УДК 517.9

О. М. Станжицький, А. М. Ткачук (Київ. нац. ун-т ім.Т. Шевченка)

ДИСИПАТИВНІСТЬ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ТА ВІДПОВІДНИХ ЇМ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

We establish conditions under which the existence of a bounded solution of difference equation implies the existence of a bounded solution of the corresponding differential equation. We investigate the relation between the dissipativity of differential and difference equations in terms of the Lyapunov function.

Встановлено умови, при яких з існування обмеженого розв'язку різницевого рівняння випливає існування обмеженого розв'язку відповідного диференціального рівняння. Досліджено зв'язок між дисипативністю диференціальних та різницевих рівнянь у термінах функції Ляпунова.

1. Вступ. Ефективним методом дослідження диференціальних рівнянь є перехід до різницевих рівнянь, які отримуються з диференціальних заміною похідної відповідним різницевим відношенням. Але методи, розроблені в теорії різницевих схем, дозволяють в основному встановлювати близькість розв'язків та відповідність властивостей диференціальних і різницевих рівнянь лише на скінченних інтервалах часу. Питання ж якісної відповідності між розв'язками різницевих та диференціальних рівнянь на нескінченних інтервалах часу вивчене мало. Відмітимо в цьому напрямку роботи [1 – 4], де розглядалися умови збереження властивостей періодичності, стійкості, коливності диференціальних рівнянь при наявності аналогічних властивостей у відповідних різницевих рівнянь і навпаки.

2. Постановка задачі. Розглядається система диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) \tag{1}$$

і відповідна їй система різницевих рівнянь

$$x_{k+1}^h = x_k^h + hX(t_0 + kh, x_k^h), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

де $h > 0$ — крок різницевого рівняння,

$$x_k^h = x^h(t_0 + kh), \qquad x^h(t_0) = x_0^h, \qquad x(t_0) = x_0.$$

Нехай вектор-функція $X(t, x)$ визначена при $t \in \mathbb{R}$, $x \in D$ (D — деяка область простору $\mathbb{R}^n$), $t_0 \in \mathbb{R}$.

Метою роботи є вивчення питання про зв'язок між обмеженими розв'язками систем (1) та (2) і дослідження умов дисипативності цих систем.

3. Основні результати. ***3.1. Зв'язок між обмеженими розв'язками диференціальних та різницевих систем.*** У даному пункті будемо вважати, що функція $X(t, x)$ в області $\mathbb{R} \times \mathbb{D}$ є неперервно диференційовною й обмеженою разом зі своїми частинними похідними так, що

$$|X(t, x)| + \left|\frac{\partial X(t, x)}{\partial t}\right| + \left\|\frac{\partial X(t, x)}{\partial x}\right\| \leq C_0.$$

Наведена нижче теорема гарантує існування обмеженого двостороннього розв'язку системи (1) при умові, що система (2) має такий розв'язок.

Теорема 1. *Якщо існує $h_0 > 0$ таке, що при $0 < h \leq h_0$ система* (2) *має рівномірно по t_0 і h асимптотично стійкий двосторонній обмежений розв'я-*

зок x_k^h*, що належить області* $\mathbb{D}$ *разом з деяким* ρ*-околом, то система* (1) *також має обмежений двосторонній розв'язок.*

Доведення. Згідно з умовами теореми, для довільного $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \rho/2)$ існують не залежні від t_0 і h $\delta > 0$ і $T > 0$ такі, що якщо

$$\left| x_0^h - y_0^h \right| \le \delta, \tag{3}$$

то

$$\left| x_k^h - y_k^h \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad k \ge 1, \tag{4}$$

$$\left| x_k^h - y_k^h \right| \le \frac{\delta}{2} \quad \text{при} \quad kh \ge T. \tag{5}$$

