УДК 517.9

В. С. Мельник
(Ин-т прикл. системн. анализа НАН Украины и М-ва образования и науки Украины, Киев)

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ОПЕРАТОРНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. I

Topological methods of the investigation of operator inclusions in Banach spaces are developed. The Kee Fan generalized inequality is proved and critical points of many-valued mappings in topological spaces are investigated.

Розробляються топологічні методи дослідження операторних включень у банахових просторах. Доведено узагальнену нерівність Кі Фаня та досліджено критичні точки багатозначних відображень у топологічних просторах.

1. Введение. Постановка задачи. Хорошо известна роль операторных и топологических методов в теории нелинейных уравнений в частных производных [1 – 3]. При изучении дифференциальных уравнений в частных производных возникает необходимость в обобщении методов [1 – 3] на операторные включения в банаховых пространствах [4, 5]. Кроме того, операторные включения часто возникают при исследовании вариационных неравенств. В настоящей работе представлено дальнейшее развитие методов [5 – 7].

Пусть X — банахово пространство, X^* — его топологическое двойственное, $\langle\cdot,\cdot\rangle_X : X^*\times X \to \mathbf{R}$ — каноническая форма, $A : X \rightrightarrows X^*$ — многозначное отображение, $gr A = \{(v, y)\in X^*\times X \,|\, v\in A(y)\}$ — его график, $D(A) = \{y\in X \,|\, A(y)\neq\varnothing\}$ — эффективное множество. Отображение A называется строгим, если $D(A) = X$. С каждым многозначным отображением $A : X \rightrightarrows X^*$ свяжем верхнюю $a_+(y, v) = [A(y), v]_+ = \sup\limits_{d\in A(y)}\langle d, v\rangle_X$ и нижнюю $a_-(y, v) = [A(y), v]_- = \inf\limits_{d\in A(y)}\langle d, v\rangle_X$ формы на $X\times X$, а также верхнюю $\|A(y)\|_+ = \sup\limits_{d\in A(y)}\|d\|_{X^*}$ и нижнюю $\|A(y)\|_- = \sup\limits_{d\in A(y)}\|d\|_{X^*}$ нормы оператора A, причем если $y\notin D(A)$, то соответственно полагаем $a_+(y, v) = a_-(y, v) = 0 \;\; \forall\, v\in X$, $\|A(y)\|_+ = \|A(y)\|_- = 0$. Многозначному оператору $A : X \rightrightarrows X^*$ соответствует отображение $\overline{\mathrm{co}}^{*} A : X \rightrightarrows X^*$, определяемое соотношением $\overline{\mathrm{co}}^{*} A(y) = \overline{\mathrm{co}}^{*}(A(y))$, где символ $\overline{}^{*}$ означает замыкание множества $\mathrm{co}\, A(y)$ в $\sigma(X^*; X)$-топологии пространства X^*, причем $D(A) = D(\overline{\mathrm{co}}^{*} A)$. Обозначим через $C_V(X^*)$ совокупность всех непустых $*$-слабо замкнутых выпуклых подмножеств пространства X^*.

Простыми вычислениями проверяется справедливость следующего утверждения.

Предложение 1. *Пусть* $A, B : X \rightrightarrows X^*$ *— строгие отображения. Тогда для* $y, v, v_1, v_2 \in X$ *справедливы следующие свойства*:

1) *функционал* $X \ni w \mapsto a_+(y, w)$ *— выпуклый, положительно однородный, полунепрерывный снизу*;

2) $[A(y), v_1]_+ + [A(y), v_2]_- \le [A(y), v_1+v_2]_+ \le [A(y), v_1]_+ + [A(y), v_2]_+$, $[A(y), v_1]_- + [A(y), v_2]_- \le [A(y), v_1+v_2]_- \le [A(y), v_1]_- + [A(y), v_2]_+$;

3) $[A(y)+B(y), v]_+ = [A(y), v]_+ + [B(y), v]_+$, $\quad [A(y)+B(y), v]_- = [A(y), v]_- + [B(y), v]_-$;

4) $[A(y), w]_+ = [B(y), w]_+ \quad \forall w \in X \Leftrightarrow \overline{\mathrm{co}}^{*} A(y) = \overline{\mathrm{co}}^{*} B(y)$, $\quad [A(y), w]_+ \geq \langle d, w \rangle_X \quad \forall w \in X \Leftrightarrow d \in \overline{\mathrm{co}}^{*} A(y)$;

5) $[\![A(y), v]\!]_+ \leq \|A(y)\|_+ \|v\|_X$, $[\![A(y), v]\!]_- \leq \|A(y)\|_- \|v\|_X$, *где* $[\![A(y), v]\!]_+ = \sup\limits_{d \in A(y)} |\langle d, v \rangle_X|$, $\quad [\![A(y), v]\!]_- = \inf\limits_{d \in A(y)} |\langle d, v \rangle_X|$;

6) *функционал* $\|\cdot\|_+ : C_V(X^*) \to \mathbf{R}_+$ *определяет норму на ограниченных подмножествах из* $C_V(X^*)$;

7) *функционал* $\|\cdot\|_- : C_V(X^*) \to \mathbf{R}_+$ *корректно определен, причем*:

а) $0 \in A(y) \in C_V(X^*) \Leftrightarrow \|A(y)\|_- = 0$;

