УДК 517.5

В. В. Савчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩІ ЛІНІЙНІ МЕТОДИ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КЛАСУ БЕРГМАНА АЛГЕБРАЇЧНИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

On concentric circles $\mathbb{T}_\varrho = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = \varrho\}$, $0 \le \varrho < 1$, in the uniform metric, we determine exact values of the best approximation of holomorphic functions of the Bergman classes A_p, $2 \le p \le \infty$, by algebraic polynomials which are generated by linear methods of summation of the Taylor series. For $1 \le p < 2$, we determine exact order estimates of such approximations.

Знайдено точні значення величин найкращого наближення на концентричних колах $\mathbb{T}_\varrho = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = \varrho\}$, $0 \le \varrho < 1$, у рівномірній метриці голоморфних функцій класу Бергмана A_p, $2 \le p \le \infty$, алгебраїчними многочленами, які породжуються лінійними методами підсумовування рядів Тейлора. Для випадку, коли $1 \le p < 2$, знайдено точні порядкові оцінки таких величин.

1. Вступ. Основний результат. Нехай $\mathbb{D} := \big\{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\big\}$ — одиничний круг у комплексній площині $\mathbb{C}$, ν — нормована міра Лебега в $\mathbb{D}$ і $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ — множина всіх функцій, голоморфних у $\mathbb{D}$.

Нехай, далі, $L_p := L_p(\mathbb{D})$, $1 \le p < \infty$, — множина всіх функцій $f \colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$, для яких

$$\|f\|_p := \left(\int\limits_{\mathbb{D}} |f|^p d\nu \right)^{1/p} < \infty.$$

Через $L_\infty := L_\infty(\mathbb{D})$ будемо позначати простір обмежених функцій $f \colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ з нормою

$$\|f\|_\infty := \sup_{z \in \mathbb{D}} \big|f(z)\big|.$$

Підмножину всіх голоморфних функцій з L_p будемо позначати через HL_p, тобто

$$HL_p := L_p \cap \mathrm{Hol}(\mathbb{D}).$$

Множини HL_p при $1 \le p < \infty$ — це відомі простори Бергмана в $\mathbb{D}$, наділені нормою $\|\cdot\|_p$.

Одиничну кулю у просторі HL_p, $1 \le p \le \infty$, будемо позначати через A_p і називатимемо її класом Бергмана.

Означення та основні відомості про простори Бергмана, які використовуються при викладі результатів цієї роботи, можна знайти в монографіях [1] (гл. 3), [2].

Нехай функція $f \in HL_p$, $\varphi := \{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ — ортонормована по площі круга $\mathbb{D}$ система обмежених голоморфних функцій, тобто

$$\int\limits_{\mathbb{D}} \varphi_k \overline{\varphi_l} d\nu = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \ne l, \end{cases}$$

і

$$\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_{\varphi,k} \varphi_k \tag{1}$$

— ряд Фур'є функції f по системі φ, в якому

$$\widehat{f}_{\varphi,k} = \int\limits_{\mathbb{D}} f \bar{\varphi}_k d\nu.$$

Відомо, що при $\varphi_k(z) = \sqrt{k+1} z^k$ ряд (1) рівномірно збігається в крузі $\mathbb{D}$ до функції f і є її рядом Тейлора, тобто

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}_k}{\sqrt{k+1}} \varphi_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k z^k \quad \forall\, z \in \mathbb{D},$$

де

$$\widehat{f}_k := \widehat{f}_{\varphi,k} \sqrt{k+1} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

$\mathbb{Z}_+$ — множина цілих невід'ємних чисел.

Розглянемо послідовність лінійних операторів $\{U_n\}_0^{\infty}$, заданих на $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ таким чином:

$$U_n(f)(z) = U_{n,\Lambda}(f)(z) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^n \widehat{f}_k z^k, & n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{2}$$

де λ_k^n — елементи нескінченної нижньотрикутної матриці $\Lambda := \{\lambda_k^n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $k = \overline{0, n}$, над полем комплексних чисел.

Таким чином, будь-яка нижньотрикутна числова матриця Λ породжує за формулою (2) певний лінійний поліноміальний метод наближення голоморфних функцій.

