо $0 \le \tau < \beta < t \le T$.

Визначимо функцію

$$K_2^{\delta_1\delta_2}(t, z^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)}) \equiv \int\limits_{\tau+\delta_1}^{t-\delta_2} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_1(t, z^{(1)}; \beta, s^{(1)}) K_1(\beta, s^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)})\, dy \tag{10}$$

з аналітичною по z_1, ζ_1, s_1 підінтегральною функцією.

Позначимо через $\hat{V}_1$ множину точок z_1 комплексної площини, які лежать всередині круга V_1 і такі, що трикутник з вершинами в точці $A(x_1, x_1')$ і в точках B та C дійсної осі Oy_1 з кутами θ, $\operatorname{tg}\theta = \eta$, прилеглими до дійсної осі, повністю знаходиться в цьому крузі. Аналогічний трикутник з вершинами в точці $D(\xi_1, \xi_1')$ і в точках E та F дійсної осі повинен поміститися в цей круг.

В інтегралі з (10) інтегрування по дійсній осі Oy_1 замінимо інтегруванням по спеціальних контурах Γ, використовуючи при цьому аналітичність підінтегральної функції по $s^{(1)}$ та інтегральну теорему Коші.

Розглянемо два можливих випадки: 1) виконується нерівність (8); 2) виконується протилежна до (8) нерівність.

У першому випадку Γ — ламана, ланками якої є проміжки $(-\infty, x_1^0 - r_1)$, $(x_1^0 + r_1, +\infty)$, бічні сторони трикутників BAC та EDF і частини дійсної осі поза цими трикутниками. Маємо

$$K_2^{\delta_1\delta_2}(t, z^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)}) \equiv \int\limits_{\tau+\delta_1}^{t-\delta_2} d\beta \int\limits_{\Gamma} ds_1 \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} K_1(t, z^{(1)}; \beta, s^{(1)}) K_1(\beta, s^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)})\, dy_{(1)}. \tag{11}$$

Визначимо $K_2(t, z^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)})$ формулою

$$K_2(t, z^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)}) \equiv \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\Gamma} ds_1 \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} K_1(t, z^{(1)}; \beta, s^{(1)}) K_1(\beta, s^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)})\, dy_{(1)}. \tag{12}$$

Враховуючи співвідношення (8), за допомогою оцінки (9) можна одержати аналогічні оцінки для $K_1(t, z^{(1)}; \beta, s^{(1)})$ і $K_1(\beta, s^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)})$. Тоді, використовуючи лему 5.1 з [4, с. 39], маємо

$$\left| K_2^{\delta_1\delta_2}(t, z^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)}) \right| \le C_1^2 \int\limits_{\tau+\delta_1}^{t-\delta_2} \frac{d\beta}{((t-\beta)(\beta-\tau))^{1-\alpha/(2b)}} \times$$

$$\times \int\limits_{\Gamma} \exp\left\{-c_2\left((t-\beta)^{1-q_1}|x_1 - y_1|^{q_1} + (\beta-\tau)^{1-q_1}|y_1 - \xi_1|^{q_1}\right)\right\} \frac{ds_1}{((t-\beta)(\beta-\tau))^{1/(2b_1)}} \times$$

$$\times \prod_{j=2}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left\{-c_2\left((t-\beta)^{1-q_j}\left|x_j - y_j\right|^{q_j} + (\beta-\tau)^{1-q_j}\left|y_j - \xi_j\right|^{q_j}\right)\right\} \frac{dy_j}{((t-\beta)(\beta-\tau))^{1/(2b_j)}} \le$$

$$\le C(\varepsilon)(t-\tau)^{-M+1/(2b_1)} E_{c_2(1-\varepsilon)}(t, x_{(1)}; \tau, \xi_{(1)}) \int\limits_{\tau+\delta_1}^{t-\delta_2} \frac{d\beta}{((t-\beta)(\beta-\tau))^{1-\alpha/(2b)}} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left\{-c_2\left((t-\beta)^{1-q_1}|x_1 - y_1|^{q_1} + (\beta-\tau)^{1-q_1}|y_1 - \xi_1|^{q_1}\right)\right\} \frac{dy_1}{((t-\beta)(\beta-\tau))^{1/(2b_1)}}, \tag{13}$$

де $\varepsilon \in (0, 1)$.