Виберемо $k_0(h)$ так, що $T \le k_0 h \le T + 1$. Оскільки система (2) має для кожного $h \le h_0$ обмежений розв'язок x_k^h, то існує $C_1(h) > 0$ таке, що

$$\left| x_k^h \right| \le C_1(h) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Нехай $x(t)$ — розв'язок системи (1), який в точці t_0 збігається з розв'язком y_k^h системи (2), де y_k^h задовольняє умови (3) – (5), тобто

$$y_0^h = x(t_0). \tag{6}$$

Виберемо крок h таким чином, щоб виконувалась нерівність

$$h e^{C_0(T+1)} \left[1 + \left(C_0 + C_0^2 \right)(T+1) \right] \le \frac{\delta}{2}. \tag{7}$$

Тоді, як випливає з [5, с. 384], для розв'язків систем (1) і (2), що задовольняють умову (6), справджується оцінка

$$\left| y_m^h - x(t_0 + mh) \right| \le \frac{\delta}{2}, \qquad m \le k_0, \tag{8}$$

якщо вони визначені на відрізку $[t_0, t_0 + k_0 h]$.

З (4), (5) та (8) отримуємо нерівність

$$\left| x_{k_0}^h - x(t_0 + k_0 h) \right| \le \delta.$$

Далі будемо розглядати відрізок довжини $k_0 h \le T + 1$. З інтегрального зображення розв'язку $x(t)$ системи (1) отримаємо оцінку

$$\left| x(t) \right| \le \left| x_0 \right| + \int_{t_0}^{t_0+t} |X(s, x(s))| ds, \qquad t \in [0, k_0 h],$$

звідки

$$\left| x(t) \right| \le C_1(h) + \delta + C_0(T+1). \tag{9}$$

Отже, розв'язок $x(t)$ системи (1), що починається в δ-околі x_0^h, в момент $k_0 h$ знову попадає в його δ-окіл, задовольняючи при цьому нерівність (9), при умові, що $x(t)$ визначено на відрізку $[0, k_0 h]$. Покажемо, що цього можна досягти вибором достатньо малого кроку h.

Виберемо $\varepsilon > 0$ так, щоб точки з ε-околу обмеженого розв'язку x_k^h системи (2) належали області $\mathbb{D}$ разом з $(\rho/2)$-околом. За умовами теореми такий вибір є можливим. Тому розв'язки системи (1), що починаються в такому $(\rho/2)$-околі, продовжуються вліво і вправо на інтервал довжини не меншої ніж $\frac{\rho}{2C_0}$. Виберемо h так, щоб виконувалась нерівність (7) і нерівність $h < \frac{\rho}{2C_0}$, та зафіксуємо його.

Тоді розв'язок $x(t)$, що починається в δ-околі x_0^h, продовжується на інтервал $\left[0, \frac{\rho}{2C_0}\right]$, а в точці $t = h$ на підставі (8) виконується нерівність

$$\left|x(h) - y_k^h\right| \leq \frac{\delta}{2},$$

де y_k^h — вказаний вище розв'язок системи (2).

Отже, точка $x(h)$ належить області $\mathbb{D}$ разом з $(\rho/2)$-околом, а тому розв'язок $x(t)$ продовжується до точки $2h$ і $x(2h)$ також належить $\mathbb{D}$ разом з $(\rho/2)$-околом. Продовжуючи цей процес, переконуємось, що $x(t)$ визначено на відрізку $[0, k_0h]$.

Тепер розглянемо наступний відрізок довжини $k_0h \leq T + 1 - [t_0 + k_0h, t_0 + 2k_0h]$. На ньому $x(t)$, аналогічно попередньому, задовольняє нерівність

$$\left|x(t)\right| \leq C_1(h) + \delta + C_0(T+1).$$

Позначимо через $\hat{y}_k^h$ такий розв'язок системи (2), що в момент k_0h його початкові дані збігаються з початковими даними розв'язку $x(t)$:

$$x(k_0h) = \hat{y}_{k_0}^h.$$

Тоді аналогічно попередньому будемо мати нерівність

$$\left|x_{2k_0}^h - x(2k_0h)\right| \leq \delta.$$

Продовживши далі цей процес, отримаємо, що на кожному відрізку довжини k_0h справедливою буде оцінка

$$\left|x(t)\right| \leq C_1(h) + \delta + C_0(T+1).$$

А в моменти pk_0h розв'язок $x(t)$ системи (1) не виходить з δ-околу обмеженого розв'язку x_k^h системи (2). Звідси випливає його обмеженість при $t \geq t_0$.