б) $\|\alpha A(y)\|_- = |\alpha| \|A(y)\|_-$;

в) $\|A(y) + B(y)\|_- \leq \|A(y)\|_- + \|B(y)\|_-$;

8) $d_H(A(y), B(y)) \geq \big| \|A(y)\|_+ - \|B(y)\|_+ \big|$, $\quad d_H(A(y), B(y)) \geq \big| \|A(y)\|_- - \|B(y)\|_- \big|$, $\|A(y) - B(y)\|_+ \geq \big| \|A(y)\|_+ - \|B(y)\|_- \big|$, $\quad \|A(y) - B(y)\|_- \geq \|A(y)\|_- - \|B(y)\|_+$, *где* d_H — *метрика Хаусдорфа.*

***Замечание* 1.** Несмотря на то что функционал $\|\cdot\|_+ : C_V(X^*) \to \mathbf{R}_+$ задает норму на ограниченных подмножествах $C_V(X^*)$, порожденная этой нормой метрика $d(A(y), B(y)) = \|A(y) - B(y)\|_+$ имеет ряд патологических свойств. В частности, $d(A(y), B(y)) = 0$ тогда и только тогда, когда $A(y) = B(y)$ — одноточечные множества. Поэтому более естественной метрической структурой на $C_V(X^*)$ является структура метрического пространства с метрикой Хаусдорфа.

Пусть V, W — банаховы пространства, $A : V \rightrightarrows V^*$, $A : W \rightrightarrows W^*$ — многозначные отображения. Предполагаем, что пространство X с нормой $\|y\|_X = \|y\|_V + \|y\|_W$ плотно в V и в W. В этом случае $X^* = V^* + W^*$.

В работе рассматриваются операторные включения

$$A(y) + B(y) \ni f. \tag{1}$$

Элемент $y \in X$, удовлетворяющий (1), называется строгим решением включения и, соответственно, слабым решением (1), если выполняется неравенство

$$[A(y), w]_+ + [B(y), w]_+ \geq \langle f, w \rangle_X \qquad \forall\, w \in X. \tag{2}$$

Отметим, что каждое строгое решение является слабым, но не наоборот.

2. Классы отображений. В этом пункте вводятся и изучаются основные конструкции многозначных отображений, действующих из банахова пространства X в сопряженное X^*. Для упрощения выкладок ограничимся строгими отображениями. При этом заметим, что $[A(y), v]_+ = [\overline{\mathrm{co}}^{*} A(y), v]_+$, $[A(y), v]_- = [\overline{\mathrm{co}}^{*} A(y), v]_- \;\; \forall\, y, v \in X$, $\|\overline{\mathrm{co}}^{*} A(y)\|_+ = \|A(y)\|_+$, а если пространство X рефлексивно, то $\|\overline{\mathrm{co}}^{*} A(y)\|_- = \|A(y)\|_-$, а также

$$[A(y), v]_+ \geq \langle d, v \rangle_X \qquad \forall\, v \in D \subset X \Leftrightarrow \overline{\mathrm{co}}^{*} A(y),$$

где D — всюду плотное множество, $A(y)$ — ограниченное множество в X^*.

Определение 1. *Отображение* $A : X \rightrightarrows X^*$ *называется*:

а) λ-*псевдомонотонным, если из того, что* $y_n \to y$ *слабо в* X, *и неравенства*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_n, y_n - y\rangle_X \le 0, \tag{3}$$

где $d_n \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A(y)$, *следует существование подпоследовательностей* $\{y_m\} \subset \subset \{y_n\}$, $\{d_m\} \subset \{d_n\}$, *для которых*

$$\underline{\lim_{m\to\infty}} \langle d_m, y_m - v\rangle_X \ge [A(y), y - v]_- \qquad \forall\, v \in X; \tag{4}$$

б) λ_0*-псевдомонотонным, если из* $y_n \to y$ *слабо в* X, $\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A(y_n) \ni d_n \to d$ $*$*-слабо в* X^* *и неравенства* (3) *получаем* (4).

***Замечание* 2.** Идея перехода к подпоследовательностям в определении 1 позаимствована у И. В. Скрыпника [1].

***Замечание* 3.** Очевидно, каждое λ-псевдомонотонное отображение является λ_0-псевдомонотонным. Для ограниченных отображений верна и обратная импликация. Действительно, пусть $A : X \rightrightarrows X^*$ — λ_0-псевдомонотонное отображение, $y_n \to y$ слабо в X, имеет место (3), где $d_n \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A(y_n)$. Из ограниченности оператора A непосредственно следует ограниченность $\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A$, а значит, и последовательности $\{d_n\}$ в X^*. Следовательно, найдутся подпоследовательности $\{d_m\} \subset \{d_n\}$ и, соответственно, $\{y_m\} \subset \{y_n\}$ такие, что $d_m \to d$ $*$-слабо в X^*, и при этом

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \langle d_m, y_m - y\rangle_X \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_n, y_n - y\rangle_X \le 0.$$

Однако оператор A — λ_0-псевдомонотонный, поэтому найдется еще одна подпоследовательность (сохраним для нее прежнее обозначение), для которой

$$\underline{\lim_{m\to\infty}} \langle d_m, y_m - v\rangle_X \ge [A(y), y - v]_- \qquad \forall\, v \in X,$$

что и доказывает нужное утверждение. (Обратим внимание, что для классических определений (без перехода к подпоследовательностям) это утверждение проблематично.)

