УДК 519.1

А. Я. Петренюк (Держ. льот. акад. України, Кіровоград)

НЕІСНУВАННЯ ДЕЯКИХ *T*-ФАКТОРИЗАЦІЙ ПОРЯДКУ 12

We investigate the Beineke problem of the existence of T-factorizations of complete graphs. We prove some theorems on the nonexistence of T-factorizations. By using these theorems, we establish the nonexistence of T-factorizations for 32 nonisomorphic admissible trees of order 12.

Досліджується задача Л. Байнеке про існування T-факторизацій повних графів. Доведено кілька теорем про існування T-факторизацій; з їх допомогою встановлено неіснування T-факторизацій для 32 неізоморфних допустимих дерев порядку 12.

1. Формулювання задачі та результати попередників. Нехай T — дерево порядку 12, K_n — повний граф того ж порядку. *T-факторизацією* графа K_n називають таку сукупність дерев $\{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$, що: 1) всі T_i ізоморфні дереву T; 2) всі T_i — підграфи графа K_n і 3) кожне ребро графа K_n належить одному і тільки одному з дерев $T_1, T_2, \ldots, T_k$. Задача полягає в тому, щоб при заданому n для кожного дерева T порядку n з'ясувати, існує T-факторизація графа K_n чи ні.

Цю задачу (*задачу існування* T-факторизацій) поставив Л. Байнеке [1] у 1964 р. Він встановив, що необхідними умовами існування T-факторизації порядку n є парність числа n, $n = 2k$, та виконання нерівності $\Delta(T) \le k$, де $\Delta(T)$ — найвищий степінь вершини у дереві T. Дерева, що задовольняють умови Байнеке, називають *допустимими*.

Ш. Хуанг та А. Роса [2] у 1978 р. розв'язали задачу існування T-факторизацій для всіх $n \le 8$. А. Я. Петренюк [3, 4] розв'язав її у випадку $n = 10$ та, за винятком 20 дерев, у випадку $n = 14$. Дві важливі обставини забезпечили успіх у випадках $n = 10$ та $n = 14$: зручні необхідні умови існування T-факторизацій, знайдені автором статей [3, 4], та біциклічний метод побудови T-факторизацій, з допомогою якого одержано позитивні результати існування.

У цій статті досліджується задача існування T-факторизацій порядку 12. У цьому випадку біциклічний метод побудови не працює [3, 4]. Тому на момент її написання було відомо лише 20 дерев порядку 12, для яких існують T-факторизації. Ці T-факторизації побудовано півобертовим методом у статті [5].

Нижче ми наводимо ряд результатів про неіснування T-факторизацій порядку 12, застосовуючи відомі та знаходячи нові необхідні умови їх існування.

2. Неіснування деяких *T*-факторизацій порядку 12. Нехай T — допустиме дерево порядку 12. Позначимо через $\boldsymbol{d}(T) = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6)$ вектор, де d_i — кількість вершин степеня i у дереві T. Зазначимо, що у роботі [6] знайдено три серії загальних необхідних умов існування T-факторизацій у термінах компонент вектора $\boldsymbol{d}$, дві з яких у випадку $n = 12$ мають вигляд

$$d_2 \ge d_5, \qquad d_2 + 2d_3 \ge d_4. \tag{1}$$

Переглянувши список дерев порядку 12, ми встановили, що у ньому є точно 11 дерев, для яких умови (1) не виконуються і, отже, відповідні їм T-факторизації не існують. Ці дерева наведено у табл. 1.

У першому стовпці містяться вектори $\boldsymbol{d}$ дерев, які перелічуються у третьому стовпці і нумеруються у другому, а в останньому стовпці вказується, внаслідок невиконання якої з двох умов (1) відповідне дерево не допускає T-факторизації.