Нехай $\mathbb{K}$ — деякий компакт у крузі $\mathbb{D}$, μ — додатна міра, носій якої зосереджений на $\mathbb{K}$, $L_q(\mathbb{K}, \mu)$, $1 \leq q < \infty$, — простір функцій, визначених на K та сумовних у степені q відносно міри μ з відповідною нормою $\|\cdot\|_{L_q(\mathbb{K},\mu)}$ і $C(\mathbb{K})$ — простір функцій f, неперервних на $\mathbb{K}$, наділений нормою

$$\|f\|_{C(K)} := \max_{z \in \mathbb{K}} \big|f(z)\big|.$$

Через X будемо позначати один із просторів $L_q(\mathbb{K}, \mu)$ або $C(\mathbb{K})$, а через $\mathfrak{A}$ — деякий клас функцій із $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$.

Величина

$$\mathcal{L}_n(\mathfrak{A}; X) := \inf_{\Lambda} \sup_{f \in \mathfrak{A}} \|f - U_{n,\Lambda}(f)\|_X, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3}$$

де інфімум береться по всіляких нижньотрикутних числових матрицях Λ, називається найкращим лінійним наближенням класу $\mathfrak{A}$ в просторі X. Якщо існує матриця Λ^*, яка породжує послідовність операторів $\{U_{n,\Lambda^*}\}_0^{\infty}$ таких, що

$$\sup_{f\in\mathfrak{A}} \|f - U_{n,\Lambda^*}(f)\|_X = \mathcal{L}_n(\mathfrak{A}; X), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

то матрицю Λ^* називають найкращим лінійним методом наближення класу $\mathfrak{A}$ в просторі X. Якщо ж для найкращого методу Λ^* і даного $n \in \mathbb{Z}_+$ існує функція $f_* \in \mathfrak{A}$ така, що

$$\big\|f_* - U_{n,\Lambda^*}(f_*)\big\|_X = \mathcal{L}_n(\mathfrak{A}; X),$$

то функцію f_* називають екстремальною для методу Λ^* на класі $\mathfrak{A}$ при даному $n \in \mathbb{Z}_+$.

Нашою метою є знаходження точного значення величини (3) для класів Бергмана в метриці простору $C(\mathbb{T}_\varrho)$, тобто коли $\mathfrak{A} = A_p$, $1 \le p \le \infty$, і $X = C(\mathbb{T}_\varrho)$, де

$$\mathbb{T}_\varrho := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = \varrho\}, \quad \varrho > 0.$$

Задача про відшукання точного значення величини (3) та найкращого лінійного методу Λ є однією з важливих екстремальних задач теорії наближення. На цей час є порівняно мала кількість робіт, в яких знайдено точні значення величини (3). Серед цих робіт згадаємо, насамперед, роботи [3 – 13] і задля зручності в коментуванні результатів нашого дослідження наведемо лише ті результати із цих робіт, які стосуються наближення класів Гарді та Бергмана.

Розпочнемо з класів Гарді. Так називатимемо одиничну кулю B_p простору Гарді

$$H_p := \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})\colon \|f\|_{H_p} := \sup_{0<\varrho<1} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\varrho w)|^p d\sigma(w) \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

де σ — нормована міра Лебега на колі $\mathbb{T}$.

Зрозуміло, що $H_p \subset HL_p$, $1 \le p < \infty$.

Якщо $\mathbb{K} = \mathbb{T}_\varrho$, $0 \le \varrho < 1$, $\mu = \sigma$, то [3, 4]

$$\mathcal{L}_n(B_p; L_p(\mathbb{T}_\varrho, \mu)) = \varrho^n, \quad 1 \le p \le \infty,$$

і (див. [9, 13])

$$\mathcal{L}_n(B_p; C(\mathbb{T}_\varrho)) = \frac{\varrho^n}{(1-\varrho^2)^{1/p}}, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{4}$$

Для класів Бергмана відомо таке: якщо $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{D}}_\varrho := \big\{z \in \mathbb{C}\colon |z| \le \varrho\big\}$, $0 \le \varrho < 1$, $\mu = \nu$, то [8, с. 256]

$$\mathcal{L}_n\big(A_p; L_p(\overline{\mathbb{D}}_\varrho, \nu)\big) = \varrho^{n+2/p}, \quad 1 \le p \le \infty,$$

якщо ж $\mathbb{K} = \mathbb{T}_\varrho$, $0 \le \varrho < 1$, то [10, 11]

$$\mathcal{L}_n\big(A_2; C(\mathbb{T}_\varrho)\big) = \varrho^n \frac{\sqrt{1 + n(1-\varrho^2)}}{1-\varrho^2}. \tag{5}$$