В работе [4] введен класс обобщенно псевдомонотонных операторов. Оператор $A : X \rightrightarrows X^*$ называется псевдомонотонным, если:

1) $A(y) \in C_V(X^*)$ и $A(y)$ ограничено в X^* $\forall\, y \in D(A)$;

2) для каждой пары последовательностей $\{y_n\}$, $\{d_n\}$ такой, что $d_n \in \in A(y_n)$, $y_n \to y$ слабо в X, $d_n \to d$ $*$-слабо в X^*, и неравенства (4) имеем $d \in \in A(y)$ и $\langle d_n, y_n\rangle_X \to \langle d, y\rangle_X$.

Предложение 2. *Каждый обобщенно псевдомонотонный оператор является* λ_0*-псевдомонотонным.*

Доказательство. Пусть $y_n \to y$ слабо в X, $A(y_n) \ni d_n \to d$ $*$-слабо в X^* и выполняется (3). Тогда в силу обобщенной псевдомонотонности $\langle d_n, y_n\rangle_X \to \to \langle d, y\rangle_X$, $d \in A(y)$, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \langle d_n, y_n - v\rangle_X = \langle d, y - v\rangle_X \ge [A(y), y - v]_- \qquad \forall\, v \in X.$$

Предложение 2 не является обратимым, тем не менее, справедливо следующее утверждение.

Предложение 3. *Пусть* $A : X \rightrightarrows X^*$ — λ_0*-псевдомонотонный оператор. Тогда имеет место следующее свойство*:

из $y_n \to y$ *слабо в* X, $\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A(y_n) \ni d_n \to d$ $*$*-слабо в* X^* *и неравенства* (3) *вытекает существование таких подпоследовательностей* $\{y_m\} \subset \{y_n\}$, $\{d_m\} \subset \{d_n\}$, *что* $\langle d_m, y_m\rangle_X \to \langle d, y\rangle_X$, *причем* $d \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A(y)$.

Доказательство. Пусть $\{y_n\}$, $\{d_n\}$ — требуемые последовательности, следовательно, можно выделить такие подпоследовательности $\{y_m\}$, $\{d_m\}$, для которых выполняется неравенство (4). Полагая в последнем $v = y$, получаем $\langle d_m, y_m - y\rangle_X \to 0$ или $\langle d_m, y_m\rangle_X \to \langle d, y\rangle_X$. При этом

$$\langle d, y-v\rangle_X \;=\; \lim_{m\to\infty} \langle d_m, y_m - v\rangle_X \;\geq\; [A(y), y-v]_- \qquad \forall\, v \in X.$$

Отсюда из предложения 1 получаем $d \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A(y)$.

Предложение 4. *Пусть* $A : X \rightrightarrows X^*$ — *ограниченнозначное* λ*-псевдомонотонное отображение. Тогда справедливо следующее свойство*: *из* $y_n \to y$ *слабо в* X *и неравенства* (3) *вытекает существование таких подпоследовательностей* $\{y_m\}$, $\{d_m\}$, *что для каждого* $v \in X$ *найдется* $\zeta(v) \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A(y)$, *для которого*

$$\underline{\lim}_{m\to\infty} \langle d_m, y_m - v\rangle_X \;\geq\; \langle \zeta(v), y-v\rangle_X. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $y_n \to y$ слабо в X, $d_n \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A(y_n)$ и справедливо (3). Тогда, выделяя соответствующие подпоследовательности, получаем

$$\underline{\lim}_{m\to\infty} \langle d_m, y_m - v\rangle_X \;\geq\; [A(y), y-v]_- \qquad \forall\, v \in X. \tag{6}$$

Следующее утверждение является вариантом обобщенной теоремы Вейерштрасса [8].

Лемма 1. *Пусть* X — *банахово пространство,* $K \subset X^*$ — $*$*-замкнутое множество,* $L : X^* \to \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \bigcup \{+\infty\}$ — $*$*-полукомпактный снизу функционал. Пусть, кроме того, либо множество* K *ограничено, либо*

$$\lim_{\|v\|_{X^*}\to\infty} L(v) \;=\; +\infty.$$

Тогда функционал L *ограничен снизу на* K, *достигает на* K *точной нижней грани* m *и множество* $E = \{v \in K \,|\, L(v) = m\}$ $*$*-компактно в* X^*.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 9.3 из [8].

Множество $\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A(y)$ $*$-слабо замкнуто и ограничено, а функционал $X^* \ni \ni w \mapsto \langle w, y-v\rangle_X$ $\forall\, v \in X$ $*$-слабо полунепрерывен снизу. Тогда из леммы 1 следует, что существует $\zeta(v) \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A(y)$ такое, что $[A(y), y-v]_- = = \langle \zeta(v), y-v\rangle_X$. Отсюда и из неравенства (6) получаем (5).

Предложение 4 доказано.