Таким чином, для довільного $t_0 \in \mathbb{R}$ нами побудовано обмежений розв'язок $x(t)$ системи (1) при $t \geq t_0$. Побудуємо тепер обмежений на всій осі розв'язок $x(t)$ цієї системи.

З викладеного вище випливає, що всі розв'язки диференціального рівняння, які починаються в δ-околі розв'язку x_k^h, задовольняючи нерівність (9), при $t = k_0h$ попадають знову в його δ-окіл. Тому обмежені розв'язки $x(t)$ диференціального рівняння, які при $t = -k_0h$ починаються в δ-околі точки $x^h(-k_0)$, при $t = 0$ попадають знову в δ-окіл точки $x^h(0)$.

Аналогічно можна показати, що всі обмежені розв'язки системи (1), які при

$t = -pk_0h$ починаються в δ-околі точки $x^h(-pk_0)$, задовольняючи нерівність (9), при $t = -(p-1)k_0h$ попадають знову в δ-окіл точки $x^h(-(p-1)k_0)$.

Позначимо через $\mathbb{S}_p$ множину значень розв'язків системи (1) в точці $t = 0$, які при $t = -pk_0h$ належать δ-околу $x^h(-pk_0)$. На підставі викладеного вище ця множина не порожня для довільного натурального p і при цьому має місце включення $\mathbb{S}_p \subset \mathbb{S}_{p-1}$. За своєю побудовою множини $\mathbb{S}_p$ складаються з образів розв'язків рівняння (1) в точці $t = 0$, що починаються в точці $t = -pk_0h$. Відображення, що породжує $\mathbb{S}_p$, є неперервним внаслідок неперервної залежності розв'язку від початкових даних, а тому $\mathbb{S}_p$ є замкненими (як образи замкнених множин при неперервному відображенні). Оскільки вони також і компакти, що належать δ-околу $x^h(0)$, то їх перетин непорожній.

Нехай y_0 — точка, спільна для всіх $\mathbb{S}_p$.

Розглянемо тепер розв'язок диференціального рівняння $x(t)$ такий, що $x(0) = y_0$. Даний розв'язок за своєю побудовою продовжуваний вліво і при $t = -pk_0h$ належить δ-околу $x^h(-pk_0)$ для довільного натурального p, де x_k^h — обмежений розв'язок системи (2), що фігурує в теоремі. Тому він необмежено продовжуваний вліво і задовольняє нерівність (9), а отже, є обмеженим. Його продовжуваність вправо й обмеженість при $t \geq 0$ очевидні.

Теорему доведено.

3.2. Дисипативність різницевих систем. Нехай розв'язки системи (1) визначені при $t \geq 0$. Розглянемо питання, пов'язані з дисипативністю систем (1) і (2). Дисипативність систем (1) і (2) будемо розуміти в сенсі наступних означень.

Означення 1 [6]. *Систему* (1) *назвемо дисипативною при* $t \geq 0$, *якщо існує число* $R > 0$ *таке, що для довільного* $r > 0$ *існує таке* $T = T(r, t_0)$, *що розв'язок* $x(t, t_0, x_0)$ *системи* (1) *такий, що* $|x_0| < r$, $t_0 \geq 0$, *при* $t \geq T$ *задовольняє нерівність*

$$|x(t, t_0, x_0)| < R.$$

Означення 2. *Систему* (2) *назвемо дисипативною при* $k \geq 0$, *якщо існує* $R(h)$ *таке, що для довільного* $r > 0$ *можна вказати таке* $T = T(t_0, r, h)$, *що розв'язок* x_k^h *системи* (2) *при* $kh \geq T$ *знаходиться в кулі радіуса* R: $x_k^h \in U_R$, *якщо* $x_0^h \in U_r$.

Означення 3. *Систему* (2) *назвемо рівномірно дисипативною по* $h \leq h_0$, *якщо в означенні* 2 R *та* T *не залежать від* h.

Наступний результат є аналогом умов дисипативності систем диференціальних рівнянь у термінах функції Ляпунова [6] для систем різницевих рівнянь. Має місце така теорема.

