УДК 519.41/47

П. П. Барышовец (Нац. авиац. ун-т, Киев)

КОНЕЧНЫЕ *A*-ГРУППЫ С ДОПОЛНЯЕМЫМИ НЕМЕТАЦИКЛИЧЕСКИМИ ПОДГРУППАМИ

We study groups G, satisfying the following conditions:

1) G — is a finite soluble group with nontrivial prime-power metacyclic second commutator subgroup;

2) all Sylow subgroups of G are elementary Abelian.

We describe the structure of these groups with complemented nonmetacyclic subgroup.

Вивчаються групи G, які задовольняють такі умови:

1) G — скінченна розв'язна група з неодиничним примарним метациклічним другим комутантом;

2) всі силовські підгрупи із G елементарні абелеві.

Наведено опис будови таких груп з доповнюваними неметациклічними підгрупами.

1. Метациклической называется группа, являющаяся расширением циклической (в частности, единичной) группы с помощью циклической. Свойства циклических (метациклических) или нециклических (неметациклических) подгрупп во многих случаях определяют строение всей группы. Эти свойства могут относиться к отдельным или ко всем подгруппам такого вида. Например, в [1] доказано, что конечная группа, являющаяся произведением двух своих метациклических подгрупп, разрешима. Что касается изучения групп, в которых все метациклические (неметациклические) подгруппы имеют определенное свойство, то в качестве такого свойства выбиралась, например, примарность индекса [2], нормальность [3] и дополняемость [4]. Группы с условием дополняемости для тех или иных систем подгрупп изучали Ф. Холл, Н. В. Черникова (Баева), С. Н. Черников, Ю. М. Горчаков, Д. И. Зайцев, Я. П. Сысак, Н. С. Черников и др. (см. [5]). Полное описание произвольных (как конечных, так и бесконечных) групп, в которых дополняемы все подгруппы, получивших название вполне факторизуемых, было получено в работе [6] (см. также [7 – 9]). В работах [10, 11] было показано, что произвольные вполне факторизуемые группы совпадают с группами, в которых дополняемы все абелевы подгруппы. Для конечных групп полная факторизуемость следует из условия дополняемости одних только элементарных абелевых подгрупп [10] или даже циклических элементарных абелевых подгрупп [11]. В связи с этими результатами по инициативе С. Н. Черникова были выделены и изучались группы с теми или иными системами дополняемых нециклических подгрупп (см. [12]). При этом в полученных классах групп наряду с не вполне факторизуемыми появились и неразрешимые группы [4]. В [13 – 15] автором начато изучение конечных разрешимых групп с абелевыми силовскими подгруппами, имеющих свойство дополняемости неметациклических подгрупп. Оказалось, в частности, что их ступень разрешимости не превышает числа 3. В настоящей работе завершается изучение таких групп.

Доказана следующая теорема.

Теорема. *В конечной группе G с абелевыми силовскими подгруппами и неединичным метациклическим примарным вторым коммутантом все неметациклические подгруппы дополняемы тогда и только тогда, когда она является группой одного из следующих типов*:

1) $G = G'' \leftthreetimes (T \leftthreetimes \langle d \rangle)$, *где* $G'' = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$, $|a_1| = |a_2| = p$, p — *нечетное простое число*, $p > 5$, $T = \langle b \rangle \times L$, $\langle b, d \rangle' = \langle b \rangle$, $d^{-1} L d = L$, $\langle L, d \rangle' = Z(G')$, $d^{-1} a_1 d = a_2$, $d^{-1} a_2 d = a_1$, $|d| = 2$, $(2p, |b|) = 1$, $p^2 \nmid |L|$, $[G'', L_p] = 1$, $N_G(\langle a_1 \rangle) = N_G(\langle a_2 \rangle) = Y = G'' \leftthreetimes T$, $N_G(\langle a_1, a_2 \rangle) = \langle G'', L, d \rangle$, *группа* L *мета-*

циклична, а $T\langle d\rangle$ *вполне факторизуема и если* x *— элемент простого порядка из* $\langle b\rangle$, *то* $\langle G'', x, d\rangle$ *— минимальная не вполне факторизуемая группа*;

кроме того, выполняется одно из следующих утверждений:

а) $|b|$ *— простое число и* $[L, G''] = 1$; *если же* $[L, G''] \neq 1$, *то* $p \nmid |L'|$ *и* $L/C_L(Y')$ *— циклическая группа*;

б) $|b|$ *— составное число,* $p \nmid |L'|$, $(|b|^2, |L|)/|b|$ *и* $Y/C_Y(Y')$ *— циклическая группа*;

2) $G = ((G'' \times C) \leftthreetimes \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle d\rangle$, *где* $G'' = \langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle$, $|a_1| = |a_2| = p$, p *— простое число,* $p > 3$, $\langle b\rangle = \langle b_1\rangle \times \langle b_2\rangle \times \langle b_3\rangle$, $|d| = 2$, *элементы из* $\langle b_1\rangle$ *действуют на* G'' *неприводимо,* $b^{-1}Cb = C$, $d^{-1}Cd = C$, $[\langle b_1, b_2\rangle, C] = 1$, $d^{-1}a_1d = a_2$, $d^{-1}a_2d = a_1$, $[G'', L_p] = 1$, $L = \langle b_3, C\rangle$, $4 \nmid |L|$, $p^2 \nmid |L|$, $C\langle b, d\rangle$, $\langle G'', C, b_2, b_3\rangle$ *и* $\langle G'', b_3, d\rangle$ *— вполне факторизуемые группы*;