Предложение 5. *Пусть* $A, B : X \rightrightarrows X^*$ — λ*-псевдомонотонные отображения и одно из них ограниченнозначное. Тогда отображение* $C = A + B : X \rightrightarrows X^*$ $(C(y) = A(y) + B(y))$ *является* λ*-псевдомонотонным.*

Определение 2. *Многозначные отображения* $A, B : X \rightrightarrows X^*$ *называются совместно* s*-ограниченными, если для любого* $M > 0$ *существует* $K(M) > 0$

такое, что из $\|y\|_X \le M$, $\langle d_1(y)+d_2(y),\, y\rangle_X \le M$, *где* $d_1(y) \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y)$, $d_2(y) \in$ $\in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B(y)$, *следует или* $\|d_1(y)\|_{X^*} \le K(M)$, *или* $\|d_2(y)\|_{X^*} \le K(M)$.

Предложение 6. *Пусть* $A, B : X \rightrightarrows X^*$ — λ_0*-псевдомонотонные совместно* s*-ограниченные отображения. Тогда отображение* $C = A + B$ λ_0*-псевдомонотонное.*

Доказательство (предложение 5 доказывается аналогично). Пусть $y_n \to y$ слабо в X, $\overset{*}{\overline{\text{co}}}\, C(y_n) \ni d_n \to d$ $*$-слабо в X^* и имеет место неравенство (3).

Лемма 2. *В условиях предложения* 6 *справедливо равенство*

$$\overset{*}{\overline{\text{co}}}\,(A(y)+B(y)) = \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y) + \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B(y) \qquad \forall\, y \in X.$$

Доказательство. Известно [9], что $\text{co}\,(A(y)+B(y)) = \text{co}\, A(y) + \text{co}\, B(y)$, следовательно,

$$\overset{*}{\overline{\text{co}}}\,(A(y)+B(y)) \supset \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y) + \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B(y)$$

и, более того,

$$\overset{*}{\overline{\text{co}}}\,(A(y)+B(y)) = \overset{*}{\overline{\text{co}}}\,(\overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y) + \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B(y)).$$

Действительно, в силу свойств верхней формы

$$[\overset{*}{\overline{\text{co}}}\,(A(y)+B(y)),\, w]_+ = [A(y)+B(y),\, w]_+ = [A(y),\, w]_+ + [B(y),\, w]_+ =$$
$$= [\overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y),\, w]_+ + [\overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B(y),\, w]_+ = [\overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y) + \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B(y),\, w]_+ =$$
$$= [\overset{*}{\overline{\text{co}}}\,(\overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y) + \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B(y)),\, w]_+ \qquad \forall\, w \in X.$$

Тогда согласно предложению 1

$$\overset{*}{\overline{\text{co}}}\,(A(y)+B(y)) = \overset{*}{\overline{\text{co}}}\,(\overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y) + \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B(y)).$$

Таким образом, для доказательства леммы достаточно установить замкнутость множества $\overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y) + \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B(y)$ в $\sigma(X^*; X)$-топологии. Пусть

$$\xi_n \in \text{co}\,(\overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y) + \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B(y)) = \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y) + \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B(y),$$

$\xi_n \to \xi$ $*$-слабо в X^*, причем $\xi_n = \xi_n' + \xi_n''$, где $\xi_n' \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y)$, $\xi_n'' \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B(y)$. Из ограниченности $\{\zeta_n\}$ в X^* получаем оценку

$$\langle \xi_n' + \xi_n'',\, y\rangle_X \le M,$$

откуда в силу совместной *s-ограниченности пары отображений* $(A; B)$ имеем или $\|\xi_n'\|_{X^*} \le M$, или $\|\xi_n''\|_{X^*} \le M$.

В первом случае из $\{\xi_n'\}$ можно выделить подпоследовательность (сохраним для нее то же обозначение) такую, что $\xi_n' \to \xi'$ $*$-слабо в X^*, причем $\xi' \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y)$. Но тогда $\xi_n'' = \xi_n - \xi_n' \to \xi - \xi' = \xi''$ $*$-слабо в X^* и $\xi'' \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B(y)$, т. е. $\xi = \xi' + \xi'' \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y) + \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B(y)$, что и доказывает замкнутость $\overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y) + \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B(y)$.

Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 следует, что $\overline{\text{co}}^{\,*} C(y_n) = \overline{\text{co}}^{\,*} A(y_n) + \overline{\text{co}}^{\,*} B(y_n)$ и $d_n = d_n' + d_n''$, $d_n' \in \overline{\text{co}}^{\,*} A(y_n)$, $d_n'' \in \overline{\text{co}}^{\,*} B(y_n)$, при этом $\|y_n\|_X \leq M$, $\langle d_n' + d_n'', y_n \rangle_X \leq M$. Значит, существует $K = K(M) > 0$ такое, что или $\|d_n'\|_{X^*} \leq K$, или $\|d_n''\|_{X^*} \leq K$. Тогда, переходя к подпоследовательностям, можно считать, что $d_n' \to d'$ $*$-слабо в X^*, или $d_n'' \to d''$ $*$-слабо в X^*.

