УДК 519.21 + 62

Я. М. Чабанюк (Нац. ун-т „Львів. політехніка")

АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ ФЛУКТУАЦІЙ ПРОЦЕДУРИ СТОХАСТИЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ З ДИФУЗІЙНИМ ЗБУРЕННЯМ У МАРКОВСЬКОМУ СЕРЕДОВИЩІ

We consider the asymptotic normality of a continuous stochastic approximation procedure in the case where the regression function includes a singularly perturbed term depending on the external medium that is described by the uniformly ergodic Markov process. In the framework of diffusion approximation scheme, we formulate sufficient conditions of the asymptotic normality in terms of the existence of the Lyapunov function for the corresponding averaged equation.

Розглянуто асимптотичну нормальність неперервної процедури стохастичної апроксимації у випадку, коли функція регресії має сингулярно збурений доданок, який залежить від зовнішнього середовища, що описується рівномірно ергодичним марковським процесом. У схемі дифузійної апроксимації сформульовано достатні умови асимптотичної нормальності в термінах існування функції Ляпунова для відповідного усередненого рівняння.

1. Вступ. Процедури стохастичної апроксимації (ПСА) широко використовуються при розв'язанні задач оптимізації в математичній статистиці, теорії управління та передачі інформації, теорії розпізнавання образів тощо [1]. Разом з основною проблемою збіжності ПСА до кореня рівняння регресії існує важлива проблема оцінки швидкості збіжності, яка випливає з асимптотичної нормальності флуктуації ПСА навколо кореня рівняння регресії. Дослідження асимптотичної нормальності флуктуації в класичних схемах ПСА [1, 2] здійснюються з використанням принципу інваріантності для сум (в дискретній ПСА) та процесів (в неперервній ПСА). У роботі [3] асимптотична нормальність ПСА в марковському середовищі в схемі усереднення вивчалась з використанням мартингальної характеризації відповідного двокомпонентного марковського процесу та розв'язанням проблеми сингулярного збурення для генератора такого процесу. В результаті отримано породжуючий оператор граничного дифузійного процесу типу Орнштейна – Уленбека.

У даній роботі розглядається асимптотична нормальність для неперервної ПСА в марковському середовищі з асимптотично дифузійним збуренням в умовах збіжності такої процедури [4]. При цьому ми використовуємо другий метод функцій Ляпунова для усередненої системи.

У п. 1 сформульовано постановку задачі, а також введено основні позначення. У п. 2 наведено основний результат статті — теорему про асимптотичну нормальність ПСА, а в п. 3 доведено ряд лем, з яких і випливає доведення теореми.

1. Постановка задачі. Неперервна ПСА в марковському середовищі з асимптотично дифузійним збуренням у схемі серій із малим параметром серій $\varepsilon > 0$ задається еволюційним рівнянням [5]

$$\frac{du^\varepsilon(t)}{dt} = a(t)\left[C\left(u^\varepsilon(t), x\left(\frac{t}{\varepsilon^4}\right)\right) + \varepsilon^{-1} C_0\left(x\left(\frac{t}{\varepsilon^4}\right)\right)\right], \tag{1}$$

на дійсній осі $R = (-\infty; +\infty)$. Функція регресії $C(u, x)$, $u \in R$, $x \in X$, і функція збурення $C_0(x)$, $x \in X$, задовольняють умови існування глобального розв'язку супроводжуючих систем

$$\frac{du_x^\varepsilon(t)}{dt} = C^\varepsilon\big(u_x^\varepsilon(t), x\big), \quad x \in X,$$
$$C^\varepsilon(u, x) = C(u, x) + \varepsilon^{-1} C_0(x).$$

Марковський процес $x(t)$, $t \geq 0$, в стандартному просторі $(X, \mathbf{X})$ із стаціонарним розподілом $\pi(B)$, $B \in \mathbf{X}$, задається породжуючим оператором Q, що визначається співвідношенням

$$Q\varphi(x) = \int_X Q(x, dy)\big[\varphi(y) - \varphi(x)\big],$$

де $\varphi(x) \in D_Q$ — область визначення оператора Q.