кроме того, выполняется одно из следующих утверждений:

а) $\langle b_2, b_3\rangle = 1$, $\langle\langle k, d\rangle', C, d\rangle$ *— метациклическая группа*;

б) $b_2 = 1$, $[b_3, d] = 1$, $\langle L, d\rangle$ *— метациклическая группа,* $p \nmid |\langle L, d\rangle'|$, $(|C/C'|, |b_3|) = 1$ *и если* $2\,||b_3|$, *то* $2 \nmid |S/C_S(C')|$, *а если* $2\,||C|$, *то группа* $\Phi/C_\Phi(\Phi')$ *циклическая, где* $S = \langle L, d\rangle$, $\Phi = G''S$;

в) $b_2 \neq 1$, $\langle b_2, d\rangle' = b_2$, $[b_3, d] = 1$, $\langle a_1, a_2, C, b_2, b_3\rangle$ *— группа типа* 1 *настоящей теоремы.*

В неметациклической группе со свойством: любая неметациклическая подгруппа дополняема, все неметациклические подгруппы и неметациклические фактор-группы имеют то же свойство. Кроме того, фактор-группа такой группы по ее неметациклическому нормальному делителю вполне факторизуема.

Конечные разрешимые группы с абелевыми силовскими подгруппами называются A-группами [16]. В A-группах пересечение центра с коммутантом тривиально и коммутанты всех нормальных делителей дополняемы [16].

Ниже рассматриваются только A-группы. Поэтому силовские p-подгруппы коммутантов G' и H' будем обозначать через G'_p и H'_p.

2. *Доказательство теоремы.* *Необходимость.* Пусть G — конечная группа с элементарными абелевыми силовскими подгруппами, в которой дополняемы все неметациклические подгруппы, а второй коммутант G'' является примарной неединичной метациклической группой. Тогда в силу леммы 1 [14] G'' — нециклическая группа порядка p^2, где p — простое число. Согласно лемме 3 [14]

$$G = (B \times C) \leftthreetimes D, \tag{1}$$

где D — абелева группа, $B \lhd G$, $C \lhd G$, $G'' \subseteq B \subseteq G'$ и $C_G(G'') = G'' \times C$. Пусть U — дополнение подгруппы $K = G''$ в BD. Тогда U можно отождествить с подгруппой группы $GL(2, p)$. Поскольку K — минимальный нормальный делитель группы G в силу леммы 2 [14], U — неприводимая подгруппа из $GL(2, p)$. Обозначим $H = KU$.

1. U — импримитивная подгруппа группы $GL(2, p)$, т. е. $K = \langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle$, $|a_1| = |a_2| = p$ и для любого элемента $x \in U$ подгруппа $x^{-1}\langle a_i\rangle x$, $i = 1, 2$, совпадает или с $\langle a_1\rangle$, или с $\langle a_2\rangle$. Тогда, как показано в [18, с. 149], U содержит абелеву подгруппу N индекса 2, являющуюся нормализатором подгрупп $\langle a_1\rangle$ и $\langle a_2\rangle$ в U. Поскольку силовские подгруппы группы G элементарные абелевы, то $U = N \leftthreetimes \langle d\rangle$, где $|d| = 2$. Тогда можно так выбрать образующие a_1

и a_2, что $d^{-1}a_1d = a_2$, $d^{-1}a_2d = a_1$. Очевидно, $[a_1a_2, d] = 1$ и поэтому $\langle K, d\rangle' = \langle a_3\rangle$, $|a_3| = p$, $\langle a_3\rangle \neq \langle a_1\rangle$ и $\langle a_3\rangle \neq \langle a_2\rangle$. Подгруппы $\langle a_1a_2\rangle$ и $\langle a_3\rangle$ являются единственными подгруппами порядка p из K, нормализуемыми элементом d (т. е. содержащими d в своем нормализаторе). Если $[x, d] = 1$ для некоторого элемента $x \in N$, то группа $\langle K, d, x\rangle$ вследствие результатов [19] вполне факторизуема. Но тогда K разлагается в прямое произведение подгрупп порядка p, нормализуемых обоими элементами: x и d. Из изложенного следует, что $x^{-1}\langle a_1a_2\rangle x = \langle a_1a_2\rangle$ и $x^{-1}\langle a_3\rangle x = \langle a_3\rangle$. Тогда x трансформирует все элементы из K, отличные от 1, в одну и ту же степень [20, с. 9, 10], и все подгруппы порядка p из K нормализуются элементом x. Обратно, если какой-нибудь элемент из U трансформирует все неединичные элементы из K в одну и ту же степень, то он содержится в центре подгруппы U. Поскольку G/G'' — вполне факторизуемая группа, N разлагается в прямое произведение нормальных в U подгрупп простых порядков. Тогда $N = N_1 \times N_2$, где $\langle N_1, d\rangle = N_1$, $\langle N_2, d\rangle' = 1$, т. е. $N_2 = Z(U)$. Далее, так как U — неприводимая подгруппа из $GL(2, p)$, $Z(U)$ — циклическая группа [21, с. 12]. Итак, N_2 — циклическая группа.