Основним результатом даної статті є наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $0 \le \varrho < 1$. *Тоді*:

1) *якщо* $2 \le p \le \infty$, *то для кожного* $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\mathcal{L}_n\big(A_p; C(\mathbb{T}_\varrho)\big) = \varrho^n \gamma_{n,p}, \qquad \gamma_{n,p} := \left(\frac{1+n(1-\varrho^2)}{(1-\varrho^2)^2}\right)^{1/p}; \tag{6}$$

2) *якщо* $1 \le p < 2$, *то для кожного* $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{p}{2}\right)^{1/p} \varrho^n \gamma_{n,p} \le \mathcal{L}_n(A_p; C(\mathbb{T}_\varrho)) \le \varrho^n \gamma_{n,p}.$$

***Зауваження* 1.** Найкращий лінійний метод $\Lambda^* = \{\lambda_k^n\}$ у першому випадку теореми 1 можна побудувати за формулою (23). Екстремальними функціями для цього методу будуть функції f_*, означені формулою (16).

Результати, викладені в наступному пункті, є етапами доведення теореми 1, проте вони не позбавлені й самостійного інтересу.

2. Екстремальні властивості та найкраще наближення ядра Бергмана. Ядром Бергмана для круга $\mathbb{D}$ називають функцію K, визначену в $\mathbb{D}^2 := \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ таким чином:

$$K(z,w) = \frac{1}{(1-z\overline{w})^2}.$$

Нехай $n \in \mathbb{Z}_+$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$,

$$HL_{p,n} := \Big\{ f \in HL_p \colon \widehat{f}_k = 0, \quad k = \overline{0, n-1} \Big\}$$

і

$$L_{p,n}^{\perp} := \left\{ g \in L_q \colon \int\limits_{\mathbb{D}} fg \, d\nu = 0 \quad \forall f \in HL_{p,n} \right\}.$$

Надалі $HL_{p,0}$ — це теж саме, що й HL_p.

Відомо, що функція K є твірним ядром простору HL_p, $1 \le p \le \infty$, тобто в будь-якій точці $z \in \mathbb{D}$

$$f(z) = \int\limits_{\mathbb{D}} f(w) K(z,w) d\nu(w) \quad \forall f \in HL_p, \tag{7}$$

зокрема

$$K(z,z) = \int\limits_{\mathbb{D}} |K(z,w)|^2 d\nu(w) = \big\| K(z,\cdot) \big\|_2^2.$$

Легко бачити, що таку саму властивість відтворення по відношенню до функцій простору $HL_{p,n}$ має і ядро

$$K_n(z,w) := K(z,w) - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k\overline{w}^k = z^n\overline{w}^n\frac{1+n(1-z\overline{w})}{(1-z\overline{w})^2} =$$

$$= z^n\overline{w}^n(1+n(1-z\overline{w}))K(z,w), \quad n\in\mathbb{Z}_+, \tag{8}$$

тобто

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w)K_n(z,w)d\nu(w) \quad \forall f\in HL_{p,n}, \quad \forall z\in\mathbb{D} \tag{9}$$

і, зокрема,

$$\big\|K_n(z,\cdot)\big\|_2^2 = \int_{\mathbb{D}} |K_n(z,w)|^2 d\nu(w) =$$

$$= K_n(z,z) = |z|^{2n}\frac{1+n(1-|z|^2)}{(1-|z|^2)^2}.$$

Зауважимо, що функції K і K_n у вказаному сенсі не єдині твірні ядра для просторів HL_p і $HL_{p,n}$ відповідно.

Нашою найближчою метою є побудова інших твірних ядер для зазначених просторів так, щоб ці ядра мали певні екстремальні властивості.

Нехай $1\le p\le\infty$ і $n\in\mathbb{Z}_+$. Означимо в $\mathbb{D}^2$ функцію $K_{p,n}$ таким чином:

$$K_{p,n}(z,w) := \begin{cases} K_p(z,w) := K(z,z)^{2/p-1}\dfrac{|K(z,w)|^2}{(K(w,z))^{2/p}}, & n=0, \\ \left(\dfrac{z}{w}\right)^{n(1-2/p)} K_n(z,z)^{2/p-1}\dfrac{|K_n(z,w)|^2}{(K_n(w,z))^{2/p}}, & n\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{10}$$

Теорема 2. *Нехай $n\in\mathbb{Z}_+$ і $1\le p\le\infty$. Якщо $f\in HL_{p,n}$, то для кожного $z\in\mathbb{D}$*

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w)K_{p,n}(z,w)d\nu(w). \tag{11}$$

***Зауваження* 2.** Інтеграл у правій частині формули (11) можна трактувати як лінійний оператор, визначений на L_p. Зокрема, при $p=\infty$ і $n=0$ такий оператор відомий як перетворення Березіна [2, с. 29], а при $p=2$, $n=0$ — це ортогональний проектор L_2 в HL_2.