Из неравенства (3) следует

$$0 \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_n, y_n - y \rangle_X \geq \underline{\lim}_{n\to\infty} \langle d_n'', y_n - y \rangle_X + \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_n', y_n - y \rangle_X .$$

Выберем подпоследовательность $\{y_m\} \subset \{y_n\}$ так, чтобы

$$0 \geq \underline{\lim}_{n\to\infty} \langle d_n'', y_n - y \rangle_X + \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_n', y_n - y \rangle_X \geq$$

$$\geq \lim_{m\to\infty} \langle d_m'', y_m - y \rangle_X + \overline{\lim_{m\to\infty}} \langle d_m', y_m - y \rangle_X . \tag{7}$$

Отсюда следует, что выполнено одно из двух условий

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \langle d_m', y_m - y \rangle_X \leq 0, \qquad \overline{\lim_{m\to\infty}} \langle d_m'', y_m - y \rangle_X \leq 0.$$

Без ограничения общности будем считать, что $\overline{\lim_{m\to\infty}} \langle d_m', y_m - y \rangle_X \leq 0$. Тогда из λ_0-псевдомонотонности оператора A заключаем, что

$$\underline{\lim}_{m_k\to\infty} \langle d_{m_k}', y_{m_k} - v \rangle_X \geq [A(y), y - v]_- \qquad \forall\, v \in X, \tag{8}$$

где $\{y_{m_k}\} \subset \{y_m\}$ — соответствующая подпоследовательность. Подставляя в последнее неравенство $y = v$, получаем

$$\langle d_{m_k}', y_{m_k} - y \rangle_X \to 0.$$

Следовательно, из (7) находим

$$\overline{\lim_{m_k\to\infty}} \langle d_{m_k}'', y_{m_k} - y \rangle_X \leq 0,$$

значит, найдется такая подпоследовательность $\{y_{m_k'}\} \subset \{y_{m_k}\}$, для которой

$$\underline{\lim}_{m_k'\to\infty} \langle d_{m_k'}'', y_{m_k'} - v \rangle_X \geq [B(y), y - v]_- \qquad \forall\, v \in X. \tag{9}$$

Учитывая (8) и (9), окончательно имеем

$$\underline{\lim}_{m_k'\to\infty} \langle d_{m_k'}, y_{m_k'} - v \rangle_X \geq \underline{\lim}_{m_k'\to\infty} \langle d_{m_k'}', y_{m_k'} - v \rangle_X + \underline{\lim}_{m_k'\to\infty} \langle d_{m_k'}'', y_{m_k'} - v \rangle_X \geq$$

$$\geq \underline{\lim}_{m_k\to\infty} \langle d_{m_k}', y_{m_k} - v \rangle_X + \underline{\lim}_{m_k'\to\infty} \langle d_{m_k'}'', y_{m_k'} - v \rangle_X \geq [A(y) + B(y), y - v]_- \quad \forall\, v \in X.$$

Предложение 6 доказано.

Предложение 7. *Пусть* $A : X \rightrightarrows X^*$ — λ_0*-псевдомонотонный оператор, а отображение* $B : X \to X^*$ *имеет следующие свойства*:

а) *отображение* $\overline{\text{co}}^{\,*} B : X \to X^*$ — *компактное, т. е. образ ограниченного в* X *множества предкомпактен в* X^*;

б) *график* $\overline{\text{co}}^{\,*} B$ *замкнут в* $X \times X^*$ *относительно слабой топологии в* X *и сильной в* X^*.

Тогда отображение $C = A + B$ λ_0*-псевдомонотонное.*

Доказательство. Пусть $y_n \to y$ слабо в X, $d_n \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, C(y_n)$, $d_n \to d$ $*$-слабо в X^* и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_n, y_n - y\rangle_X \le 0.$$

Поскольку оператор $B: X \to X^*$ ограничен, то (см. доказательство леммы 2) $\overset{*}{\overline{\text{co}}}\, C = \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A + \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B$, следовательно, $d_n = d_n' + d_n''$, $d_n' \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y_n)$, $d_n'' \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B(y_n)$. В силу ограниченности B можно считать, что $d_n'' \to d''$ $*$-слабо в X^*, а значит, $d_n' \to d' = d - d''$ $*$-слабо в X^*.

Из неравенства (3), переходя к подпоследовательности $\{y_m\} \subset \{y_n\}$, находим

$$0 \ge \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_n, y_n - y\rangle_X \ge \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_n', y_n - y\rangle_X + \underline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_n'', y_n - y\rangle_X \ge$$

$$\ge \overline{\lim_{m\to\infty}} \langle d_m', y_m - y\rangle_X + \lim_{m\to\infty} \langle d_m'', y_m - y\rangle_X. \tag{10}$$

В силу условия а) можно считать, что $d_m'' \to d''$ сильно в X^* и, более того, $d'' \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B(y)$ (условие б)). Тогда

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \langle d_m', y_m - y\rangle_X \le 0,$$

и снова переходя к подпоследовательностям (сохраним прежнее обозначение), в силу λ_0-псевдомонотонности получаем

$$\underline{\lim_{m\to\infty}} \langle d_m', y_m - v\rangle_X \ge [A(y), y - v]_- \qquad \forall\, v \in X,$$

$$\underline{\lim_{m\to\infty}} \langle d_m, y_m - v\rangle_X = \underline{\lim_{m\to\infty}} \langle d_m', y_m - v\rangle_X + \lim_{m\to\infty} \langle d_m'', y_m - y\rangle_X \ge$$

$$\ge [A(y), y - v]_- + \langle d'', y - v\rangle_X \ge [C(y), y - v]_- \qquad \forall\, v \in X.$$

Предложение 7 доказано.