Элементы из N_1 трансформируют a_1 и a_2 в степени с различными неединичными показателями, а элементы из N_2 — с одинаковыми (не равными 1). Если Q — нециклическая силовская подгруппа из N_1, то любая подгруппа из Q нормализуема элементом d. Действительно, тогда $\langle Q, d\rangle' = Q$, и так как $|d| = 2$, d переводит все неединичные элементы из Q в одну и ту же степень. KQ не является группой Фробениуса. Пусть $1 \neq y \in K$, $1 \neq z \in Q$, $[y, z] = 1$. Тогда $|\langle K, z\rangle'| = p$. Но $K\langle z\rangle \lhd H = KU$. Значит, $\langle Kz\rangle' \lhd H$. Получили противоречие с минимальностью нормального делителя K группы H. Значит, N_1 — циклическая группа.

Если $[C, N_1] \neq 1$, то у группы $\langle C, N_1, d\rangle$ коммутант неабелев и, значит, $C \cap G'' \neq 1$. Это противоречит выбору подгруппы C. Следовательно, $[C, N_1] = 1$ и $N_1 \neq 1$, иначе $(H/K)' = 1$ вопреки условию. Обозначим $N_1 = \langle b\rangle$. Тогда $G = ((K \leftthreetimes \langle b\rangle) \times C) \leftthreetimes (N_2 \times \langle d\rangle)$. Далее, обозначим $CN_2 = L$. Очевидно, $[b, L] = 1$, $d^{-1}Ld = L$ и $\langle L, d\rangle' = C_1 = Z(G')$, $L' \lhd G$. Группу $\langle b, L\rangle = \langle b\rangle \times L$ обозначим через T.

Пусть F — подгруппа из G, удовлетворяющая условию $F = F_1 \leftthreetimes (F_2 \times L)$, где $F_1 = K \cap F$ — подгруппа порядка p из F, нормальная в F, а F_2 — подгруппа простого индекса (например, q) из $\langle b\rangle$ (если $|b|$ — простое число q, то $F_2 = 1$) (условие α). Подгруппа F, очевидно, содержит подгруппу C из $C_G(G'')$.

Предположим, что подгруппа F дополняема в G. Пусть $G = FX$, $F \cap X = 1$. Тогда подгруппа F/C дополняема в группе $\overline{G} = G/C$ (см. разложение (1)) подгруппой $XC/C \simeq X$. Поэтому в дальнейших рассуждениях (до получения противоречия с дополняемостью подгруппы F) можно считать, что $C = 1$, и использовать все предыдущие обозначения, подразумевая под G группу $BD \simeq G/C$. Поскольку K — нормальная силовская p-подгруппа группы G (при условии, что $C = 1$), то $|K \cap X| = p$ и $X_p \lhd X$. Отметим, что $|X| = 2pq$. Далее, так как $G = FX$, $F \cap X = 1$ и $F \subset Y = N_G(\langle a_1\rangle) = N_G(\langle a_2\rangle)$, то $Y = FX_1$, $F \cap X_1 = 1$, где $X_1 = X \cap Y$ — группа порядка pq. Тогда согласно теореме 4.7 [22] (гл. VI) существуют силовские q-подгруппы Q, Q_1 и Q_2 групп Y, F и X_1

такие, что $Q = Q_1 Q_2$. Если $Q_1 \neq 1$, то элементы из Q_1 вследствие выбора группы F трансформируют элементы из K в одинаковые степени. Элементы из Q_2 не могут иметь такого свойства. В противном случае элементы из Q будут трансформировать элементы из K в одинаковые степени, а это противоречит соотношению $q \,\big|\, |b|$. Далее, $x \notin Y$ и $G = KU$, причем в силу предположения $C = 1$ U является холловской p'-подгруппой группы G. Но тогда без потери общности можно считать, что подгруппа W порядка $2q$ из X содержится в U, а подгруппа W_1 порядка q — в N. Поскольку элементы порядка q из X трансформируют элементы из $\langle a_1 \rangle$ и $\langle a_2 \rangle$ в разные степени, то $W_1 \not\subset Z(U)$. Но N — абелева группа, а $X \not\subset Y = N_G(K_1) = N_G(K_2)$. Значит, W — неабелева группа. Тогда $W_1 \lhd U$ и, значит, $(KW_1)' \lhd G$, а поэтому $(KW_1)' = K$. Отсюда следует, что подгруппа порядка pq из X неабелева. Получаем, что X — группа порядка $2pq$ с неабелевым коммутантом. Противоречие. Следовательно, подгруппа F недополняема в G. В дальнейших рассуждениях снова C — произвольная группа.