Теорема 2. *Якщо система* (2) *для кроку* $h > 0$ *має невід'ємну функцію Ляпунова* $V_h(t, x)$, *визначену в області* $t \geq t_0$, $x \in \mathbb{R}^n$, *таку, що*:

1) *виконується умова*

$$\inf_{k \in \mathbb{Z}_+; |x| \geq R} V_h(t_0 + kh, x) = V_{h,R} \to \infty, \quad R \to \infty; \tag{10}$$

2) *існують* $C = C(h) > 0$ *та* $C_1 = C_1(h) > 0$ *такі, що*

$$V_h(t_0 + (k+1)h, x + hX(kh, x)) - V_h(t_0 + kh, x) \leq$$
$$\leq -C(h)V_h(t_0 + kh, x)h + C_1(h)h,$$

то система (2) *дисипативна для даного* $h > 0$ *при умові* $C(h)h < 2$.

Якщо ж в умовах теореми $V(t,x)$, C_1 *та* C *не залежать від* h *і співвідношення* (10) *виконується рівномірно по* $h \le h_0$, *то система* (2) *рівномірно дисипативна.*

Доведення. Нехай x_k^h — розв'язок системи (2) такий, що $x_0^h = x_0 \in U_r$. Тоді

$$V_h\big(t_0 + kh, x + hX((k-1)h, x)\big) \le \big(1 - C(h)h\big) V_h\big(t_0 + (k-1)h, x\big) + C_1(h)h$$

для довільного $k \in \mathbb{Z}_+$. Звідси отримуємо

$$V_h\big(t_0 + kh, x + hX((k-1)h, x)\big) \le \big(1 - C(h)h\big) V_h\big(t_0 + (k-1)h, x\big) + C_1(h)h \le$$

$$\le \big(1 - C(h)h\big)^2 V_h\big(t_0 + (k-2)h, x\big) + C_1(h)h\big(1 - C(h)h\big) + C_1(h)h \le \ldots$$

$$\ldots \le \big(1 - C(h)h\big)^k V_h\big(t_0, x_0\big) + C_1(h)h\sum_{i=0}^{k-1}(1 - C(h)h)^i \le$$

$$\le \big(1 - C(h)h\big)^k V_h\big(t_0, x_0\big) + \frac{C_1(h)}{C(h)} \le \sup_{|x_0|<r} V_h(t_0, x_0)(1 - C(h)h)^k + \frac{C_1(h)}{C(h)}.$$

Тому існує $T = T(r, t_0, h)$ таке, що при $kh \ge T$ виконується нерівність

$$V_h\big(t_0 + kh, x_k^h\big) \le \frac{C_1(h)}{C(h)} + 1. \tag{11}$$

З (11) за умовою (10) випливає доведення першої частини теореми.

Доведення другої частини теореми очевидним чином отримується з першої з урахуванням рівномірності по $h \le h_0$ співвідношення (10).

Наступна теорема стверджує існування для дисипативної системи функції Ляпунова з властивостями 1, 2 з теореми 2 і є аналогом відповідної теореми з [6] для різницевих рівнянь. Припустимо, що $X(t,x)$ ліпшицева по x з константою L.

Теорема 3. *Якщо система* (2) *є дисипативною в сенсі означення* 2, *то для неї в області* $t \ge t_0$, $x \in \mathbb{R}^n$ *існує невід'ємна функція Ляпунова* $V_h(t,x)$, *що задовольняє по* x *локальну умову Ліпшиця і*:

1) *виконується умова*

$$\inf_{t \ge t_0, |x| \ge R} V_h(t, x) \to \infty, \quad R \to \infty; \tag{12}$$

2) *існує* $C(h) > 0$ *таке, що*

$$V_h\big(t + h, x + hX(t,x)\big) - V_h(t,x) \le -C(h)h\,V_h(t,x) \tag{13}$$

і $C(h)h < 2$, *якщо* $h \le 2$. *При цьому для* $h \le h_0$, *де* h_0 — *розв'язок рівняння* $\dfrac{1 - e^{-h}}{h} = \dfrac{1}{2}$, *сталу* $C(h)$ *можна взяти рівною* $\dfrac{1}{2}$.