Предложение 8. *Пусть* $A: X \rightrightarrows X^*$ — λ_0*-псевдомонотонный оператор,* X *компактно и плотно в банаховом пространстве* Y, $\overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B: Y \rightrightarrows Y^*$ — *локально ограниченное демизамкнутое отображение* (*т. е. график* $\overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B$ *замкнут в* $Y \times Y^*$ *относительно сильной топологии в* Y *и* $*$*-слабой в* Y^*). *Тогда* $C = A + B$ — λ_0*-псевдомонотонное отображение.*

Доказательство. Пусть выполнено неравенство (3). Оператор $\overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B$ локально ограничен, т. е. для любого $y \in X$ существуют $N > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\left\|\overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B(\xi)\right\|_+ \le N \quad \text{при} \quad \|\xi - y\|_X \le \varepsilon.$$

Очевидно, локально ограниченный оператор ограниченнозначный, поэтому

$$\overset{*}{\overline{\text{co}}}\, C(y) = \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y) + \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B(y) \quad \text{и} \quad d_n = d_n' + d_n'', \quad d_n' \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y_n), \quad d_n'' \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, B(y_n).$$

Последовательность $y_n \to y$ сильно в Y и в силу локальной ограниченности

$\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, B$ последовательность $\{d_n''\}$ ограничена в Y^* (и в X^*). Значит, найдется подпоследовательность $\{d_m''\} \subset \{d_n''\}$ такая, что $d_m'' \to d''$ $*$-слабо в Y^*. В условиях предложения оператор вложения $I^* : Y^* \to X^*$ непрерывен, а значит, I^* непрерывен и в $*$-слабых топологиях [10]. Следовательно, $d_m'' \to d''$ $*$-слабо в X^*, тогда $d_m' = d_m - d_m'' \to d' = d - d''$ $*$-слабо в X^*. Из неравенства (9) получаем одно из двух соотношений

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \langle d_m', y_m - y\rangle_X \le 0, \qquad \overline{\lim_{m\to\infty}} \langle d_m'', y_m - y\rangle_X \le 0.$$

В силу компактности вложения $X \subset Y$ $y_m \to y$ сильно в Y, а последовательность $\{d_m''\}$ ограничена в Y^*, поэтому $\langle d_m'', y_m - y\rangle_X \to 0$. Тогда из (10) следует $\overline{\lim_{m_k\to\infty}} \langle d_m', y_m - v\rangle_X \le 0$, откуда после перехода к подпоследовательности имеем

$$\underline{\lim}_{m_k\to\infty} \langle d_{m_k}', y_{m_k} - v\rangle_X \ge [A(y), y - v]_- \qquad \forall\, v \in X.$$

Далее, поскольку оператор $\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, B$ демизамкнут, то $d'' \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, B(y)$ и

$$\underline{\lim}_{m_k\to\infty} \langle d_{m_k}, y_{m_k} - v\rangle_X = \underline{\lim}_{m_k\to\infty} \langle d_{m_k}', y_{m_k} - v\rangle_X + \underline{\lim}_{m_k\to\infty} \langle d_{m_k}'', y_{m_k} - v\rangle_X \ge$$

$$\ge [A(y), y - v]_- + [B(y), y - v]_- = [C(y), y - v]_- \qquad \forall\, v \in X.$$

Предложение 8 доказано.

Определение 3. *Оператор* $A : X \rightrightarrows X^*$ *называется*:

а) *радиально непрерывным сверху, если для любых* $x, h \in X$

$$\overline{\lim_{t\to+0}} [A(x + th), h]_+ \le [A(x), h]_+;$$

б) *радиально полунепрерывным, если для любых* $x, h \in X$

$$\overline{\lim_{t\to+0}} [A(x + th), h]_- \le [A(x), h]_+.$$

(Очевидно, справедлива импликация а) $\Rightarrow$ б).)

Предложение 9. *Пусть* $A : X \rightrightarrows X^*$ — *полунепрерывный сверху оператор из пространства* X *с сильной топологией в* X^* *с топологией* $\sigma(X^*; X)$. *Тогда* A — *радиально полунепрерывен.*

Доказательство. Каждый полунепрерывный сверху оператор из пространства X с сильной топологией в X^* с топологией $\sigma(X^*; X)$ является хеминепрерывным сверху [11], т. е. из того, что $x_n \to x$ сильно, следует

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} [A(x_n), v]_+ \le [A(x), v]_+ \qquad \forall\, v \in X.$$

Осталось заметить, что хеминепрерывный сверху оператор является радиально непрерывным сверху, а значит, и радиально полунепрерывным.

Обозначим через Φ_0 класс непрерывных функций $C : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ таких, что $t^{-1}C(r_1; tr_2) \to 0$ при $t \to +0$ $\forall r_1, r_2 \ge 0$.