3. Нова необхідна умова існування T-факторизацій порядку 12. Припустимо, що існує T-факторизація Φ графа K_{12}. *Типом вершини* x графа K_{12} у T-факторизації Φ називають вектор $t(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$, де α_i — кількість компонент T-факторизації Φ, для яких x є вершиною степеня i, $i = 1, \ldots, 6$. Очевидно, що

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 6 \tag{2}$$

та

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5 + 6\alpha_6 = 11. \tag{3}$$

Таблиця 1

d	*N*	*T*	Умова, що не виконується
8 0 3 0 1 0	1	12 13 14 15 16 27 28 39 3A 4B 4C	Перша
	2	27 28 39 3A 7B 7C	
	3	27 28 79 7A 8B 8C	
	4	27 28 79 7A 9B 9C	
8 1 0 3 0 0	5	12 13 14 15 26 27 28 39 3A 3B 4C	Друга
	6	26 27 28 39 3A 3B 6C	
	7	26 27 28 39 9A 9B 9C	
9 0 0 2 1 0	8	12 13 14 15 16 27 28 29 3A 3B 3C	Обидві
	9	27 28 79 7A 7B 7C	
9 0 1 0 2 0	10	27 28 29 2A 3B 3C	Перша
	11	27 28 79 7A 7B 7C	

Як вказано в [3], система рівнянь (2), (3) має 7 розв'язків у цілих невід'ємних числах, які є *можливими типами вершин* у T-факторизаціях порядку 12. Ці типи t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7 наведено у табл. 2.

Таблиця 2

α	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
α_1	1	2	3	3	4	4	5
α_2	5	3	1	2	0	1	0
α_3	0	1	2	0	1	0	0
α_4	0	0	0	1	1	0	0
α_5	0	0	0	0	0	1	0
α_6	0	0	0	0	0	0	1

Нехай T-факторизація Φ містить β_j вершин типу t_j, $j = 1, \ldots, 7$. Вектор $\boldsymbol{\beta}(\Phi) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7)$ будемо називати *типом T-факторизації* Φ. Очевидно,

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 = 12. \tag{4}$$

Підраховуючи двома різними способами загальні кількості вершин степеня j для кожного $j = 1, \ldots, 6$ у компонентах T-факторизації Φ, отримуємо такі співвідношення:

$$\begin{aligned}
\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 + 3\beta_4 + 4\beta_5 + 4\beta_6 + 5\beta_7 &= 6d_1,\\
5\beta_1 + 3\beta_2 + \beta_3 + 2\beta_4 + \beta_6 &= 6d_2,\\
\beta_2 + 2\beta_3 + \beta_5 &= 6d_3,\\
\beta_4 + \beta_5 &= 6d_4,\\
\beta_6 &= 6d_5,\\
\beta_7 &= 6d_6.
\end{aligned} \tag{5}$$

Сформулюємо одержаний результат у вигляді теореми.

Теорема 1. *Для існування T-факторизацій порядку $n = 12$ у випадку, коли $\boldsymbol{d}(T) = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6)$, необхідно, щоб система* (4), (5) *допускала розв'язки у цілих невід'ємних числах.*

Цю принципово важливу теорему одержано, в більш загальному вигляді, у статті [3]. Ми застосуємо її для доведення неіснування T-факторизацій для певних класів дерев порядку 12, що не включають дерев із табл. 1.

Розв'язки системи (4), (5) у цілих невід'ємних числах визначають *допустимі типи* T-факторизацій з $\boldsymbol{d}(T) = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6)$.

4. Застосування необхідної умови. Позначення $i \to i + m \times j$ будемо розуміти як заміну рівняння i у деякій системі рівнянь сумою рівняння i та помноженого на m рівняння j. Виконуючи елементарні перетворення системи (4), (5)

$$2 \to 2 - 1 \times 1, \quad 3 \to 3 - 5 \times 1,$$

$$1 \to 1 - 1 \times 2, \quad 3 \to 3 + 2 \times 2, \quad 4 \to 4 - 1 \times 2,$$

$$1 \to 1 - 1 \times 3, \quad 2 \to 2 + 2 \times 3, \quad 4 \to 4 + 2 \times 3, \quad 5 \to 5 - 1 \times 3,$$

$$1 \to 1 + 1 \times 6, \quad 2 \to 2 - 1 \times 6, \quad 3 \to 3 - 2 \times 6, \quad 4 \to 4 - 1 \times 6, \quad 5 \to 5 + 2 \times 6,$$

$$1 \to 1 + 2 \times 7, \quad 2 \to 2 + 2 \times 7, \quad 3 \to 3 - 3 \times 7, \quad 4 \to 4 - 2 \times 7, \quad 5 \to 5 + 2 \times 7,$$