Из доказанного утверждения следует, что F — метациклическая группа. Отсюда, в частности, следует, что группа L метациклична. Поскольку $\langle b \rangle$ действует регулярно на K, то $p \nmid |b|$. Из недополняемости подгрупп порядка p из K в G следует, что $p^2 \nmid |L|$. Силовские подгруппы группы G абелевы и поэтому $[K, L_p] = 1$.

Пусть $|b| = q$ — простое число. Как показано выше, подгруппы F вида $F = \overline{K} \leftthreetimes L$, где $\overline{K} = F \cap K$, $|\overline{K}| = p$, недополняемы в G и поэтому метациклические. Если $[L, K] = 1$, то $F = \overline{K} \times L$. Поскольку $|\overline{K}| = p$, $|L| \,\not\vdots\, p^2$, то F — метациклическая группа. Пусть $[L, K] \neq 1$. Если $p \,\big|\, |L'|$, то группа KL содержит неметациклическую подгруппу порядка $p \,\big|\, |L|$. Значит, $p \nmid |L'|$. Тогда коммутант группы $F = \overline{K} \leftthreetimes L$ с $|\overline{K}| = p$ циклический. Далее, так как $Y = KT = K(\langle b \rangle \times CN_2)$, то $C_Y(K) = C_Y(\overline{K})$ для любой подгруппы $\overline{K}$ порядка p из K. Поэтому если $L / C_L(Y')$ — нециклическая группа, то и $L / C_L(F')$ — нециклическая группа. Это значит, что в L существует нециклическая подгруппа R порядка r^2 такая, что $R \cap C_L(F') = 1$. Но $R \subset L \subset F$ и, следовательно, группа $F / C_F(F')$ нециклическая. Согласно лемме 1 [13] F — неметациклическая группа. Из полученного противоречия следует, что $L / C_L(Y')$ — циклическая группа.

Пусть теперь $|b|$ — составное число. Тогда $p \nmid |L'|$, иначе Y содержит неметациклическую подгруппу F, удовлетворяющую условию α, коммутант которой делится на p^2. Далее, $(|b|^2, |L|) \,\big|\, |b|$, иначе Y содержит неметациклическую подгруппу F, удовлетворяющую условию α, порядок которой делится на q^3, где q — простое число, такое, что $q \,\big|\, (|b|, |L|)$ и $q^2 \,\big|\, |L|$. Предположим, что $Y / C_Y(Y')$ — нециклическая группа. Тогда в Y существует нециклическая подгруппа R порядка r^2 такая, что $R \cap C_Y(Y') = 1$. Очевидно, $r \neq p$. Поскольку $Y = K \leftthreetimes (\langle b \rangle \times L)$, а $Y' = K \times L'$, то $r^2 \,\big|\, |T / C_T(Y')|$. Поэтому, не теряя общности, можно считать, что $R \subset T = \langle b \rangle \times L$. Пусть $\overline{T} = \langle \overline{b} \rangle \times L$, где $\langle \overline{b} \rangle$ — подгруппа индекса q из $\langle b \rangle$, $q \neq r$. Очевидно, $\overline{T} \supset R$. Если $\overline{K}$ — подгруппа порядка p, нормальная в Y, то в силу соотношения $C_Y(Y') =$

$= C_Y(\overline{K}L')$ получаем, что в группе $F = \overline{K}\overline{T}$ пересечение $R \cap C_F(F')$ тривиально. Значит, $F/C_F(F')$ — нециклическая группа и группа F неметациклическая. Из полученного противоречия следует, что $Y/C_Y(Y')$ — нециклическая группа. Нетрудно убедиться, что G — группа типа 1 теоремы.

2. U — примитивная подгруппа группы $GL(2, p)$. Рассмотрим снова подгруппу $H = K \leftthreetimes U$. Согласно лемме 6 [14] U — вполне факторизуемая группа. В силу леммы 4 [14] $U = N \leftthreetimes \langle d \rangle$, где $d^2 = 1$, N — абелева группа.

Предположим, что KN — вполне факторизуемая группа. Тогда $K = \langle a_1 \rangle \times \times \langle a_2 \rangle$, $|a_1| = |a_2| = p$ и $\langle a_1 \rangle \lhd KN$, $a_2 \lhd KN$ [4]. Пусть $1 \neq x \in N$, тогда $dxd^{-1} = \bar{x} \in N$. Далее,

$$x^{-1}d^{-1}\langle a_1 \rangle dx = d^{-1}\bar{x}^{-1}\langle a_1 \rangle \bar{x}d = d^{-1}\langle a_1 \rangle d.$$

Но $d^{-1}\langle a_1 \rangle d \neq \langle a_1 \rangle$, так как $\langle a_1 \rangle \ntriangleleft H$. Если все элементы из N трансформируют a_1 и a_2 в одинаковые степени, то любая подгруппа из K нормальна в KN. Поскольку $K\langle d \rangle$ — вполне факторизуемая группа в силу результатов [7], то в K есть подгруппы порядка p, нормальные относительно d. Тогда они будут нормальны и в группе H вопреки минимальности нормального делителя K в группе G, а значит, и в H. Поэтому в N есть элементы, трансформирующие a_1 и a_2 в разные степени. Тогда $\langle a_1 \rangle$ и $\langle a_2 \rangle$ — единственные N-допустимые подгруппы порядка p из K [20, с. 10]. Значит, $d^{-1}\langle a_1 \rangle d = \langle a_2 \rangle$. Получили противоречие с примитивностью подгруппы U.