Определение 4. *Отображение* $A : X \rightrightarrows X^*$ *называется*:

а) *оператором с полуограниченной вариацией* (*п. о. в.*), *если для любого* $R >$

> 0 *и произвольных* $y_1, y_2 \in X$ *таких, что* $\|y_i\|_X \le R$, $i = 1, 2$, *выполняется неравенство*

$$[A(y_1), y_1 - y_2]_- \ge [A(y_2), y_1 - y_2]_+ - C\Big(R; \|y_1 - y_2\|'_X\Big), \tag{11}$$

где $C \in \Phi_0$, $\|\cdot\|'_X$ — *компактная норма на* X;

б) *оператором с* l-*п. о. в., если вместо* (11) *выполняется следующее*:

$$[A(y_1), y_1 - y_2]_- \ge [A(y_2), y_1 - y_2]_- - C\Big(R; \|y_1 - y_2\|'_X\Big). \tag{12}$$

Предложение 10. *Пусть* $A = A_0 + A_1 : X \rightrightarrows X^*$, *где* $A_0 : X \rightrightarrows X^*$ — *монотонное отображение, а оператор* $A_1 : X \rightrightarrows X^*$ *имеет следующие свойства*:

1) *существует линейное нормированное пространство* Y, *в которое* X *вложено компактно и плотно*;

2) *оператор* $A_1 : Y \rightrightarrows Y^*$ *однозначный и локально полиномиальный, т. е. для любого* $R > 0$ *найдутся натуральное* $n = n(R)$ *и полином* $P_R(t) = \sum_{0<\alpha\le n} \lambda_\alpha(R) t^\alpha$ *с непрерывными коэффициентами* $\lambda_\alpha(R) \ge 0$ *такие, что справедлива оценка*

$$\|A_1(y_1) - A_1(y_2)\|_{Y^*} \le P_R\big(\|y_1 - y_2\|_Y\big) \quad \forall \|y_i\|_Y \le R, \ i = 1, 2.$$

Тогда A — *оператор с п. о. в.*

Предложение 11. *Пусть в предложении* 10 *оператор* $A_0 : X \rightrightarrows X^*$ l-*монотонный, т. е.*

$$[A_0(y_1), y_1 - y_2]_- \ge [A_0(y_2), y_1 - y_2]_- \quad \forall y_1, y_2 \in X,$$

а вместо условия 2 *выполняется следующее*:

2′) *отображение* (*многозначное*) $A_1 : Y \rightrightarrows Y^*$ *локально полиномиальное в том смысле, что для любого* $R > 0$ *существуют* $n = n(R)$ *и полином* $P_R(t)$, *для которых*

$$\operatorname{dist}(A_1(y_1), A_1(y_2)) \le P_R\big(\|y_1 - y_2\|_Y\big), \quad \|y_i\|_Y \le R, \quad i = 1, 2. \tag{13}$$

Тогда $A = A_0 + A_1$ — *оператор с* l-*п. о. в.*

Докажем предложение 11 (предложение 10 доказывается аналогично). Поскольку

$$[A_0(y_1), y_1 - y_2]_- \ge [A_0(y_2), y_1 - y_2]_- \quad \forall y_1, y_2 \in X,$$

достаточно оценить $[A_1(y_1), y_1 - y_2]_- - [A_1(y_2), y_1 - y_2]_-$. Для произвольных $d_1 \in A_1(y_1)$, $d_2 \in A_1(y_2)$ находим

$$\begin{aligned}\langle d_2, y_1 - y_2\rangle_X - \langle d_1, y_1 - y_2\rangle_X &= \langle d_2, y_1 - y_2\rangle_Y - \langle d_1, y_1 - y_2\rangle_Y \le \\ &\le \|d_1 - d_2\|_{Y^*} \|y_1 - y_2\|_Y,\end{aligned}$$

следовательно,

$$[A_1(y_2), y_1 - y_2]_- - [A_1(y_1), y_1 - y_2]_- \le \operatorname{dist}(A_1(y_1), A_1(y_2)) \|y_1 - y_2\|_Y.$$

Отсюда и из оценки (13) при $\|y_i\|_Y \le R$, $i = 1, 2$ (соответственно $\|y_i\|_X \le \hat{R}$), получаем

$$[A_1(y_1), y_1 - y_2]_- \ge [A_1(y_2), y_1 - y_2]_- - C\Big(\hat{R}; \|y_1 - y_2\|'_X\Big),$$

где $\|\cdot\|'_X = \|\cdot\|_Y$, $C(R,t) = P_R(t)t$. Нетрудно проверить, что $C \in \Phi_0$.

Предложение 11 доказано.

Предложение 12. *Пусть выполнено одно из двух условий*:

1) $A : X \rightrightarrows X^*$ — *радиально полунепрерывный оператор с п. о. в.*;

2) $A : X \rightrightarrows X^*$ — *радиально непрерывный сверху оператор с l-п. о. в. и компактными значениями*.

Тогда A — λ_0-псевдомонотонное отображение.

Доказательство. Пусть $y_n \to y$ слабо в X, $\overline{\mathrm{co}}^{*} A(y_n) \ni d_n \to d$ $*$-слабо в X^* и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \langle d_n, y_n - y\rangle_X \le 0$.

Используя свойство п. о. в. оператора A, заключаем, что

$$\langle d_n, y_n - v\rangle_X \ \ge\ [A(y_n),\, y_n - v]_- \ \ge\ [A(v),\, y_n - v]_+ - C\Big(R; \|y_n - v\|'_X\Big) \qquad \forall\, v \in X.$$

Функция $X \ni w \mapsto [A(v), w]_+$ выпуклая и полунепрерывная снизу, а значит, и слабо полунепрерывная снизу. Поэтому, подставляя в последнее неравенство $v = y$ и переходя к пределу, с учетом свойств функции C получаем $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \langle d_n, y_n - y\rangle_X \ge 0$, т. е. $\langle d_n, y_n - y\rangle_X \to 0$.