З оцінки (13) випливає, що інтеграл (11) збігається рівномірно щодо $z_1 \in \hat{V}_1$

та $\zeta_1 \in \hat{V}_1$ і, отже, є аналітичною функцією від цих аргументів.

Використовуючи знову лему 5.1 з [4], одержуємо таку оцінку $K_2^{\delta_1\delta_2}$, не залежну від δ_1, δ_2:

$$\left| K_2^{\delta_1\delta_2}(t, z^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)}) \right| \le C_1(\varepsilon)(t-\tau)^{-M-1+\alpha/b} E_{c_2(1-\varepsilon)}(t, x; \tau, \xi). \qquad (14)$$

Аналогічно встановлюємо оцінку

$$I_{\delta_1\delta_2} \equiv \left| K_2^{\delta_1\delta_2}(t, z^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)}) - K_2(t, z^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)}) \right| \le C_1(\varepsilon)(t-\tau)^{-M} \times$$

$$\times E_{c_2(1-\varepsilon)}(t, x; \tau, \xi) \left(\int_{\tau}^{\tau+\delta_1} \frac{d\beta}{((t-\beta)(\beta-\tau))^{1-\alpha/(2b)}} + \int_{t-\delta_2}^{t} \frac{d\beta}{((t-\beta)(\beta-\tau))^{1-\alpha/(2b)}} \right).$$

Припускаючи, що δ_1 та δ_2 настільки малі, що $\tau + \delta_1 \le \dfrac{t+\tau}{2}$ і $t - \delta_2 \ge \dfrac{t+\tau}{2}$, маємо

$$I_{\delta_1\delta_2} \equiv C_2(\varepsilon)(t-\tau)^{-M-1+\alpha/(2b)}(\delta_1^{\alpha/(2b)} + \delta_2^{\alpha/(2b)}).$$

Звідси випливає, що $K_2^{\delta_1\delta_2}$ рівномірно щодо $\{z_1, \zeta_1\} \subset \hat{V}_1$ збігається при $\delta_1 \to 0$ і $\delta_2 \to 0$ до функції K_2, визначеної формулою (12). Отже, функція K_2 є аналітичною функцією від $z_1 \in \hat{V}_1$, $\zeta_1 \in \hat{V}_1$ і для неї справджується оцінка (14).

У другому випадку Γ — ламана, ланками якої є проміжки $(-\infty, x_1^0 - r_1)$, $(x_1^0 + r_1, +\infty)$, відрізок прямої $y_1' = \xi_1' + \dfrac{x_1' - \xi_1'}{t-\tau}(\beta - \tau)$, що міститься між бічними сторонами трикутника BAC (або EDF), частини бічних сторін цього трикутника, які з'єднують даний відрізок з дійсною віссю, і частини дійсної осі поза цим трикутником. На контурі виконуються нерівності $|x_1' - y_1'| \le \le |x_1' - \xi_1'| \dfrac{t-\beta}{t-\tau}$, $|y_1' - \xi_1'| \le |x_1' - \xi_1'| \dfrac{\beta-\tau}{t-\tau}$, тому $\exp\{c_1'((t-\beta)^{1-q_1}|x_1' - y_1'|^{q_1} + (\beta-\tau)^{1-q_1}|y_1' - \xi_1'|^{q_1})\} \le \exp\{c_1'(t-\tau)^{1-q_1}|x_1' - \xi_1'|^{q_1}\}$. Тоді, враховуючи (7) і (11), отримуємо

$$\left| K_2^{\delta_1\delta_2}(t, z^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)}) \right| \le C(\varepsilon)(t-\tau)^{-M-1+\alpha/b} E_{c_2(1-\varepsilon)}(t, x; \tau, \xi) \times$$

$$\times \exp\{c_1'(t-\tau)^{1-q_1}|x_1' - \xi_1'|^{q_1}\}.$$

Аналогічно оцінюємо $I_{\delta_1\delta_2}$ і доводимо рівномірну щодо z_1, ζ_1 з $\hat{V}_1$ збіжність $K_2^{\delta_1\delta_2}$ до K_2 при $\delta_1 \to 0$, $\delta_2 \to 0$.