При цьому породжуючий оператор Q є зведено-оборотним, для якого існує потенціал R_0, що визначається рівнянням [6]

$$R_0 Q = Q R_0 = \Pi - I.$$

Тут Π — проектор у банаховому просторі $\mathbf{B}(X)$ дійснозначних функцій з супремум-нормою, який задається співвідношенням

$$\Pi\varphi(x) := \widetilde{\varphi}\boldsymbol{1}(x), \qquad \widetilde{\varphi} := \int_X \pi(dx)\varphi(x), \qquad \boldsymbol{1}(x) \equiv 1, \quad x \in X.$$

Стаціонарний розподіл $\pi(B)$, $B \in \mathbf{X}$, визначається рівнянням

$$\pi(B) = \int_X \pi(dy) Q(y, B), \qquad B \in \mathbf{X}, \quad \pi(X) = 1.$$

При відповідних умовах на функцію $a(t)$, $t \geq 0$, та при рівномірній ергодичності марковського процесу $x(t)$, $t \geq 0$, зі стаціонарним розподілом $\pi(B)$, $B \in \mathbf{X}$, ПСА (1) збігається з імовірністю одиниця до точки рівноваги u_0 усередненої системи [5]

$$\frac{du(t)}{dt} = C\big(u(t)\big), \tag{2}$$

де функція $C(u)$ є усередненням функції регресії $C(u, x)$ по стаціонарному розподілу $\pi(B)$, $B \in \mathbf{X}$:

$$C(u) := \int_X \pi(dx) C(u, x).$$

Далі, не зменшуючи загальності, вважаємо $u_0 = 0$, тобто має місце рівняння

$$C(0) = 0. \tag{3}$$

Для збурення $C_0(x)$ функції регресії $C(u, x)$ виконується умова балансу

УБ$_1$) $\int_X \pi(dx)C_0(x) = 0,$
або $\Pi C_0(x) = 0.$

Будемо розглядати стандартну ПСА (1) з нормуючою функцією $a(t) = \frac{a}{t}$, $a > 0$, $t > 0$, і використовувати функцію регресії $C(u, x)$ таку, що

У$_1$) $C(u, \cdot) \in C^2(R)$,
а друга похідна по u задовольняє глобальну умову Ліпшиця

У$_2$) $\left|C''_u(u, \cdot) - C''_u(u', \cdot)\right| \le C|u - u'|$
з константою C, що не залежить від $x \in X$.

Тоді за формулою Тейлора для функції регресії $C(u, x)$ маємо розклад

$$C(u, x) = C^0(x) + uC^1(x) + u^2 C_2(u, x), \tag{4}$$

де

$$C^0(x) := C(0, x), \qquad C^1 := C'_u(0, x),$$
$$C_2(u, x) := \frac{1}{2} C''_u(\theta u, x), \quad 0 \le \theta \le 1. \tag{5}$$

Для $C^0(x)$, враховуючи (3) та проектор Π, маємо ще одну умову балансу

УБ$_2$) $\Pi C^0(x) = 0.$

Нехай виконується умова збіжності ПСА (1) у марковському середовищі [5]: існує функція Ляпунова $V(u)$, $u \in R$, така, що забезпечує експоненціальну стійкість системи (2),

С$_1$) $C(u)V'(u) \le -c_0 V(u)$, $c_0 > 0$,
а також для функції $\widetilde{C}(u, x) = C(u, x) - C(u)$ мають місце додаткові умови:

С$_2$) $\left|C_0(x)R_0C_0(x)V''(u)\right| \le c_1\big(1 + V(u)\big)$, $c_1 > 0$,
$\left|C(u, x)R_0\big[\widetilde{C}(u, x)V'(u)\big]'\right| \le c_2 V(u)$, $c_2 > 0$,
$\left|C_0(x)R_0\big[\widetilde{C}(u, x)V'(u)\big]'\right| \le c_3(1 + V(u))$, $c_3 > 0$,
$\left|C_0(x)R_0C_0(x)V'''(u)\right| \le c_4\big(1 + V(u)\big)$, $c_4 > 0$,
$\left|C(u, x)R_0C_0(x)R_0C_0(x)V'''(u)\right| \le c_5 V(u)$, $c_5 > 0$.