знаходимо загальний розв'язок цієї системи у дійсних числах (p, q — параметри):

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 6d_1 + 6d_2 - 60 + p + q,\\
\beta_2 &= 6d_3 - 2p - q,\\
\beta_3 &= p,\\
\beta_4 &= 6d_4 - q,\\
\beta_5 &= q,\\
\beta_6 &= 6d_5,\\
\beta_7 &= 6d_6.
\end{aligned}$$

Знайдений розв'язок має місце при таких *умовах сумісності* системи:

$$\begin{aligned}
5d_1 + 4d_2 + 3d_3 + 2d_4 + d_5 &= 50,\\
4d_1 + 3d_2 + 2d_3 + d_4 - d_6 &= 38.
\end{aligned}$$

Ми встановили, що вектор $\boldsymbol{d}$ кожного з допустимих дерев порядку 12 задовольняє умови сумісності, тому в подальшому ці умови можна не брати до уваги.

Таблиця 3

Δ	***d***	*n**d***	*nt*	**β**
2	2 10 0 0 0 0	1	1	12 0 0 0 0 0 0
3	3 8 1 0 0 0	10	4	6 6 0 0 0 0 0
				7 4 1 0 0 0 0
				8 2 2 0 0 0 0
				9 0 3 0 0 0 0
	4 6 2 0 0 0	42	7	0 12 0 0 0 0 0
				1 10 1 0 0 0 0
				2 8 2 0 0 0 0
				3 6 3 0 0 0 0
				4 4 4 0 0 0 0
				5 2 5 0 0 0 0
				6 0 6 0 0 0 0
	5 4 3 0 0 0	54	4	10 6 6 0 0 0 0
				1 4 7 0 0 0 0
				2 2 8 0 0 0 0
				3 0 9 0 0 0 0
	6 2 4 0 0 0	23	1	0 0 12 0 0 0 0
	7 0 5 0 0 0	2	0	—
4	4 7 0 1 0 0	11	1	6 0 0 6 0 0 0
	5 5 1 1 0 0	59	16	0 6 0 6 0 0 0
				0 1 4 6 0 0 0
				1 5 0 5 1 0 0
				2 2 2 6 0 0 0
				2 3 1 5 1 0 0
				2 4 0 4 2 0 0
				3 0 3 6 0 0 0
				3 1 2 5 1 0 0
				3 2 1 4 2 0 0
				3 3 0 3 3 0 0
				4 2 0 2 4 0 0
				4 1 1 3 3 0 0
				4 2 0 2 4 0 0
				5 0 1 2 4 0 0
				6 1 0 1 5 0 0
				6 0 0 0 6 0 0
	6 3 2 1 0 0	72	16	0 0 6 6 0 0 0
				0 1 5 5 1 0 0
				0 2 4 4 2 0 0
				0 3 3 3 3 0 0
				0 4 2 2 4 0 0
				0 5 1 1 5 0 0
				0 6 0 0 6 0 0
				1 0 5 4 2 0 0
				1 1 4 3 3 0 0
				1 2 3 2 4 0 0
				1 3 2 1 5 0 0