Отже, доведено аналітичність функції $K_2(t, z^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)})$ за змінними z_1 і ζ_1 в області $\hat{V}_1$ та одержано оцінки

$$\left| K_2(t, z^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)}) \right| \le C_2(\varepsilon)(t-\tau)^{-M-1+\alpha/b} \times$$

$$\times \begin{cases} E_{c_2(1-\varepsilon)}(t, x; \tau, \xi) & \text{при } \left| \dfrac{x_1' - \xi_1'}{x_1 - \xi_1} \right| \le \eta, \\ E_{c_2(1-\varepsilon)}(t, x; \tau, \xi) \exp\{c_1'(t-\tau)^{1-q_1}|x_1' - \xi_1'|^{q_1}\} & \text{при } \left| \dfrac{x_1' - \xi_1'}{x_1 - \xi_1} \right| > \eta. \end{cases}$$

Доведення аналітичної продовжуваності інших ядер K_m, $m \ge 3$, проводиться заміною інтегрування за першою змінною по дійсній осі інтегруванням по відповідних ламаних за допомогою аналогічних оцінок. У підсумку одержуємо оцінки

$$\left|K_m(t, z^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)})\right| \le C_m(\varepsilon)(t-\tau)^{-M-1+m\alpha/(2b)} \times$$

$$\times \begin{cases} E_{c_2(1-\varepsilon m)}(t, x; \tau, \xi) & \text{при } \left|\dfrac{x_1'-\xi_1'}{x_1-\xi_1}\right| \le \eta, \\ E_{c_2(1-\varepsilon m)}(t, x; \tau, \xi)\exp\left\{c_1'(t-\tau)^{1-q_1}|x_1'-\xi_1'|^{q_1}\right\} & \text{при } \left|\dfrac{x_1'-\xi_1'}{x_1-\xi_1}\right| > \eta, \end{cases}$$

$$m \le \frac{2b(M+1)}{\alpha}.$$

У першому випадку оцінки всіх повторних ядер K_m (і для $m > 2b(M+1)/\alpha$) фактично збігаються з оцінками в дійсній області. Тому ряд

$$\varphi(t, z^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)}) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(t, z^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)}) \tag{15}$$

рівномірно збіжний щодо $z^{(1)}$, $\zeta^{(1)}$ з $\Omega_{\hat{V}_1}$ і, отже, є аналітичною функцією від z_1, ζ_1. При цьому для φ справджується оцінка

$$\left|\varphi(t, z^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)})\right| \le C(t-\tau)^{-M-1+\alpha/(2b)} E_{c_3}(t, x; \tau, \xi).$$

У другому випадку оцінка повторних ядер K_m з $m > 2b(M+1)/\alpha$ та встановлення рівномірної збіжності ряду (15) здійснюється аналогічно випадку параболічної за Петровським системи в [3]. При цьому

$$\left|\varphi(t, z^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)})\right| \le C(t-\tau)^{-M-1+\alpha/(2b)} E_{c_3}(t, x; \tau, \xi) \times$$

$$\times \exp\left\{c_1'(t-\tau)^{1-q_1}|x_1'-\xi_1'|^{q_1}\right\}. \tag{16}$$

За допомогою отриманих оцінок для φ й оцінки (5) для Z_0 аналогічно повторним ядрам вивчається другий член з формули (3). В результаті встановлюється аналітичність ФМРЗК Z за змінними z_1, ζ_1 та оцінки

$$\left|Z(t, z^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)})\right| \le C(t-\tau)^{-M} \times$$

$$\times \begin{cases} E_c(t, x; \tau, \xi), & \left|\dfrac{x_1'-\xi_1'}{x_1-\xi_1}\right| \le \eta, \\ E_c(t, x; \tau, \xi)\exp\left\{c'(t-\tau)^{1-q_1}|x_1'-\xi_1'|^{q_1}\right\}, & \left|\dfrac{x_1'-\xi_1'}{x_1-\xi_1}\right| > \eta. \end{cases}$$