Доведення. Нехай $n\in\mathbb{Z}_+$. Зафіксуємо довільне $z\in\mathbb{D}$ і розглянемо функцію g, означену в $\mathbb{D}$ так:

$$g(w) := \left(\frac{z^nK_n(w,z)}{w^nK_n(z,z)}\right)^{1-2/p} f(w) =$$

$$= \left(\frac{(1+n(1-w\overline{z}))K(w,z)}{(1+n(1-z\overline{z}))K(z,z)}\right)^{1-2/p} f(w), \quad w\in\mathbb{D}.$$

Оскільки для кожного фіксованого $z\in\mathbb{D}$

$$\sup_{w\in\mathbb{D}}\left|\frac{z^nK_n(w,z)}{w^nK_n(z,z)}\right|<\infty$$

і, згідно з (8), для будь-якого $w\in\mathbb{D}$

$$\left(\frac{z^nK_n(w,z)}{w^nK_n(z,z)}\right)^{1-2/p}=\sum_{k=0}^{\infty}a_kw^k,$$

де $a_k=a_k(z)$ — певні коефіцієнти, причому $a_k\neq 0$, $k\in\mathbb{Z}_+$, то функція $g\in HL_{p,n}$, і до того ж $g(z)=f(z)$. Таким чином, згідно з (9)

$$f(z)=\int\limits_{\mathbb{D}}g(w)K_n(z,w)d\nu(w)=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{D}}f(w)K_{p,n}(z,w)d\nu(w)\quad\forall\ z\in\mathbb{D}.$$

Теорему доведено.

Продемонструємо тепер екстремальні властивості ядер $K_{p,n}$.

Нехай $n\in\mathbb{Z}_+$ і $1\leq p\leq\infty$. Позначимо

$$A_{n,p}:=\left\{f\in HL_{p,n}\colon\int\limits_{\mathbb{D}}|f(w)|^p|w|^{n(2-p)}d\nu(w)\leq 1\right\}$$

і розглянемо задачі про знаходження точних значень величин

$$A(\zeta,p,n):=\sup\Big\{|f(\zeta)|\colon f\in A_{p,n}\Big\},\tag{12}$$

$$B(\zeta,q,n):=\inf\Big\{\big\|K(\zeta,\cdot)-g(\cdot)\big\|_q\colon g\in L^{\perp}_{p,n}\Big\},\tag{13}$$

$$C(\zeta,p):=\inf\Big\{\big\|K_p(\zeta,\cdot)-h(\cdot)\big\|_q\colon h\in L^{\perp}_{p}\Big\},\tag{14}$$

де $\zeta\in\mathbb{D}$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, та екстремальних функцій, на яких реалізуються величини $A(\zeta,p,n)$, $B(\zeta,q,n)$ і $C(\zeta,p)$.

Ми покажемо, що розв'язки цих задач виражаються в термінах функцій K_n і $K_{p,n}$.

У наступному твердженні йдеться про розв'язок задач (12) і (14) та двоїстість задач (12) та (13), коли $2\leq p\leq\infty$ і $n\in\mathbb{Z}_+$.

Теорема 3. *Нехай* $\zeta\in\mathbb{D}$. *Тоді*:

1) *якщо* $1\leq p\leq\infty$, *то для будь-якого* $n\in\mathbb{Z}_+$

$$A(\zeta,p,n)=|\zeta|^{n(1-2/p)}K_n(\zeta,\zeta)^{1/p},\tag{15}$$

а екстремальною функцією в задачі (12) *є функція*

$$f_*(z)=z^{n(1-2/p)}\left(\frac{K_n(z,\zeta)}{\|K_n(\zeta,\cdot)\|_2}\right)^{2/p}=z^n\left(\frac{\overline{\zeta}^n(1+n(1-z\overline{\zeta}))K(z,\zeta)}{\|K_n(\zeta,\cdot)\|_2}\right)^{2/p};\tag{16}$$