Якщо система (2) *є рівномірно дисипативною по* h, *то функція Ляпунова* $V(t,x)$ *не залежить від* h.

Доведення. Оскільки система (2) є дисипативною, то існує таке $T = T(t_0, r, h)$, що для розв'язку, який виходить із $x_0^h \in U_r$, маємо $\|x_k^h\| \le R$ при $kh \ge t_0 + T$.

Розглянемо тепер наступну функцію:

$$G(\xi) = \begin{cases} \xi - T, & \xi \ge T, \\ 0, & 0 \le \xi < T. \end{cases}$$

Це невід'ємна неперервна функція, визначена для $\xi \geq 0$ і $G(\xi) \to \infty$, $\xi \to \infty$, та

$$|G(\xi) - G(\xi')| \leq |\xi - \xi'|. \tag{14}$$

Визначимо $V_h(t, x)$ так:

$$V_h(t, x) = \sup_{n \geq 0,\, nh \leq T} \Big[G(\| x(t + nh, x, t) \|) e^{nh} \Big].$$

Звідси

$$G(\|x\|) \leq V_h(t, x),$$

а отже, $V_h(t, x)$ задовольняє умову (12).

Тепер покажемо, що $V_h(t, x)$ ліпшицева за змінною x. Позначимо

$$V_h^{(n)}(t, x) = G(\| x(t + nh, x, t) \|) e^{nh}.$$

Враховуючи (14), маємо

$$V_h^{(n)}(t, x) - V_h^{(n)}(t, \acute{x}) \leq G(\| x(t + nh, x, t) \|) e^{nh} - G(\| \tilde{x}(t + nh, \acute{x}, t) \|) e^{nh} \leq$$

$$\leq e^{nh} \| x(t + nh, x, t) - \tilde{x}(t + nh, \acute{x}, t) \|.$$

Оскільки розв'язки системи (2) можна подати у вигляді

$$x_k^h = x + h \sum_{p=0}^{k-1} X\big(t + ph, x_p^h\big),$$

$$\tilde{x}_k^h = \acute{x} + h \sum_{p=0}^{k-1} X\big(t + ph, \tilde{x}_p^h\big),$$

де $x_0^h = x$, $\tilde{x}_0^h = \acute{x}$, то матимемо

$$V_h^{(n)}(t, x) - V_h^{(n)}(t, \acute{x}) \leq e^{nh} \left[|x - \acute{x}| + h \sum_{p=0}^{k-1} \left| X\big(t + ph, x_p^h\big) - X\big(t + ph, \tilde{x}_p^h\big) \right| \right] \leq$$

$$\leq e^{nh} \left[|x - \acute{x}| + hL \sum_{p=0}^{k-1} \left| x_p^h - \tilde{x}_p^h \right| \right].$$

Звідси та з [1, с. 156] отримуємо

$$\left| V_h^{(n)}(t, x) - V_h^{(n)}(t, \acute{x}) \right| \leq |x - \acute{x}| (1 + Lh)^n e^{nh} \leq e^{T(L+1)} |x - \acute{x}|.$$

Отже,

$$\left| V_h^{(n)}(t, x) - V_h^{(n)}(t, \acute{x}) \right| \leq K |x - \acute{x}|.$$

З останньої нерівності та з урахуванням того, що різниця супремумів не перевищує супремуму різниці, випливає ліпшицевість функції $V_h(t, x)$ по x. Покажемо виконання умови 2 теореми. Далі, якщо $h > 0$, $\acute{x} = x(t + h, x, t)$ та hm таке, що

$$V_h^{(m)}(t + h, \acute{x}) = G(\| x(t + h + mh, \acute{x}, t + h) \|) e^{mh},$$

і якщо $nh = mh + h$, то

$$V_h^{(m)}(t+h, \acute{x}) \;=\; G(\|x(t+nh, x, t)\|)e^{nh}\,e^{mh-nh} \;\le\; V_h^{(n)}(t, x)e^{-h}.$$