Зауважимо, що ФМРЗК Z при $t > \tau$ має неперервні похідні $\partial_x^k Z$, $\|k\| < 2b$, аналітичні за змінними z_1, ζ_1 і для яких

$$\left|\partial_{z^{(1)}}^k Z(t, z^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)})\right| \le C_k(t-\tau)^{-M-\|k\|/(2b)} \times$$

$$\times E_c(t, x; \tau, \xi)\exp\left\{c'(t-\tau)^{1-q_1}|x_1'-\xi_1'|^{q_1}\right\}. \tag{17}$$

Це легко встановлюється за допомогою зображення

$$Z(t, z^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)}) = Z_0(t, z^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)}; \zeta^{(1)}) +$$

$$+ \int_\tau^t d\beta \int_\Gamma ds_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} Z_0(t, z^{(1)}; \beta, s^{(1)}; s^{(1)})\varphi(\beta, s^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)})\, dy_{(1)},$$

в якому Γ_1 — контур, показаний на рис. 1, на відрізку KL $y_1' = \xi_1' + (x_1' - \xi_1')\dfrac{\beta - \tau}{t - \tau}$, z_1 змінюється у заштрихованій області. Застосувавши до цього зображення диференціювання вигляду $\partial^k_{z^{(1)}}$, $\|k\| < 2b$, і використавши оцінки (5), (16) і міркування, наведені у другому випадку, одержимо оцінки (17).

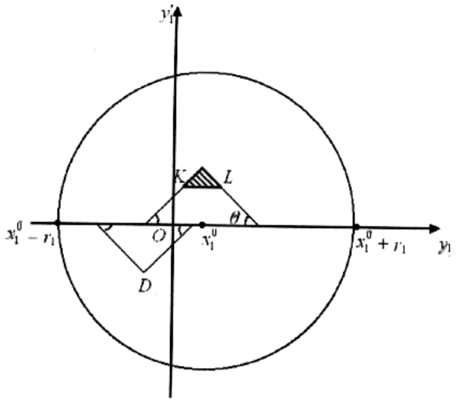

Рис. 1

ФМРЗК Z для системи (1) можна аналітично продовжити за кожною з просторових змінних так само, як це зроблено вище за першою змінною. Тоді на підставі леми Осгуда [8, с. 13] матимемо її аналітичне продовження за сукупністю змінних.

3. ***Доведення теореми*** **2.** Як і при доведенні теореми 1, обмежимось аналітичним продовженням розв'язку за першою просторовою змінною.

При виконанні припущень α_1, α_2 і α_3, згідно з властивістю 2 ФМРЗК [6, с. 63], для регулярного в області $[0, T] \times U$ розв'язку системи (1) правильною є формула

$$u(t, x) = \int\limits_U Z(t, x; 0, \xi) u(0, \xi) d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\partial U} \sum_{j=1}^n B^j[Z(t, x; \tau, \xi), u(\tau, \xi)] \nu_j \, dS_\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_U Z(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \qquad (t, x) \in [0, T] \times U, \tag{18}$$

де $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — орт зовнішньої нормалі до межі ∂U паралелепіпеда U, $B^j[Z, u]$ — білінійна форма, яка містить похідні вигляду $\partial^k_\xi Z$ і $\partial^k_\xi u$, $\|k\| < 2b$.