Закінчення табл. 3

Δ	***d***	*n**d***	*nt*	**β**
4				1 4 1 0 6 0 0
				2 0 4 2 4 0 0
				2 1 3 1 5 0 0
				2 2 2 0 6 0 0
				3 0 3 0 6 0 0
	6 4 0 2 0 0	18	1	0 0 0 12 0 0 0
	7 1 3 1 0 0	20	1	0 0 6 0 6 0 0
	7 2 1 2 0 0	28	1	0 0 0 6 6 0 0
	8 0 2 2 0 0	6	1	0 0 0 0 12 0 0
	8 1 0 3 0 0	3	0	—
5	5 6 0 0 1 0	10	1	6 0 0 0 0 6 0
	6 4 1 0 1 0	35	4	0 6 0 0 0 6 0
				1 4 1 0 0 6 0
				2 2 2 0 0 6 0
				3 0 3 0 0 6 0
	7 2 2 0 1 0	28	1	0 0 6 0 0 6 0
	7 3 0 1 1 0	17	1	0 0 0 6 0 6 0
	8 0 3 0 1 0	4	0	—
	8 1 1 1 1 0	15	1	0 0 0 0 6 6 0
	8 2 0 0 2 0	5	1	0 0 0 0 0 12 0
	9 0 0 2 1 0	2	0	—
	9 0 1 0 2 0	2	0	—
6	6 5 0 0 0 1	7	1	6 0 0 0 0 0 6
	7 3 1 0 0 1	17	4	0 6 0 0 0 0 6
				1 4 1 0 0 0 6
				2 2 2 0 0 0 6
				3 0 3 0 0 0 6
	8 1 2 0 0 1	8	1	0 0 6 0 0 0 6
	8 2 0 1 0 1	8	1	0 0 0 6 0 0 6
	9 0 1 1 0 1	3	1	0 0 0 0 6 0 6
	9 1 0 0 1 1	3	1	0 0 0 0 0 6 6
	10 0 0 0 0 2	1	1	0 0 0 0 0 0 12

У табл. 3 наведено списки допустимих типів T-факторизацій порядку 12, отриманих за допомогою нескладних комп'ютерних обчислень. Перший стовпець вміщує значення функції Δ розглянутих дерев, другий — $\boldsymbol{d}$-вектори, третій — кількість неізоморфних дерев із вказаним вектором $\boldsymbol{d}$, четвертий — кількість допустимих типів T-факторизацій для цього ж значення $\boldsymbol{d}$. Нарешті, в останньому стовпці перелічено всі допустимі типи T-факторизацій. Прочерк у стовпці $\boldsymbol{\beta}$ вказує на неіснування допустимих типів для дерев з відповідним значенням $\boldsymbol{d}$.

З цієї таблиці випливає неіснування T-факторизацій для 2 дерев порядку 12. Ці дерева наведено у табл. 4, структура якої аналогічна структурі табл. 1.

Таблиця 4

$\boldsymbol{d}$	N	T
7 0 5 0 0 0	12	37 38 49 4A 5B 6C
	13	37 38 59 5A 7B 7C

У зв'язку з викладеним вище сформулюємо наступну задачу, що поглиблює задачу про існування T-факторизацій.

Задача 1. Для кожного дерева T порядку 12 з $\boldsymbol{d}(T) = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6)$ вказати множину реалізовних типів, тобто множину тих допустимих типів, які реалізуються відповідними T-факторизаціями. Аналогічну задачу можна сформулювати для кожного порядку $n = 2k \geq 10$.

5. Подальші теореми про неіснування. Доведемо кілька загальних результатів про неіснування T-факторизацій та з їх допомогою виділимо ряд дерев порядку 12, для яких T-факторизації неможливі.

Спрутом порядку $n = 2k$ назвемо дерево T порядку n з єдиною вершиною степеня $\Delta(T) = k$ (цю вершину називатимемо *центром* спрута), степені всіх інших вершин якого не перевищують 2. Спрут порядку $2k$ назвемо $(2k, s)$-*спрутом,* якщо рівно s його кінцевих вершин не суміжні з центром. Ланцюги, які з'єднують центр спрута з не суміжними з ним кінцевими вершинами, будемо називати *щупальцями* спрута. Очевидно, що $s < k$.