2) *якщо* $1 \leq p \leq \infty$ *і* $q = p/(p-1)$, *то*

$$B(\zeta, q, 0) = A(\zeta, p, 0) = K(\zeta, \zeta)^{1/p}; \tag{17}$$

якщо ж $2 \leq p \leq \infty$ *і* $q = p/(p-1)$, *то для будь-якого* $n \in \mathbb{Z}_+$

$$B(\zeta, q, n) = A(\zeta, p, n) = |\zeta|^{n(1-2/p)} K_n(\zeta, \zeta)^{1/p}, \tag{18}$$

а екстремальною функцією в задачі (13) *є функція*

$$g_*(\cdot, \zeta) = K(\zeta, \cdot) - K_{p,n}(\zeta, \cdot); \tag{19}$$

3) *якщо* $1 \leq p \leq \infty$ *і* $q = p/(p-1)$, *то*

$$C(\zeta, p) = \|K_p(\zeta, \cdot)\|_q = K(\zeta, \zeta)^{1/p},$$

а екстремальною функцією в задачі (14) *є функція* $h_* \equiv 0$.

***Зауваження* 3.** Як буде видно з доведення теореми, завжди можна стверджувати таке: якщо $1 \leq p \leq \infty$, $q = p/(p-1)$ і $n \in \mathbb{Z}_+$, то

$$B(\zeta, q, n) \leq |\zeta|^{n(1-2/p)} K_n(\zeta, \zeta)^{1/p} \quad \forall \zeta \in \mathbb{D}.$$

Зазначимо також, що аналоги теорем 2 і 3 для просторів Гарді H_p відомі, вони містяться в роботі [14] (див. теореми 3 і 5).

Доведення. Доведемо рівність (15) і перший пункт теореми. Для цього скористаємося зображенням (11) для функції $f \in HL_{p,n}$. Застосувавши нерівність Гельдера для оцінки інтеграла в правій частині (11), отримаємо

$$|f(\zeta)| \leq \int_{\mathbb{D}} |f(w) K_{p,n}(\zeta, w)| \, d\nu(w) =$$

$$= |\zeta|^{n(1-2/p)} K_n(\zeta, \zeta)^{2/p-1} \int_{\mathbb{D}} \left| f(w) w^{n(2/p-1)} \right| \frac{|K_n(w, z)|^2}{|K_n(w, z)|^{2/p}} d\nu(w) \leq$$

$$\leq |\zeta|^{n(1-2/p)} K_n(\zeta, \zeta)^{2/p-1} \left(\int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p |w^{n(2-p)}| d\nu(w) \right)^{1/p} \times$$

$$\times \left(\int_{\mathbb{D}} |K_n(w, \zeta)|^2 d\nu(w) \right)^{1/q} \leq$$

$$\leq |\zeta|^{n(1-2/p)} K_n(\zeta, \zeta)^{2/p-1} K_n(\zeta, \zeta)^{1/q} =$$

$$= |\zeta|^{n(1-2/p)} K_n(\zeta, \zeta)^{1/p}.$$

Останнє доводить потрібну оцінку величини $A(\zeta, p, n)$ зверху.

Для оцінки знизу візьмемо функцію f_*, визначену формулою (16). Легко бачити, що

$$|f_*(\zeta)| = |\zeta|^{n(1-2/p)} K_n(\zeta,\zeta)^{1/p},$$

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |f_*(z)|^p |z|^{n(2-p)} d\nu(z) = K_n(\zeta,\zeta)^{-1} \int\limits_{\mathbb{D}} |z|^{n(p-2)} |z|^{n(2-p)} |K_n(z,\zeta)|^2 d\nu(z) =$$

$$= K_n(\zeta,\zeta)^{-1} K_n(\zeta,\zeta) = 1$$

і, крім цього, $f_*(z) = z^n \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, де $b_k = b_k(\zeta)$ — певні коефіцієнти, залежні від ζ. Тому функція $f_* \in A_{p,n}$ і є екстремальною.