Для произвольных $h \in X$ и $\tau \in [0, 1]$ положим $w(\tau) = \tau h + (1-\tau) y$, тогда

$$\langle d_n, y_n - w(\tau)\rangle_X \ \ge\ [A(w(\tau)),\, y_n - w(\tau)]_+ - C\Big(R; \|y_n - w(\tau)\|'_X\Big),$$

или в пределе

$$\tau \underline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_n, y - h\rangle_X \ \ge\ \tau[A(w(\tau)), y - h]_+ - C\Big(R; \tau\|y - h\|'_X\Big).$$

Разделив полученное неравенство на τ и перейдя к пределу по $\tau \to +0$, с учетом радиальной полунепрерывности и свойств функции C получим

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_n, y - h\rangle_X \ \ge\ \underline{\lim_{\tau\to+0}} [A(w(\tau)), y - h]_+ + \lim_{\tau\to+0} \frac{1}{\tau} C\Big(R; \tau\|y - h\|'_X\Big) \ \ge$$

$$\ge\ [A(y), y - h]_- \qquad \forall\, h \in X.$$

А поскольку $\langle d_n, y_n - y\rangle_X \to 0$, то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_n, y_n - h\rangle_X \ =\ \underline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_n, y - h\rangle_X \ \ge\ [A(y), y - h]_- \qquad \forall\, h \in X,$$

что доказывает первое утверждение предложения 12.

Остановимся на основных отличительных моментах второго утверждения. Из l-п. о. в. оператора A заключаем, что

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_n, y_n - v\rangle_X \ \ge\ \underline{\lim_{n\to\infty}} [A(y_n),\, y_n - v]_- \ \ge$$

$$\ge\ \underline{\lim_{n\to\infty}} [A(v),\, y_n - v]_- - C\Big(R; \|y - v\|'_X\Big). \tag{14}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (14). Докажем, что функция $X \ni$ $\ni h \mapsto [A(v), h]_-$ слабо полунепрерывна снизу для любого $v \in X$. Пусть $z_n \to z$ слабо в X, тогда при каждом $n = 1, 2, \ldots$ существует $\xi_n \in \overline{\mathrm{co}}^{*} A(v)$ такое, что $[A(v), z_n]_- = \langle \xi_n, z_n\rangle_X$.

Из последовательности $\{\xi_n; z_n\}$ выделим подпоследовательность $\{\xi_m; z_m\}$ такую, что

$$\varliminf_{n\to\infty} [A(v), z_n]_- = \varliminf_{n\to\infty} \langle \xi_n, z_n \rangle_X = \lim_{m\to\infty} \langle \xi_m, z_m \rangle_X .$$

В силу компактности множества $\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A(v)$ можно считать, что $\xi_m \to \xi$ сильно в X^*, причем $\xi \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A(v)$. Следовательно,

$$\varliminf_{n\to\infty} [A(v), z_n]_- = \lim_{m\to\infty} \langle \xi_m, z_m \rangle_X = \langle \xi, z \rangle_X = [A(v), z]_-,$$

что доказывает слабую полунепрерывность снизу $h \mapsto [A(v), h]_-$.

В таком случае из (14) получаем неравенства

$$\varliminf_{n\to\infty} \langle d_n, y_n - v \rangle_X \geq \varliminf_{n\to\infty} [A(y_n), y_n - v]_- \geq [A(v), y - v]_- - C\Big(R; \|y - v\|'_X\Big),$$

подставляя в которые $v = y$, имеем $\langle d_n, y_n - y \rangle_X \to 0$, поэтому

$$\varliminf_{n\to\infty} \langle d_n, y_n - v \rangle_X \geq [A(v), y - w]_- - C\Big(R; \|y - v\|'_X\Big) \qquad \forall\, v \in X.$$

Подставляя в последнее неравенство $v = tw + (1 - t)y$, $w \in X$, $t \in [0, 1]$, деля результат на t и переходя к пределу при $t \to +0$, с учетом радиальной непрерывности сверху находим

$$\varliminf_{n\to\infty} \langle d_n, y_n - w \rangle_X \geq [A(y), y - w]_- \qquad \forall\, w \in X.$$

Предложение 12 доказано.

1. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Наука, 1990. – 442 с.
2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
3. *Browder F. E.* On a principle of H. Brecis and its applications // J. Funct. Anal. – 1977. – **25**. – P. 356 – 365.
4. *Browder F. E., Hess P.* Nonlinear mapping of monotone type in Banach spaces // Funct. Anal. – 1972. – **11**, № 2. – P. 251 – 294.
5. *Мельник В. С.* Мультивариационные неравенства и операторные включения в банаховых пространствах с отображением класса $(S)_+$ // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1513 – 1523.
6. *Мельник В. С.* К теории топологической степени многозначных отображений // Докл. РАН. – 1998. – **361**, № 2. – С. 164 – 168.
7. *Melnik V. S., Vakulenko A. N.* On topological method in the theory of operator inclusions with dencely defined mapping in Banach spaces // Nonlinear Boundary Value Problems. – 2000. – **10**. – P. 125 – 142.
8. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных отображений. – М.: Наука, 1972. – 415 с.
9. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
10. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977. – 357 с.
11. *Обэн Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. – М.: Мир, 1988. – 510 с.

Получено 31.10.2005