Переходячи в останній нерівності спочатку до супремуму по n $(nh \le T)$ справа, а потім до супремуму по m $(mh \le T)$ зліва, отримуємо

$$\frac{V_h(t+h, \acute{x}) - V_h(t, x)}{h} \;\le\; V_h(t, x)\frac{e^{-h}-1}{h}.$$

Отже, виконується умова 2 теореми з $C(h) = \dfrac{1-e^{-h}}{h}$. Якщо ж взяти h_0 коренем рівняння $\dfrac{1-e^{-h}}{h} = \dfrac{1}{2}$, то внаслідок монотонного спадання функції $\dfrac{1-e^{-h}}{h}$ при $h > 0$ для $h < h_0$ отримаємо нерівність

$$V_h(t+h, \acute{x}) - V_h(t, x) \;\le\; -\frac{h}{2}V_h(t, x).$$

Друге твердження теореми є очевидним.

Теорема 4. *Нехай* $X(t, x)$ *визначена й обмежена в області* $t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ *так, що*

$$\|X(t, x)\| \;\le\; M,$$

M — *деяка додатна стала.*

Тоді якщо в даній області існує неперервно диференційовна по t, x *невід'ємна функція Ляпунова* $V(t, x)$, *що задовольняє по* x *умову Ліпшиця з константою* L, *а також*:

1) *існують* $C > 0$ *і* $C_1 > 0$ *такі, що для будь-якого* $t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$

$$V(t+h, x+hX(t, x)) - V(t, x) \;\le\; -ChV(t, x) + C_1 h; \tag{15}$$

2) *виконується умова*

$$\inf_{t\ge 0, |x|>R} V(t, x) \;\to\; \infty, \quad R \to \infty, \tag{16}$$

то система диференціальних рівнянь (1) *дисипативна при* $t \ge 0$.

Доведення. Нехай $x(t)$ — розв'язок системи (1). Внаслідок (15) для різницевого відношення справджується оцінка

$$\frac{V(t+h, x(t+h)) - V(t, x(t))}{h} \;=\; \frac{V(t+h, x(t+h)) - V\big(t+h, x^h(t+h)\big)}{h} \;+$$

$$+\; \frac{V\big(t+h, x^h(t+h)\big) - V(t, x(t))}{h} \;\le\; \frac{L|x(t+h) - (x(t) + hX(t, x(t)))|}{h} \;-$$

$$-\,CV(t, x(t)) + C_1 \qquad \forall t \ge 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{17}$$

І оскільки

$$\big|x(t+h) - x(t) - hX(t, x(t))\big| \;\le\; 2Mh,$$

то з (17) отримуємо нерівність

$$\frac{dV(t,x)}{dt} \le -CV(t,x)+C_2, \qquad C_2 = C_1 + 2LM,$$

з якої випливає оцінка

$$V(t,x(t)) \le V(t_0,x_0)e^{-C(t-t_0)} + C_1\int_{t_0}^{t} e^{-C(t-s)}ds =$$

$$= \left[V(t_0,x_0) - \frac{C_1}{C}\right]e^{-C(t-t_0)} + \frac{C_1}{C}.$$

Тому існує $T = T(t_0, x_0)$ таке, що при $t \ge T$ виконується нерівність

$$V(t,x(t)) \le \frac{C_1}{C} + 1,$$

що з урахуванням (16) завершує доведення теореми.

1. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений / Под ред. Ю. А. Митропольского. – Киев: Наук. думка, 1972. – 246 с.
2. *Карасик Г. Я.* О сохранении периодического решения при переходе от дифференциальных уравнений к конечно-разностным // Научн. докл. высш. шк. Физ.-мат. науки. – 1958. – № 4. – С. 43–46.
3. *Скалкина М. А.* О связи между устойчивостью решений дифференциальных и конечно-разностных уравнений // Прикл. математика и механика. – 1955. – **19**, вып. 3. – С. 95–99.
4. *Ateiwi A. M.* To the problem on periodic solutions of one class of systems of difference equations // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 2. – С. 309–314.
5. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. – М.: Наука, 1986. – 744 с.
6. *Йосидзава Т.* Функция Ляпунова и ограниченность решений // Математика. – 1965.– **9**, № 5. – С. 95–127.

Одержано 01.04.2005,
після доопрацювання — 08.07.2005