Поэтому KN — не вполне факторизуемая группа и содержит группу Миллера – Морено порядка p^2q, $q \,\big|\, |N|$. Тогда N — примитивная подгруппа группы $GL(2, p)$, и поэтому N — циклическая группа в силу леммы 7 [23] и цикличности мультипликативной группы конечного поля. Пусть $N = N_1 \times N_2$, где $N_1 \neq 1$, и для любого элемента x простого порядка из N_1 $K\langle x \rangle$ — группа Миллера – Морено, а KN_2 — вполне факторизуемая группа. Предположим, что $W = \langle K, x, d \rangle$ — группа с абелевым коммутантом, т. е. $[x, d] = 1$. Поскольку G' — неабелева группа, для некоторого из циклических множителей, например, $\overline{N}$ подгруппы N $[\overline{N}, d] \neq 1$. Далее, так как K — минимальный нормальный делитель в H и $K\overline{N} \lhd H$, $\overline{N}$ действует на K регулярно. Но $K\langle \overline{N}, d \rangle$ не является группой Фробениуса с инвариантным множителем K. Поэтому $\langle d \rangle$ действует на K нерегулярно [22, с. 496]. Но $\langle K, d \rangle \lhd W$. Значит, $Z(\langle K, d \rangle) \lhd \lhd W$ вопреки тому, что W содержит группу Миллера – Морено с нециклическим коммутантом порядка p^2. Поэтому $[x, d] \neq 1$ для любого $1 \neq x \in N_1$. Обозначим $N_1 = \langle b_1 \rangle$, $N_2C = L$. Тогда вследствие цикличности группы N и соотношения $C \lhd G$ $\langle b_1, d \rangle' = b_1$ и $d^{-1}Ld = L$. Далее, если $[C, b_1] \neq 1$, то второй коммутант группы $\langle C, b_1, d \rangle$ нетривиален и содержится в C. Поскольку $C \cap G'' = 1$, отсюда следует, что $[C, b_1] = 1$. Тогда $[b_1, L] = 1$ и $G = K \leftthreetimes (T \leftthreetimes \leftthreetimes \langle d \rangle)$, где $K = G'' = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$, $|a_1| = |a_2| = p$, p — простое число, $p > 3$, $T = = NC = (N_1 \times N_2)C = \langle b_1 \rangle \times L$. Вследствие того что $\langle K, d \rangle' = p$, элементы a_1 и a_2 можно выбрать так, что $d^{-1}a_1d = a_2$, $d^{-1}a_2d = a_1$. Так как силовские подгруппы у G абелевы, то $[K, L_p] = 1$. Поскольку $p^4 \nmid G$ (см. следствие [14]), то $p^2 \nmid |L|$.

Далее, $L\langle d\rangle \simeq G/K\langle b_1\rangle$ — вполне факторизуемая группа. Отсюда, вследствие того что $\langle b_1\rangle \lhd \langle b_1, L, d\rangle$, следует полная факторизуемость группы $T\langle d\rangle$. Группы L и KN_2 тоже вполне факторизуемые, поэтому и группа $KL = K(N_2C) = (K\times C)\leftthreetimes N_2$ вполне факторизуема.

Пусть F — подгруппа из G, удовлетворяющая условию $F\supset C$, $|F\cap K| = p$ (условие β). Предположим, что подгруппа F дополняема в $G: G = FX$, $F\cap X = 1$. Тогда в фактор-группе $\overline{G} = G/C \simeq K(N\leftthreetimes\langle d\rangle)$ подгруппа F/C дополняема подгруппой $XC/C \simeq X$. В дальнейших рассуждениях без потери общности можно считать (до получения противоречия с дополняемостью подгруппы F), что $C=1$, и использовать все предыдущие обозначения. Поскольку $(|b_1|, 2pN_2) = 1$, то $\langle b_1\rangle$ — холловская подгруппа группы G. Тогда $|X\cap K| = p$ и, так как $X\cap K\lhd X$, X или F содержит абелеву подгруппу T порядка pq, где $q\,|\,|b|$. Но T содержится в холловской $\{p, q\}$-подгруппе из $K\langle b_1\rangle$, являющейся группой Фробениуса. Из полученного противоречия следует, что подгруппа F недополняема в G.

Пусть снова C — произвольная группа. Если $N_2 = 1$, то $\langle K, d\rangle' C\langle d\rangle$ — подгруппа, содержащая C и имеющая с K пересечение порядка p. Значит, $\langle K, d\rangle' C\langle d\rangle$ — метациклическая группа.