Теорема 2. *Якщо* T — $(2k, s)$*-спрут такий, що* $s < k - 1$, *то* T*-факторизації не існують.*

Доведення. Зрозуміло, що у випадку спрута T порядку $2k$ маємо $\boldsymbol{d}(T) = (k, k-1, \ldots, 0, 1)$. Припустимо протилежне твердженню теореми, тобто існує T-факторизація Φ. Тоді k вершин графа K_n мають тип $(k-1, 0, \ldots, 0, 1)$, а інші k вершин — тип $(1, k-1, \ldots, 0)$. Справді, кожна вершина графа K_n, що є центром спрута, може для інших спрутів факторизації Φ бути лише кінцевою вершиною. Інші ж вершини у спрутах із Φ матимуть степені 1 та 2, а тому можуть мати у Φ тільки другий з указаних типів.

Позначимо через A множину вершин першого типу факторизації Φ, а через B — множину вершин другого типу і розглянемо множину (A, B) всіх ребер, що з'єднують вершини множини A з вершинами множини B. Кількість таких ребер дорівнює k^2, і кожне з них належить деякому спруту з Φ. З іншого боку, серед цих ребер можуть бути лише k ребер, що з'єднують центри спрутів з їх кінцевими вершинами (по одному ребру з кожного спрута), та ребра — кінці щупалець спрутів, усього $(s+1)k$ ребер. Але ж $(s+1)k < k^2$ для всіх $k > 2$, і цей дефіцит ребер зумовлює суперечність зі зробленим припущенням.

Теорему доведено.

У випадку $n = 10$ теорему 2 доведено в [3].

Наслідок. *Не існує* T*-факторизацій для* $(12, s)$*-спрутів порядку* 12, *у яких* $s < 5$.

Серед спрутів порядку 12 рівно 6 таких, що задовольняють умови наслідку. Ці спрути наведено у табл. 5.

Назвемо вершину x дерева T *екстремальною,* якщо її степінь дорівнює 1 або $\Delta(T)$. Всі інші вершини дерева T називатимемо *неекстремальними.* Нехай $r(T)$ — кількість ребер у дереві T, які з'єднують неекстремальні вершини.

Теорема 3. *Якщо* T — *дерево порядку* $n = 2k$, $\Delta(T) = k$ *і* $r(T) < \dfrac{k-1}{2}$, *то* T*-факторизації неможливі.*

Таблиця 5

d	*N*	*T*
6 5 0 0 0 1	14	12 13 14 15 16 17 28 39 4A 5B 8C
	15	28 39 4A 8B 9C
	16	28 39 4A 8B BC
	17	28 39 8A 9B AC
	18	28 39 8A AB BC
	19	78 89 9A AB BC

Доведення. Припустимо, що існує T-факторизація графа K_n. Позначимо через B множину тих вершин графа K_n, які не є максимальними в жодній з компонент цієї факторизації. Тоді всі неекстремальні вершини компонент належать множині B і, отже, не менше ніж $kr(T)$ різних ребер з'єднують вершини з множини B. Але вершини множини B з'єднуються рівно $\frac{k-1}{2}$ ребрами, отже, $kr(T) \leq \frac{k(k-1)}{2}$, звідки $r(T) \leq \frac{k-1}{2}$, що суперечить умові теореми. Таким чином, зроблене припущення є хибним, і теорему доведено.

Ця теорема встановлює неіснування T-факторизацій для дерев порядку 12, наведених у табл. 6.

Таблиця 6

d	*N*	*T*
7 3 1 0 0 1	20	12 13 14 15 16 17 28 89 9A AB AC
	21	28 89 9A 9B AC
	22	28 89 8A 9B BC
	23	28 89 8A 9B AC
	24	28 29 8A AB BC
	25	28 29 8A 9B AC

Позначимо через $q(T)$ кількість ребер дерева T, що з'єднують екстремальні вершини цього дерева.

Теорема 4. *Якщо* T — *дерево порядку* $n = 2k$ *і при цьому* $\Delta(T) = k$ *та* $q(T) < \frac{k-1}{2}$, *то* T*-факторизації неможливі.*

Доведення. Припустимо протилежне, тобто при виконанні умов теореми існує T-факторизація Φ. Позначимо через A множину тих вершин графа K_n, що мають степінь $\Delta(T)$ в одній із компонент T-факторизації Φ. Кожне ребро, що з'єднує вершини з A, повинно з'єднувати екстремальні вершини деякої компоненти. Загальна кількість таких ребер у Φ дорівнює $kq(T)$, отже, $kq(T) \geq \geq \frac{k(k-1)}{2}$, звідки $q(T) \geq \frac{k-1}{2}$, а це суперечить умові.