Перейдемо до доведення другого пункту теореми. Покажемо, що при $2 \le \le p \le \infty$

$$A(\zeta,p,n) \le B(\zeta,q,n). \tag{20}$$

Справді, якщо функція $f \in A_{p,n}$, то, згідно з (7),

$$f(\zeta) = \int\limits_{\mathbb{D}} f(w) K(\zeta,w) d\nu(w) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{D}} f(w) \left(K(\zeta,w) - g(w)\right) d\nu(w) \quad \forall \zeta \in \mathbb{D},$$

де g — будь-яка функція з $L_{q,n}^{\perp}$. Звідси за нерівністю Гельдера

$$|f(\zeta)| \le \left(\int\limits_{\mathbb{D}} |f(w)|^p d\nu \right)^{1/p} \left\| K(\zeta,\cdot) - g(\cdot) \right\|_q \le$$

$$\le \left(\int\limits_{\mathbb{D}} |f(w)|^p |w|^{n(2-p)} d\nu \right)^{1/p} \left\| K(\zeta,\cdot) - g(\cdot) \right\|_q \le$$

$$\le \| K(\zeta,\cdot) - g(\cdot) \|_q \quad \forall \zeta \in \mathbb{D}, \tag{21}$$

оскільки $|w|^{n(2-p)} \ge 1$ при $2 \le p \le \infty$ і $w \in \mathbb{D}$. Останні співвідношення доводять нерівність$|f(\zeta)| \le B(\zeta,q,n)$, а відтак і (20), оскільки f — довільна функція з $A_{p,n}$.

Нерівність

$$A(\zeta,p,0) \le B(\zeta,q,0)$$

доводиться аналогічно із формальною заміною n на 0 і з урахуванням того, що параметр p можна брати з проміжку $[1,\infty]$.

Для оцінки зверху величини $B(\zeta,q,n)$ візьмемо функцію g_*, визначену формулою (19), і покажемо, що при кожному $\zeta \in \mathbb{D}$ $g_*(\cdot,\zeta) \in L_{q,n}^{\perp}$.

Дійсно, згідно з (7) і (11), для будь-якої функції $f \in HL_{p,n}$

$$\int\limits_{\mathbb{D}} f(w)g_*(w,\zeta)d\nu(w) = \int\limits_{\mathbb{D}} f(w)K(\zeta,w)d\nu(w) - \int\limits_{\mathbb{D}} f(w)K_{p,n}(\zeta,w)d\nu(w) =$$

$$= f(\zeta) - f(\zeta) = 0 \quad \forall\zeta\in\mathbb{D}.$$

Отже, $g_*(\cdot,\zeta)\in L_{q,n}^{\perp}$ і

$$B(\zeta,q,n) \le \|K(\zeta,\cdot) - g_*(\cdot,\zeta)\|_q = \|K_{p,n}(\zeta,\cdot)\|_q \le$$

$$\le |\zeta|^{n(1-2/p)} K_n(\zeta,\zeta)^{1/p} \quad \forall\zeta\in\mathbb{D}.$$

Але з урахуванням (20) і (15) скрізь в останньому співвідношенні виконується тільки рівність. Цим завершується доведення рівності (18) і екстремальності функції $g_*(\cdot,\zeta)$.

Доведемо тепер третій пункт теореми. З формули (11) за нерівністю Гельдера випливає

$$\sup_{f\in A_p} |f(\zeta)| \le C(\zeta,p) \le \|K_p(\zeta,\cdot)\|_q = K(\zeta,\zeta)^{1/p} \quad \forall\zeta\in\mathbb{D}.$$

Але, згідно з доведеним вище,

$$\sup_{f\in A_p} |f(\zeta)| = A(\zeta,p,0) = K(\zeta,\zeta)^{1/p} \quad \forall\zeta\in\mathbb{D}.$$

Отже,

$$C(\zeta,p) = \big\|K_p(\zeta,\cdot)\big\|_q = K(\zeta,\zeta)^{1/p} \quad \forall\zeta\in\mathbb{D}.$$

Теорему повністю доведено.

3. Доведення теореми 1. Рівність (6) тривіальна при $\varrho=0$. Крім цього, (6) при $n=0$ — це в точності рівність (17). Тому далі вважаємо, що $0<\varrho<1$ і $n\in\mathbb{N}$.

Зауважимо, що

$$\mathcal{L}_n(A_p;C(\mathbb{T}_\varrho)) = \inf_{\Lambda}\sup_{f\in A_p} \big|f(\varrho) - U_{n,\Lambda}(f)(\varrho)\big|. \tag{22}$$

Справді, для кожної функції $f\in A_p$ знайдеться принаймні одна точка $z_0\in\mathbb{T}_\varrho$ така, що

$$\big|f(z_0) - U_{n,\Lambda}(f)(z_0)\big| = \big\|f - U_{n,\Lambda}(f)\big\|_{C(\mathbb{T}_\varrho)}.$$

Розглядаючи оператор R, означений на A_p формулою $R(f)(z) = f(e^{-i\arg z_0}z)$, $z\in\mathbb{D}$, бачимо, що рівність (22) випливає з того, що $R(A_p)=A_p$,

$$U_{n,\Lambda}(R(f))(z) = U_{n,\Lambda}(f)(e^{-i\arg z_0}z)$$

і

$$\big|R(f)(\varrho) - U_{n,\Lambda}(R(f))(\varrho)\big| = \big\|f - U_{n,\Lambda}(f)\big\|_{C(\mathbb{T}_\varrho)}.$$

Перейдемо до оцінки зверху величини $\mathcal{L}_n\big(A_p;C(\mathbb{T}_\varrho)\big)$.