Згідно з властивістю нормальності матриці Z [7, с. 93] матриця

$$Z^*(\tau, \xi; t, x) \equiv \overline{Z}'(t, x; \tau, \xi), \qquad 0 \le \tau < t \le T, \qquad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

де штрих означає транспонування матриці, а риска — комплексне спряження, є ФМРЗК для системи, спряженої до (1). Звідси та з теореми 1 випливає аналітичність за змінними z_1 і ζ_1 похідних $\partial^k_{\zeta^{(1)}} Z(t, z^{(1)}; \tau, \zeta^{(1)})$, $\|k\| < 2b$, та правильність для них оцінок, аналогічних оцінкам (17).

Покладемо у формулі (18) $z^{(1)}$ замість x. Тоді аналітичність по z_1 першого доданка правої частини цієї формули випливає з аналітичності $Z(t, z^{(1)}; 0, \xi)$ при $t > 0$, неперервності $u(0, \xi)$ та обмеженості області інтегрування.

Із рівномірної щодо $\delta > 0$ обмеженості функцій

$$g_\delta(t, z^{(1)}) \equiv \int_0^{t-\delta} d\tau \int_{\partial U} \sum_{j=1}^n B^j [Z(t, z^{(1)}; \tau, \xi) u(\tau, \xi)] \nu_j \, dS_\xi,$$

яка легко встановлюється, на підставі теореми Монтеля [9, с. 368] маємо компактність сукупності g_δ, $\delta > 0$. Виділяючи з неї рівномірно збіжну послідовність $\{g_{\delta_k}, k \geq 1\}$, одержуємо, що її границя

$$g(t, z^{(1)}) \equiv \int_0^{t} d\tau \int_{\partial U} \sum_{j=1}^n B^j [Z(t, z^{(1)}; \tau, \xi) u(\tau, \xi)] \nu_j \, dS_\xi,$$

є аналітичною за z_1 функцією.

Аналітичне продовження третього доданка з правої частини (18) здійснюється таким способом. Розглядається послідовність інтегралів

$$I_\delta(t, z^{(1)}) \equiv \int_0^{t-\delta} d\tau \int_U Z(t, z^{(1)}; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \qquad \delta > 0.$$

Згідно з припущенням щодо f і властивостями Z функції I_δ є аналітичними по z_1, а їх підінтегральна функція допускає аналітичне продовження в комплексну область за змінною ξ_1. Враховуючи це, інтегрування в I_δ по ξ_1 по відрізку дійсної осі замінимо інтегруванням по ламаній $DABCE$ (рис. 2). Тоді легко встановлюється рівномірна щодо δ обмеженість інтегралів I_δ, і за теоремою Монтеля матимемо аналітичність по z_1 інтеграла

$$\int_0^t d\tau \int_U Z(t, z^{(1)}; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi.$$

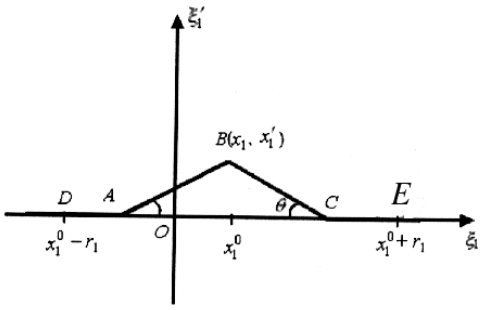

Рис. 2

1. *Петровский И. Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. Моск. ун-та. Математика и механика. – 1938. – **1**, № 7. – С. 1–72.
2. *Эйдельман С. Д.* Об аналитичности решений параболических систем // Докл. АН СССР. – 1955. – **103**, № 1. – С. 27–30.
3. *Эйдельман С. Д.* О фундаментальных решениях параболических систем // Мат. сб. – 1956. – **38**, № 1. – С. 51–92.
4. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
5. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР. – 1960. – **133**, № 1. – С. 40–43.
6. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-Параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1968. – Вып. 1. – С. 3–175, 271–273.
7. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel etc.: Birkhäuser, 2004. – 390 p.
8. *Ганнинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных переменных. – М.: Мир, 1969. – 395 с.
9. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Т. 1. Начала теории. – М.: Наука, 1967. – 486 с.

Одержано 19.10.2005