Теорему доведено.

З цієї теореми випливає неіснування T-факторизацій для дерев порядку 12, вказаних у табл. 7.

Зазначимо, що для часткового випадку $n = 14$ теореми 3 та 4 сформульовано без доведення у [4].

Теорема 5. *Дерево* T, *зображене на рис.* 1, *не допускає* T*-факторизації.*

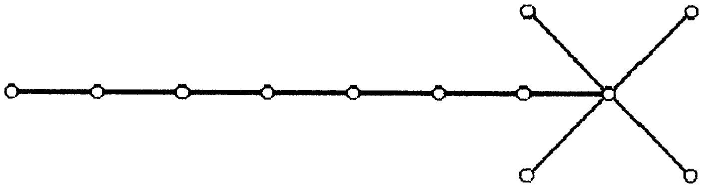

Рис. 1

Таблиця 7

$\boldsymbol{d}$	N	T
6 5 0 0 0 1	26	12 13 14 15 16 17 28 39 4A 5B 6C
	27	28 29 3A 4B 5C
	28	28 39 4A 5B 8C

Доведення. Припустимо протилежне, тобто для цього дерева існує T-факторизація Φ. Маємо $\boldsymbol{d}(T) = (5, 6, 0, 0, 1, 0)$, і з табл. 3 випливає, що серед вершин графа K_{12} є 6 вершин типу 6 (множину таких вершин позначимо A) та 6 вершин типу 1 (множина B). У множині B закінчуються точно 6 кінцевих ребер компонент. Тому з $6q(T) = 24$ ребер факторизації Φ, що з'єднують вершини степеня 5 з кінцевими вершинами компонент, не менше ніж $24 - 6 = 18$ ребер лежать у множині A. Але це суперечить тому, що вершини множини A з'єднуються лише 15 ребрами. Одержана суперечність доводить теорему.

Теорема 6. *Дерево* T, *зображене на рис.* 2, *не допускає* T*-факторизації.*

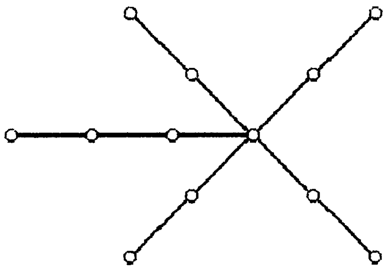

Рис. 2

Доведення. Припустимо протилежне, тобто існує факторизація Φ з компонентами, ізоморфними дереву T. Як і в попередній теоремі, $\boldsymbol{d} = (5, 6, 0, 0, 1, 0)$, тому введемо позначення A та B аналогічно. У множині A лежать точно 6 вершин, які мають степінь 2 у компонентах. Тому вершини множини A можуть з'єднуватися не більше ніж 12 ребрами (з тих, що з'єднують у компонентах максимальні вершини з вершинами степеня 2, та тих, що з'єднують по дві вершини степеня 2). Це суперечить тому, що у множині A лежать точно 15 ребер, і теорему доведено.

Теорема 7. *Для дерев, зображених на рис.* 3, *не існує* T*-факторизацій.*

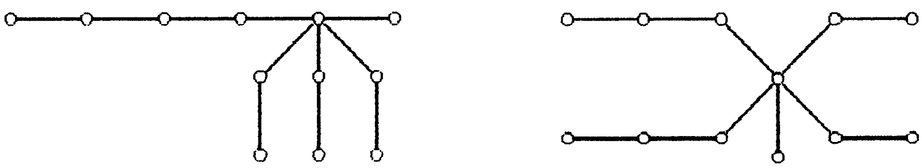

Рис. 3

Доведення. Нехай T — одне з дерев, зображених на рис. 3. Припустимо, що всупереч твердженню теореми існує T-факторизація Φ. Позначимо через A множину тих вершин графа K_{12}, які є вершинами степеня 5 у компонентах факторизації Φ. Множину ребер, що з'єднують між собою вершини з A, позначимо $\langle A \rangle$.