***Зауваження* 1.** Можна переконатись в тому, що для дифузійного збурення

$$C_0^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-2} a \int\limits_{t_0}^{t} C_0\left(x\left(\frac{s}{\varepsilon^4}\right)\right)\frac{ds}{s}, \tag{6}$$

має місце (див. [6], твердження 4.2) слабка збіжність

$$C_0^\varepsilon(t) \Rightarrow \sigma(t)w(t), \quad \varepsilon \to 0, \tag{7}$$

де $\sigma(t) = \frac{a\rho}{t}$, $\rho^2 = 2\int_X \pi(dx)C_0(x)R_0C_0(x)$, а $w(t)$ — стандартний вінерів процес.

Введемо необхідні позначення:

$$c := -\int\limits_X \pi(dx)C^1(x), \quad b := 1 + \frac{1}{2ac},$$

де $C^1(x)$ визначається в (5), а також

$$C^1(v,w) := vb + \frac{\sqrt{t}w}{c}.$$

Флуктуація ПСА (1) розглядається у вигляді

$$v^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\sqrt{t}\big[u^\varepsilon(t) - \varepsilon C_0^\varepsilon(t)\big]. \tag{8}$$

***Зауваження* 2.** Доцільність центрування та нормування у (8) випливає з умови (3) та збіжності (7).

2. Теорема (асимптотична нормальність). *В умовах* C_1 *та* C_2 *збіжності ПСА* (1) *та при додаткових умовах:*

$D_1)$ $\rho^2 > 0,$

$D_2)$ $b < 0$

має місце слабка збіжність

$$v^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta(t), \quad \varepsilon \to 0, \tag{9}$$

в кожному скінченному інтервалі $(0 < t_0 < t < T)$. *Граничний процес* $\zeta(t)$, $t \geq 0$, *є дифузійним процесом Орнштейна–Уленбека* [8], *що визначається генератором*

$$\mathbf{L}\varphi(v,w) = \frac{a^2\rho^2}{2t^2}\varphi''_w(v,w) + \frac{1}{t}C^1(v,w)\varphi'_v(v,w). \tag{10}$$

***Зауваження* 3.** Граничний дифузійний процес $\zeta(t)$, $t \geq 0$, задовольняє стохастичне рівняння

$$d\zeta(t) = \frac{a}{t}\big[cb\zeta(t) + \rho\sqrt{t}w(t)\big]dt.$$

***Наслідок* 1.** *В умовах теореми при* $a >> 0$ *флуктуація* $v^\varepsilon(t)$ *має асимптотично нормальний розподіл* $N(0,\sigma^2)$, *тобто*

$$v^\varepsilon(t) \Rightarrow v, \quad t \to \infty,$$

і випадкова величина $v \in N(0,\sigma^2)$ *з дисперсією* $\sigma^2 = a^2\rho^2/bc$.

3. Властивості нормованої ПСА (8).

Лема 1. *Нормована ПСА* (8) *задовольняє еволюційне рівняння*

$$dv^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}C\left(\varepsilon\left(\frac{v^\varepsilon(t)}{\sqrt{t}} + C_0^\varepsilon(t)\right), x\left(\frac{t}{\varepsilon^4}\right)\right)dt + \frac{1}{2t}v^\varepsilon(t)dt. \tag{11}$$

Доведення. Розглянемо нормовану флуктуацію у вигляді

$$\widetilde{u}^\varepsilon(t) := \varepsilon^{-1}\big[u^\varepsilon(t) - \varepsilon C_0^\varepsilon(t)\big], \tag{12}$$

для якої має місце зображення

$$d\widetilde{u}^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\frac{a}{t}C\left(u^\varepsilon(t), x\left(\frac{t}{\varepsilon^4}\right)\right)dt. \tag{13}$$

Оскільки з (12) та (8) маємо $\widetilde{u}^\varepsilon(t) = v^\varepsilon(t)/\sqrt{t}$, то, обчислюючи диференціал у лівій частині (13), отримуємо (11).

Наслідок 2. *Має місце асимптотичний розклад еволюційного рівняння* (11):

$$dv^\varepsilon(t) = \left(\varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}C^0\left(x\left(\frac{t}{\varepsilon^4}\right)\right) + \frac{a}{t}\left[b\left(x\left(\frac{t}{\varepsilon^4}\right)\right)v^\varepsilon(t) + \sqrt{t}C_0^\varepsilon(t)C^1(x)\right]\right)dt +$$

$$+ \theta_C\left(v^\varepsilon(t), x\left(\frac{t}{\varepsilon^4}\right)\right)dt,$$

із знехтуючим членом

$$\left|\theta_C(v^\varepsilon(t), x)\right| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad t_0 < t < T,$$

де $b(x) = C^1(x) + 1/2.$

Доведення. У правій частині (11) для функції регресії $C(u,x)$ використаємо розклад (4).