Если $N_2\neq 1$, но $[N_2, d] = 1$, то обозначим $N_2 = \langle b_3\rangle$, $S = \langle L, d\rangle$. Тогда S/C — абелева группа. Из доказанного выше о подгруппах F следует, что S — метациклическая группа и $p\nmid |S'|$. Если $r\,|\,(|C/C'|, |b_3|)$, то KS содержит неметациклическую подгруппу порядка pqr^2, где $q\,|\,|C'|$. Но тогда KS содержит неметациклическую подгруппу F, удовлетворяющую условию β. Из полученного противоречия следует, что $(|C/C'|, |b_3|) = 1$. Если $|b_3|$ — четное число и $2\,|\,|S/C_S(C')|$, то KS содержит неметациклическую подгруппу порядка $4pq$, где $q\,|\,|C'|$. Последнее противоречит недополняемости подгрупп, удовлетворяющих условию β из KS. Значит, $2\nmid |S/C_S(C')|$.

Если $[N_2, d]\neq 1$, то из доказанного выше следует, что $\langle G'', C, N_2, d\rangle$ — группа типа 1 теоремы. Отметим, что $N_2 = \langle b_2, b_3\rangle$, где $\langle b_2, d\rangle' = \langle b_2\rangle$, $[b_3, d] = 1$. В обозначениях группы типа 1 роль b играет b_2. За группой $\langle b_3, C\rangle$ сохраняется обозначение L. Таким образом, G — группа типа 2 теоремы.

Достаточность. Нетрудно убедиться, что у группы любого из указанных в теореме типов силовские подгруппы элементарные абелевы и их порядки делят кубы соответствующих простых чисел.

I. Пусть G — группа типа 1. Поскольку G — A-группа, коммутант $C_1 = \langle L, d\rangle'$ в группе $\langle L, d\rangle$ дополняем [16]. Пусть $\langle L, d\rangle = C_1\leftthreetimes M$. Тогда $M = M_1\times M_2$, где $M_1\subset Y = N_G(\langle a_1\rangle) = N_G(\langle a_2\rangle)$. Так как $x^{-1}\langle a_i\rangle x$ для каждого $x\in G$ совпадает либо с $\langle a_1\rangle$, либо с $\langle a_2\rangle$, причем $\langle a_1\rangle \ntriangleleft G$, $\langle a_2\rangle \ntriangleleft G$, то $d_1^{-1}\langle a_1\rangle d_1 = \langle a_2\rangle$, $d_1^{-1}\langle a_2\rangle d_1 = \langle a_1\rangle$, где $\langle d_1\rangle = M_2$. Без потери общности можно считать, что $d_1 = d$. Тогда $G = ((K\leftthreetimes\langle b\rangle)\times C_1)\leftthreetimes(M_1\times\langle d\rangle)$, где $(K\leftthreetimes\langle b\rangle)\times C_1 = G'$, подгруппы $K\leftthreetimes\langle b\rangle$ и C_1 нормальны в G, $[M_1, b] = 1$, элементы из M_1 не трансформируют a_1 и a_2 в степени с различными показателями (не равными 1). Кроме того, $C_1 = Z(G')$.

Если F — подгруппа из G, то возможны следующие случаи:

1. $F\not\subset KT$. Тогда $G = (KT)F$. Поскольку KT — вполне факторизуемая группа, отсюда следует дополняемость F в G.

2. $F \supset K$ или $F \cap K = 1$. Дополняемость F в G следует из дополняемости подгруппы FK в G.

3. $F \subset KT$, $|F \cap K| = p$. Если $\langle K, F, Z(G')\rangle \supset G'$, то $\langle F, Z(G'), K, M_1, d\rangle = G$. Поскольку $\langle K, M, Z(G')\rangle$ — вполне факторизуемая группа, отсюда следует дополняемость в G подгруппы F.

Пусть $\langle K, F, Z(G')\rangle \not\supset G'$. Покажем, что F — метациклическая группа. Если F — абелева, то $F = F_p \times F_{p'}$, где F_p и $F_{p'}$ — холловские p- и p'-подгруппы в F. Так как $F_p \not\supset K$, F_p в силу соотношения $p^2 \nmid |L|$ метациклична. Если R — неметациклическая силовская r-подгруппа из $F_{p'}$, то $r \neq 2$ вследствие метацикличности группы L и соотношения $F \subset Y$. Поскольку $\langle b\rangle$ действует регулярно на K, то $(|b|, r) = 1$. Но $Y/K\langle b\rangle \simeq L$ — метациклическая группа. Отсюда следует метацикличность группы F. Пусть F — неабелева группа. Так как $K \not\subset F$, то $|F''|\,|\,p$. Отсюда и из леммы 8.2 [16] следует, что $F'' = 1$. Если R — неметациклическая силовская r-подгруппа из F, то, очевидно, $r \neq p$, и ввиду метацикличности L $r\,|\,|b|$ и $r^2\,|\,|L|$. Далее, так как $\langle K, F, Z(G')\rangle \not\supset G'$, то $|b| \neq r$, т. е. число $|b|$ составное. Значит, $r^2\,|\,(|b|^2, |L|)$ вопреки соотношению $(|b|^2, |L|)\,|\,|b|$. Следовательно, все силовские подгруппы группы F метациклические. Поскольку $\overline{K} = K \cap F \lhd F$, $F' \lhd F$, то $F' \subset C_{G'}(\overline{K}) = K \times Z(G')$. Тогда и $KF' \subset K \times Z(G')$. Покажем, что F' — циклическая группа. Действительно, очевидно, $p^2 \nmid |F'|$. Так как $F' \subset K \times C_1$, а $C_1 = \langle C_1, M_1, d\rangle'$, из метацикличности группы $\langle M_1, C_1\rangle$ следует, что $r^2 \nmid |F'|$, где r — простое число, $r \neq p$. Значит, F' — циклическая группа.