Тоді, очевидно, $|A| = 6$, $|\langle A \rangle| = 15$. З іншого боку, $\boldsymbol{d}(T) = (5, 6, 0, 0, 1, 0)$ і, згідно з табл. 2, маємо $\beta(\Phi) = (6, 0, 0, 0, 0, 6, 0)$, отже, всі 6 вершин в A мають тип $t_6 = (5, 1, 0, 0, 1)$. Серед ребер, що з'єднують ці вершини, можуть бути ті, що з'єднують у компонентах максимальні вершини з кінцевими (таких ребер у Φ рівно 6), та ті, що інцидентні у компонентах вершинам степеня 2. Легко зрозуміти, що які б p вершин другого виду у дереві T не взяти, вони з'єднані між собою не більше ніж p ребрами. Тому $\langle A \rangle$ містить не більше ніж 6 ребер, що з'єднують вершини другого виду. Отже, Φ покриває не більше ніж 12 ребер з $\langle A \rangle$, а не всі 15 ребер, що суперечить означенню T-факторизації. Ця суперечність доводить теорему.

6. Висновки та зауваження. На завершення сформулюємо основний результат статті у такому вигляді.

Теорема 8. *Існують не менше ніж* 32 *таких неізоморфних допустимих дерева порядку* 12, *які не допускають* T-*факторизацій.*

Відмітимо деякі особливості, якими випадок $n = 12$ вирізняється з-поміж досліджених випадків $n = 10$ та $n = 14$. Це порівняно велика кількість дерев, для яких T-факторизації неможливі. Мабуть, ця особливість пов'язана з відсутністю біциклічних T-факторизацій, тому слід чекати подібного і для подальших порядків $n = 2k \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$.

У процесі проведеного вище дослідження виявлено три рівні, на яких розв'язується задача існування T-факторизацій: рівень значень інваріанта $\boldsymbol{d}$ дерев-компонент (теорема 1), рівень типів T-факторизацій (задача 1), індивідуальний рівень — рівень конкретного дерева-компоненти (теореми 5 – 7). Ще більш глибокий рівень має задача переліку, з точністю до ізоморфізму, T-факторизацій для заданого дерева. Приклади таких переліків наведено в [7, 8].

1. *Beineke L. W.* Decomposition of complete graphs into forests // Magy. tud. akad. Mat. kut. int. közl. – 1964. – № 9. – P. 589 – 594.
2. *Huang C., Rosa A.* Decomposition of complete graphs into trees // Ars Combinatoria. – 1978. – № 5. – P. 23 – 63.
3. *Petrenjuk A. J.* On tree factorizations of K_{10} // J. Combin. Math. and Combin. Comput. – 2002. – **41**. – P. 193 – 202.
4. *Петренюк А. Я.* Древесные факторизации полных графов: существование, построение, перечисление // Мат. 7 Междунар. сем. „Дискретная математика и ее приложения" (Москва, 29 янв. – 2 февр. 2001 г.). – М., 2001. – С. 26 – 30.
5. *Петренюк А. Я.* Півобертові деревні факторизації повних графів // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 5. – С. 710 – 716.
6. *Петренюк А. Я.* Необхідні умови існування T-факторизацій // Допов. НАН України. – 2002. – № 3. – С. 71 – 73.
7. *Петренюк А. Я.* Екстремальні розклади повних графів: існування, перелік: дис. … д-ра фіз.-мат. наук. – Київ, 2002. – 266 с.
8. *Petrenjuk A. J.* Nonisomorphic double star factorizations of order 12 // Наукові пр. акад. / Ред. Р. М. Макаров. – Кіровоград: Вид-во Держ. льот. акад. України, 1999. – Вип. 4, ч. 1. – С. 212 – 214.

Одержано 09.11.2004