Зафіксуємо $\varrho \in (0,1)$ і побудуємо матрицю $\Lambda^* = \{\lambda_k^n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $k = \overline{0, n-1}$, елементи якої визначаються формулою

$$\lambda_k^n = 1 - \varrho^{-k} \int\limits_{\mathbb{D}} w^k K_{p,n}(\varrho, w) d\nu(w), \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{23}$$

Тоді для кожної функції $f \in A_p$

$$U_{n,\Lambda^*}(f)(\varrho) = \int\limits_{\mathbb{D}} f(w) g_*(w, \varrho) d\nu(w),$$

де $g_*(\cdot, \varrho)$ — функція, означена формулою (19).

Справді, позначивши $S_n(f)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}_k z^k$, згідно з (7) та (11) одержимо

$$\int\limits_{\mathbb{D}} f(w) g_*(w, \varrho) d\nu(w) = \int\limits_{\mathbb{D}} f(w) \left(K(\varrho, w) - K_{p,n}(\varrho, w)\right) d\nu(w) =$$

$$= f(\varrho) - \int\limits_{\mathbb{D}} \left(f(w) - S_n(f)(w)\right) K_{p,n}(\varrho, w) d\nu(w) -$$

$$- \int\limits_{\mathbb{D}} S_n(f)(w) K_{p,n}(\varrho, w) d\nu(w) =$$

$$= f(\varrho) - \left(f(\varrho) - S_n(f)(\varrho)\right) - \int\limits_{\mathbb{D}} S_n(f)(w) K_{p,n}(\varrho, w) d\nu(w) =$$

$$= S_n(f)(\varrho) - \int\limits_{\mathbb{D}} S_n(f)(w) K_{p,n}(\varrho, w) d\nu(w) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \varrho^{-k} \int\limits_{\mathbb{D}} w^k K_{p,n}(\varrho, w) d\nu(w)\right) \widehat{f}_k \varrho^k.$$

Отже, на основі (7) маємо рівність

$$f(\varrho) - U_{n,\Lambda^*}(f)(\varrho) = \int\limits_{\mathbb{D}} f(w) \left(K(\varrho, w) - g_*(w, \varrho)\right) d\nu(w) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{D}} f(w) K_{p,n}(\varrho, w) d\nu(w).$$

Звідси за нерівністю Гельдера маємо оцінку

$$\mathcal{L}_n(A_p; C(\mathbb{T}_\varrho)) = \sup_{f \in A_p} \left| f(\varrho) - U_{n,\Lambda^*}(f)(\varrho) \right| \le$$

$$\le \left\| K_{p,n}(\varrho, \cdot) \right\|_q = \varrho^{n(1-2/p)} K_n(\varrho, \varrho)^{1/p}. \tag{24}$$

Оскільки $A_{p,n} \subset A_p$ при $2 \le p \le \infty$ (див. співвідношення (21)), то функція f_*, означена формулою (16), в якій $\zeta = \varrho$, належить A_p і для неї

$$\left|f_*(\varrho) - U_{n,\Lambda^*}(f_*)(\varrho)\right| = |f_*(\varrho)| = A(\varrho, p, n) = \varrho^{n(1-2/p)} K_n(\varrho, \varrho)^{1/p}. \tag{25}$$

Нехай тепер $1 \le p < 2$. Візьмемо функцію $h_* := (p/2)^{1/p} f_*$, де f_* — та ж сама функція, що і в попередньому випадку, і покажемо, що $h_* \in A_p$.