Если $|b|$ — простое число и $[L, K] = 1$, то $Y = KT = (K \leftthreetimes \langle b\rangle) \times L$. Тогда $F' \subset Y' = K' \times L'$. Значит, $F' \subset \overline{K} \times L'$, где $\overline{K} = K \cap F$. Поскольку $|b|$ — простое число и $\langle K, F, Z(G')\rangle \not\supset G'$, то $K \leftthreetimes \langle b\rangle \cap F = \overline{K}$ и потому $F' = L'$. Тогда $F = \overline{K} \times L$ и в силу соотношения $p^2 \nmid |L|$ и метацикличности группы L группа F тоже метациклична. Пусть $[L, K] \neq 1$. Так как $F \subset K \times L' = Y'$, то $F' = \overline{K} \times L'$. Если F — неметациклическая группа, то в силу леммы [15] она содержит прямое произведение S неабелевых групп порядков pt и rt, причем $pr\,|\,F'$. Но тогда $L_t \cap C_L(Y') = 1$, что противоречит цикличности фактор-группы $L\,|\,C_L(Y')$. Значит, F — метациклическая группа.

Если $|b|$ — составное число, то $C_F(F') = C_Y(F') \cap F$, $C_Y(F') \lhd Y$ и $C_Y(F') \supset C_Y(Y')$. Отсюда, из цикличности группы $Y/C_Y(Y')$ и соотношений

$$F/C_F(F') = F/C_Y(F') \cap F \simeq F \cdot C_Y(F')/C_Y(F') \subset$$
$$\subset Y/C_Y(F') \simeq (Y/C_Y(Y'))/(C_Y(F')/C_Y(Y'))$$

следует цикличность группы $F/C_F(F')$. Значит, F — метациклическая группа.

II. Пусть G — группа одного из типов 2а) или 2б). Если подгруппа F из G удовлетворяет соотношению $F \cap K = 1$ или $F \supset K$, то дополняемость подгруппы F следует из полной факторизуемости группы $\langle C, b, d\rangle$. Пусть $|F \cap K| = p$. Тогда согласно лемме 8.2 [16] $F'' = 1$. Если $\overline{K} = F \cap K$, то $\overline{K} \lhd F$, $F' \lhd F$. Значит, $F' \subset C_G(\overline{K}) = K \times C$. Далее, $F \cap K\langle b_1\rangle = \overline{K}$. Поэтому если $F = \overline{K} \leftthreetimes F_1$, то $F_1 \cap K\langle b_1\rangle = 1$. Следовательно, $\langle F_1, K, b_1\rangle/\langle K, b_1\rangle \simeq F_1/F_1 \cap$

$\bigcap K\langle b_1\rangle \simeq F_1$ — метациклическая группа. Значит, F_1' — циклическая группа. Силовские подгруппы у F метацикличны вследствие метацикличности группы $\langle L, d\rangle$ и приводимости автоморфизмов, индуцируемых F на группе K. Поэтому если F — абелева группа, то она метациклична. Если F — неабелева и $F = \overline{K} \times F_1$, то вследствие метацикличности F_1 и силовской p-подгруппы F отсюда следует метацикличность F. Пусть $[\overline{K}, F_1] \neq 1$.

1. G — группа типа 2а), т. е. $G = \langle K, C, b_1, d\rangle$. Очевидно, $|F/C_F(\overline{K})| = 2$. Значит, $\overline{K} = \langle K, d\rangle'$. Силовские r-подгруппы из F по числам $r \,\|\, |b_1|$ или $r \,\|\, |C|$ действуют на $\overline{K}$ тождественно и потому содержатся в C. Тогда $F \subset \langle \langle K, d\rangle', C, d_1\rangle$, где $|d_1| = 2$, $d_1 \in C$. Отсюда и из метацикличности группы $\langle \langle K, d\rangle', C, d\rangle$ следует метацикличность группы F.

2. G — группа типа 2б), т. е. $G = \big((K \times C) \leftthreetimes \langle b_1, b_3\rangle\big) \leftthreetimes \langle d\rangle$. Поскольку F_1 изоморфна подгруппе группы $\langle C, b_3, d\rangle = L\langle d\rangle$ и $p \nmid |\langle L, d\rangle'|$, а $F' \subset \overline{K}F_1'$, то $p^2 \nmid |F'|$. Из полной факторизуемости группы $\langle C, b, d\rangle$ и метацикличности F_1 следует, что $r^2 \nmid |F'|$, где $r \,\|\, |F_1|$. Значит, F' — циклическая группа. Если $F/C_F(F')$ — нециклическая группа, то для некоторой силовской t-подгруппы T из F порядка t^2 $T \bigcap C_F(F') = 1$. Очевидно, $t \,\|\, |\langle L, d\rangle|$, и если $\overline{K} = K \bigcap F$, то $|T \bigcap C_G(\overline{K})| = t$. Если $t \neq 2$, то в силу соотношения $[K, C] = 1$ порядки подгрупп $|C/C'|$ и $|b_3|$ должны делится на t, что противоречит соотношению $(|C/C'|, |b_3|) = 1$. Значит, $t = 2$. Но тогда вследствие соотношения $4 \nmid |L|$ имеет место только одно из соотношений: $2 \,\|\, |b_3|$ или $2 \,\|\, |C|$. В первом случае получаем противоречие с сотношением $2 \nmid |S/C_S(C')|$, во втором — с цикличностью группы $\Phi/C_\Phi(\Phi')$, где $S = L\langle d\rangle$, $\Phi = KS$. Значит, F — метациклическая группа.