4. Генератор розширеного марковського процесу. Розглянемо розширений марковський процес

$$v^\varepsilon(t), \quad C_0^\varepsilon(t), \quad x_t^\varepsilon := x\left(\frac{t}{\varepsilon^4}\right), \quad t \geq 0. \tag{14}$$

Лема 2. *Генератор процесу* (14) *на тест-функціях* $\varphi(v, w, \cdot) \in C^3(R \times R)$ *має асимптотичне зображення*

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi(v,w,x) = \varepsilon^{-4}Q\varphi(\cdot,\cdot,x) + \varepsilon^{-2}\frac{a}{t}\mathbf{C}_0(x)\varphi(\cdot,w,\cdot) +$$

$$+\varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}\mathbf{C}^0(x)\varphi(v,\cdot,\cdot) + \frac{a}{t}\mathbf{C}^1(v,w,x)\varphi(v,\cdot,\cdot) + \theta_t^\varepsilon(v,w,x)\varphi(v,w,x), \tag{15}$$

де

$$\mathbf{C}_0(x)\varphi(w) = C_0(x)\varphi'(w), \tag{16}$$

$$\mathbf{C}^0(x)\varphi(v) = C^0(x)\varphi'(v), \tag{17}$$

$$\mathbf{C}^1(v,w,x)\varphi(v) = \left((v + \sqrt{t}w)C^1(x) + \frac{v}{2a}\right)\varphi'(v), \tag{18}$$

а залишковий член $\theta_t^\varepsilon(v,w,x)\varphi(v,w,x)$ *такий, що*

$$\left\|\theta_t^\varepsilon(v,w,x)\varphi(v,w,x)\right\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Доведення. Згідно з означенням генератора для розширеного марковського процесу (14) необхідно обчислити умовне математичне сподівання. Враховуючи (6), маємо

$$E_{v,w,x}\Big[\varphi(v + \Delta v^\varepsilon(t), w + \Delta C_0^\varepsilon(t), x_{t+\Delta}^\varepsilon)) - \varphi(v,w,x)\Big] =$$

$$= \boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi(v,w,x)\Delta + o(\Delta),$$

де генератор $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ має вигляд (15), а $o(\Delta)$ — нескінченно мала другого порядку відносно Δ і Δ перед функцією розуміється як оператор приросту функції.

5. Розв'язок проблеми сингулярного збурення. Для побудови граничного оператора розглянемо розв'язок проблеми сингулярного збурення (РПСЗ) ([7], лема 3.3) для оператора $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ у формі (15) на збуреній тест-функції вигляду

$$\varphi^\varepsilon(v,w,x) = \varphi(v,w) + \varepsilon^2 \frac{1}{t}\varphi_2(v,w,x) +$$
$$+\varepsilon^3 \frac{1}{\sqrt{t}}\varphi_3(v,w,x) + \varepsilon^4 \frac{1}{t}\varphi_4(v,w,x).$$

Лема 3. *Розв'язок проблеми сингулярного збурення для генератора* (15) *має вигляд*

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon \varphi^\varepsilon(v,w,x) = \frac{1}{t}\mathbf{L}\varphi(v,w) + \theta_L^\varepsilon(v,w,x)\varphi(v,w), \tag{19}$$

де оператор $\mathbf{L}$ *обчислюється за формулою* (10), *а залишковий член* $\theta_L^\varepsilon(v,w,x)\varphi(v,w)$ *такий, що*

$$\left\|\theta_L^\varepsilon(v,w,x)\varphi(v,w)\right\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Доведення. Запишемо дію оператора $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ на функцію $\varphi^\varepsilon(v,w,x)$ у вигляді формули