Дійсно, пригадавши, що $K_n(z,w) = \sum_{k=n}^{\infty}(k+1)z^k\overline{w}^k$, за рівністю Парсеваля будемо мати

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |h_*(w)|^p d\nu(w) = \frac{p}{2} K_n(\varrho,\varrho)^{-1} \int\limits_{\mathbb{D}} |w|^{n(p-2)} |K_n(\varrho, w)|^2 d\nu(w) =$$

$$= \frac{p}{2} K_n(\varrho,\varrho)^{-1} 2 \int\limits_0^1 r^{n(p-2)} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |K_n(\varrho, re^{it})|^2 dt\, rdr =$$

$$= \frac{p}{2} K_n(\varrho,\varrho)^{-1} \sum_{k=n}^{\infty} \varrho^{2k}(k+1)^2 2 \int\limits_0^1 r^{n(p-2)+2k+1} dr =$$

$$= \frac{p}{2} K_n(\varrho,\varrho)^{-1} \sum_{k=n}^{\infty} \varrho^{2k}(k+1)^2 \frac{2}{n(p-2)+2k+2} \le$$

$$\le \frac{p}{2} \sup_{k \ge n} \frac{2(k+1)}{n(p-2)+2k+2} K_n(\varrho,\varrho)^{-1} \sum_{k=n}^{\infty} \varrho^{2k}(k+1) =$$

$$= \frac{p}{2} \sup_{k \ge n-1} \frac{1}{1 - \dfrac{n}{k+1}\left(1 - \dfrac{p}{2}\right)} = 1.$$

Отже, алгебраїчний многочлен U_{n,Λ^*} наближає функцію h_* з похибкою

$$\left|h_*(\varrho) - U_{n,\Lambda^*}(h_*)(\varrho)\right| = |h_*(\varrho)| = \left(\frac{p}{2}\right)^{1/p} |f_*(\varrho)| =$$

$$= \left(\frac{p}{2}\right)^{1/p} \varrho^{n(1-2/p)} K_n(\varrho,\varrho)^{1/p}.$$

Тому

$$\mathcal{L}_n(A_p; C(\mathbb{T}_\varrho)) \ge \left(\frac{p}{2}\right)^{1/p} \varrho^{n(1-2/p)} K_n(\varrho,\varrho)^{1/p}. \tag{26}$$

Для завершення доведення теореми 1 досить об'єднати співвідношення (24) — (26) і врахувати те, що

$$\varrho^{n(1-2/p)} K_n(\varrho,\varrho)^{1/p} = \varrho^n \left(\frac{1+n(1-\varrho^2)}{(1-\varrho^2)^2} \right)^{1/p}.$$

Теорему доведено.

1. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1964. – 440 с.
2. *Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K.* Theory of Bergman spaces. – New York; Berlin: Springer, 2000. – 286 p.
3. *Бабенко К. И.* Наилучшие приближения классов аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1958. – **22**, № 5. – С. 631 – 640.
4. *Тайков Л. В.* О наилучших линейных методах приближения классов B^r и H^r // Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, № 4. – С. 183 – 189.
5. *Scheick J. T.* Polynomial approximation of functions analytic in a disk // Proc. Amer. Math. Soc. – 1966. – **17**. – P. 1238 – 1243.
6. *Белый В. И., Двейрин М. З.* О наилучших линейных методах приближения на классах функций, определяемых союзными ядрами // Метрические вопросы теории функций и отображений. – Киев: Наук. думка, 1971. – **5**. – С. 37 – 54.
7. *Fisher S. D., Miccelli C. A.* The n-widths of sets of analytic functions // Duke Math. J. – 1980. – **47**, № 4. – P. 789 – 801.
8. *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory. – Berlin: Springer, 1985. – 291 p.
9. *Осипенко К. Ю., Стесин М. И.* О поперечниках класса Харди H_2 в n-мерном шаре // Успехи мат. наук. – 1990. – **45**, № 5. – С. 193 – 194.
10. *Fisher S. D., Stessin M. I.* On n-widths of classes of holomorphic functions with reproducing kernel // Ill. J. Math. – 1994. – **38**. – P. 589 – 615.
11. *Osipenko K. Yu.* On n-widths of holomorphic functions of several variables // J. Approxim. Theory. – 1995. – **82**. – P. 135 – 155.
12. *Вакарчук С. Б.* Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Мат. заметки. – 1995. – **57**, № 1. – С. 30 – 39.
13. *Савчук В. В.* Найкращі лінійні методи наближення функцій класу Харді H_p // Укр. мат журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 919 – 925.
14. *Савчук В. В.* Найкращі наближення твірних ядер просторів аналітичних функцій // Там же. – 2004. – **56**, № 7. – С. 947 – 959.

Одержано 14.02.2006