Пусть теперь G — группа типа 2в). Если для подгруппы F из G $F \bigcap K = 1$ или $F \bigcap K = K$, то вследствие полной факторизуемости группы $\langle C, b, d\rangle$ подгруппа F дополняема в G. Пусть $|F \bigcap K| = p$. Если $x \in F$, $|x| / |b_1|$, то $x \in C_G(G'') = G'' \times C$. Пусть π — множество простых чисел, делящих $|b_1|$. Тогда холловская π'-подгруппа из F содержится в холловской π'-подгруппе $G_{\pi'}$ группы G. Поскольку группа $W = \langle a_1, a_2, C, b_2, b_3, d\rangle$ содержит холловскую π'-подгруппу, сопряженную с $G_{\pi'}$, и все элементы порядков, делящих $|b_1|$ и централизующих G'', то W содержит группу, сопряженную с F. Из доказательства достаточности для групп типа 1 следует, что F — метациклическая группа.

Теорема доказана.

1. *Монахов В. С.* Произведение конечных групп, близких к нильпотентным // Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 70 – 100.
2. *Зузук Л. І.* Скінченні недисперсивні групи, у яких всі підгрупи непримарного індексу метациклічні // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 6. – С. 775 – 759.
3. *Коваленко В. І.* Будова скінченних недисперсивних груп, в яких кожна неметациклічна підгрупа нормальна // Там же. – 1996. – **48**, № 6. – С. 1337 – 1342.
4. *Барышовец П. П.* Конечные неразрешимые группы с дополняемыми неметациклическими подгруппами // Там же. – 1987. – **39**, № 5. – С. 547 – 551.
5. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
6. *Баева Н. В.* Вполне факторизуемые группы // Докл. АН СССР. – 1953. – **92**, № 5. – С. 877 – 880.

7. *Черникова Н. В.* Группы с дополняемыми подгруппами // Мат. сб. – 1956. – **39**. – С. 273 – 292.
8. *Черникова Н. В.* К основной теореме о вполне факторизуемых группах // Группы с системами дополняемых подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1972. – С. 49 – 58.
9. *Довженко С. А.* К теореме Н. В. Черниковой о вполне факторизуемых группах // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 6. – С. 854 – 855.
10. *Черников С. Н.* Группы с системами дополняемых подгрупп // Мат. сб. – 1954. – **35**. – С. 93 – 128.
11. *Горчаков Ю. М.* Примитивно факторизуемые группы // Учен. зап. Перм. ун-та. – 1960. – **17**, вып. 2. – С. 15 – 31.
12. *Черников С. Н.* Исследование групп с заданными свойствами подгрупп // Укр. мат. журн. – 1969. – **21**, № 2. – С. 193 – 209.
13. *Барышовец П. П.* О конечных A-группах, в которых все неметациклические подгруппы дополняемы // Там же. – 1988. – **40**, № 3. – С. 297 – 302.
14. *Барышовец П. П.* О конечных A-группах, в которых дополняемы неметациклические подгруппы // Там же. – 1995. – **47**, № 9. – С. 1162 – 1169.
15. *Барышовец П. П.* О конечных A-группах с дополняемыми неметациклическими подгруппами // Там же. – 2002. – **54**, № 7. – С. 1004 – 1007.
16. *Taunt D.* On A-groups // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1949. – **45**, № 1. – P. 24 – 42.
17. *Барышовец П. П.* О конечных A-группах, в которых дополняемы неметациклические подгруппы // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 9. – С. 1162 – 1169.
18. *Зуб О. Н.* Группы, нециклические подгруппы которых дополняемы // Группы с ограничениями для подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1971. – С. 134 – 158.
19. *Маланьина Г. А., Хлебутина В. И., Шевцов Г. С.* Конечные минимальные не вполне факторизуемые группы // Мат. заметки. – 1972. – **12**, № 12. – С. 157 – 162.
20. *Зайцев Д. И.* Нормально факторизуемые группы // Группы с системами дополняемых подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1972. – С. 5 – 34.
21. *Белоногов В. А., Фомин А. П.* Матричные представления в теории конечных групп. – М.: Наука, 1976. – 128 с.
22. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. – Berlin etc.: Springer, 1967. – 793 S.
23. *Супруненко Д. А.* Разрешимые и нильпотентные линейные группы. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1958. – 97 с.

Получено 07.06.2004,
после доработки — 04.02.2005