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi^\varepsilon(v,w,x) = \varepsilon^{-4} Q\varphi(v,w) + \varepsilon^{-2}\big[Q\varphi_2(v,w,x) + \boldsymbol{C}_0(x)\varphi(v,w)\big] +$$
$$+\varepsilon^{-1}\left[Q\varphi_3(v,w,x) + \frac{a}{\sqrt{t}}\boldsymbol{C}^0(x)\varphi(v,w)\right] +$$
$$+\frac{1}{t}\Big[Q\varphi_4(v,w,x) + a\boldsymbol{C}_0(x)\varphi_2(v,w,x) + \boldsymbol{C}^1(v,w,x)\varphi(v,w)\Big] +$$
$$+\theta_L^\varepsilon(v,w,x)\varphi(v,w). \tag{20}$$

Зауважимо, що $Q\varphi(v,w) = 0$, оскільки функція $\varphi(v,w)$ не залежить від x. З умови розв'язності $Q\varphi_2(v,w,x) + \boldsymbol{C}_0(x)\varphi(v,w) = 0$ і УБ$_1$ одержуємо зображення для функції

$$\varphi_2(v,w,x) = R_0 \boldsymbol{C}_0(x)\varphi(v,w). \tag{21}$$

З умови розв'язності ПСЗ (20) $Q\varphi_3(v,w,x) + \dfrac{a}{\sqrt{t}}\boldsymbol{C}^0(x)\varphi(v,w) = 0$ і УБ$_2$ маємо

$$\varphi_3(v,w,x) = \frac{a}{\sqrt{t}} R_0 \boldsymbol{C}^0(x)\varphi(v,w).$$

Передостанній доданок в (20) дає граничний оператор $\boldsymbol{L}(x)$:

$$Q\varphi_4(v,w,x) + a\boldsymbol{C}_0(x)\varphi_2(v,w,x) + \boldsymbol{C}^1(v,w,x)\varphi(v,w) = \boldsymbol{L}(x)\varphi(v,w). \tag{22}$$

Враховуючи (21), з (22) маємо

$$Q\varphi_4(v,w,x) + \big[a\boldsymbol{C}_0(x)R_0\boldsymbol{C}_0(x) + \boldsymbol{C}^1(v,w,x)\big]\varphi(v,w) = \boldsymbol{L}(x)\varphi(v,w). \qquad (23)$$

Граничний оператор $\boldsymbol{L}$ визначається з умови розв'язності рівняння (23):

$$\boldsymbol{L}\Pi = \Pi\boldsymbol{L}(x)\Pi. \qquad (24)$$

З формули (24) з урахуванням (16) – (18) отримуємо граничний оператор $\boldsymbol{L}$ у вигляді (10).

***Наслідок* 3.** *Наявність множника* $\dfrac{1}{t}$ *у зображенні* (19) *означає, що при нормуванні* $\tau = e^t$ *граничний процес* $\eta(t) = \zeta(e^t)$, *що визначається генератором* $\mathbf{L}$, *є дифузійним* [8].

Доведення теореми. Застосування модельної граничної теореми (див. [9], теорема M) обґрунтовує слабку збіжність (9).

Висновок. Асимптотичну нормальність неперервної ПСА в евклідовому просторі R^d, $d > 1$, можна отримати з додатковими технічними ускладненнями.

Автор висловлює подяку академіку НАН України В. С. Королюку за увагу до статті.

1. *Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1972. – 304 с.
2. *Ljung L., Pflug G., Walk H.* Stochastic approximation and optimization of random systems. – Basel etc.: Birkhauser, 1992. – 113 p.
3. *Чабанюк Я. М.* Асимптотична нормальність для неперервної процедури стохастичної апроксимації в марковському середовищі // Допов. НАН України. Сер. А. – 2004. – № 5. – С. 37 – 45.
4. *Чабанюк Я. М.* Процедура стохастичної апроксимації в ергодичному середовищі Маркова // Мат. студ. – 2004. – **21**, № 1. – С. 81 – 86.
5. *Чабанюк Я. М.* Непрерывная процедура стохастической аппроксимации с сингулярным возмущением в условиях баланса // Кібернетика і систем. аналіз. – 2006. – № 3. – С. 1 – 7.
6. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их применение. – Киев: Наук. думка, 1976. – 184 с.
7. *Koroliuk V., Limnios N.* Stochastic systems in merging phase space. – World Sci. Publ., 2005. – 330 p.
8. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1986. – 431 с.
9. *Korolyuk V. S., Korolyuk V. V.* Stochastic models of systems. – Kluwer Acad. Publ., 1999. – 185 p.

Одержано 10.10.2005