УДК 517.51

В. Д. Залізко (Нац. пед. ун-т, Київ)

КООПУКЛЕ НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

The Jackson inequality $E_n(f) \leq c\,\omega_3\left(f, \dfrac{\pi}{n}\right)$ connects the value of the best uniform approximation $E_n(f)$ of a 2π-periodic function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by trigonometric polynomials of order $\leq n-1$ with its third modulus of continuity $\omega_3(f,t)$. In the present paper, we show that this inequality is true if continuous 2π-periodic functions that change their convexity on $[-\pi, \pi)$ only at every point of a fixed finite set consisting of the even number of points are approximated by polynomials coconvex to them.

Неравенство Джексона $E_n(f) \leq c\,\omega_3\left(f, \dfrac{\pi}{n}\right)$ связывает величину $E_n(f)$ наилучшего равномерного приближения непрерывной 2π-периодической функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ тригонометрическими полиномами порядка $\leq n-1$ с ее третьим модулем непрерывности $\omega_3(f,t)$. В работе показано, что это неравенство выполняется, если непрерывные 2π-периодические функции, которые меняют свою выпуклость на $[-\pi,\ \pi)$ только в каждой точке фиксированного конечного множества, состоящего из четного числа точек, приближать ковыпуклыми с ними полиномами.

Вступ. Класична нерівність Джексона

$$E_n(f) \leq c(k)\omega_k\left(f, \frac{\pi}{n}\right)$$

пов'язує величину $E_n(f)$ найкращого рівномірного наближення неперервної 2π-періодичної функції $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ тригонометричними поліномами порядку $\leq n-1$ з її k-м модулем неперервності $\omega_k(f,t)$, $k, n \in \mathbb{N}$, $c(k) > 0$. Цю нерівність для $k=1$ довів Д. Джексон, для $k=2$ — А. Зигмунд, у загальному випадку — С. Б. Стєчкін (див., наприклад, [1]).

Дану роботу присвячено розповсюдженню нерівності Джексона при $k=3$ на випадок так званого коопуклого наближення. Наведемо формулювання основного результату роботи. Нехай $s \in \mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$, $Y = \{y_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ — упорядкована за спаданням послідовність дійсних чисел: $-\pi \leq y_{2s} < \ldots < y_1 < \pi$; якщо $i = 2sp + q$, де $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \{1, \ldots, 2s\}$, то $y_i = y_q - 2\pi p$. Далі ми розглядатимемо дійсні 2π-періодичні функції, визначені на дійсній осі $\mathbb{R}$. Як завжди, C — лінійний простір усіх неперервних функцій із рівномірною нормою $\|\cdot\|_C$, $C_Y = \Delta^{(2)}(Y)$ — множина тих функцій $f \in C$, які є опуклими донизу на відрізку $[y_{i+1},\ y_i]$ для парного індексу i та опуклими догори на $[y_{i+1},\ y_i]$ для непарних i (наслідуючи Д. Ньюмена, Л. Раймона, Р. А. ДеВора, будемо називати такі функції *коопуклими*). Для функції $f \in C$ і числа $n \in \mathbb{N}$ позначимо через $E_n(f)_Y = E_n^{(2)}(f;Y)$ величину найкращого рівномірного наближення функції f тригонометричними поліномами порядку $\leq n-1$, які належать множині C_Y. Далі вирази вигляду $c(\alpha, \beta, \ldots)$, $c = c(\alpha, \beta, \ldots)$, $c_1(\alpha, \beta, \ldots)$, $c_1 = c_1(\alpha, \beta, \ldots), \ldots$ позначатимуть додатні величини, які залежать лише від α, β і т. д., причому в різних формулах величини з однаковими позначеннями, взагалі кажучи, відрізняються між собою.

Сформулюємо основний результат роботи.

Теорема 1. *Існує таке додатне $c = c(Y)$, що для кожної функції $f \in C_Y$ і для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність*

$$E_n(f)_Y \leq c\,\omega_3\left(f, \frac{\pi}{n}\right). \tag{1}$$

***Зауваження* 1.** З доведення теореми 1 випливає існування такого $n(d_Y) \in \mathbb{N}$, яке залежить лише від $d_Y := \min\limits_{i=\overline{1,2s}} (y_i - y_{i+1})$, що для кожної функції $f \in C_Y$ нерівність (1) має місце для всіх натуральних $n \geq n(d_Y)$ зі сталою c, яка залежить тільки від s.

Стосовно історії питання зауважимо, що Г. Г. Лоренц і К. Л. Целлер [2] довели нерівність Джексона з першим модулем неперервності для наближення тригонометричними поліномами в класах неперервних 2π-періодичних функцій, які є парними та незростаючими на $[0,\ \pi]$. Нерівність (1), в якій замість третього модуля неперервності міститься другий, встановлено у роботі П. А. Попова [3]. Подібні нерівності, але для так званих кусково-позитивного і кусково-монотонного наближень, доведено в роботах [4] і [5] відповідно.

1. Допоміжні твердження. Без втрати загальності будемо вважати, що $y_{2s} = -\pi$. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$ і парне натуральне $m \geq 10$. Для кожного $i \in \mathbb{Z}$ визначимо $j \in \mathbb{Z}$ з умови $-\dfrac{j\pi}{n} \leq y_i < -\dfrac{(j+1)\pi}{n}$ і покладемо $y_i^- = -\dfrac{(j+m)\pi}{n}$, $y_i^+ = -\dfrac{(j-m)\pi}{n}$. Будемо вважати, що відрізки $[y_i^-,\ y_i^+]$, $i \in \mathbb{Z}$, попарно не перетинаються. Ця умова виконується для всіх натуральних n, починаючи з деякого номера $n(d_Y)$; цей номер далі вважаємо фіксованим. Нехай W — множина, що складається з точок множини Y та всіх точок вигляду $-\dfrac{j\pi}{n}$, $j \in \mathbb{Z}$, які не належать множині $U := \bigcup_{i\in\mathbb{Z}}(y_i^-,\ y_i^+)$. Множина W є зліченною і складається лише з ізольованих точок. Упорядкуємо її за спаданням: $W = \{w_i\}_{i\in\mathbb{Z}}, \ldots < w_1 < \pi = w_0 < w_{-1} < \ldots$. Для цілого j позначимо через $L_j(f;x)$ алгебраїчний поліном другого степеня, який інтерполює функцію f у точках w_{j+1}, w_j, w_{j-1}.

Визначимо функції $S, L \in C_Y$ таким чином. Нехай $j \in \mathbb{Z}$. Якщо $x \in [w_{j+1}, w_j] = [y_i^-,\ y_i]$, $i \in \mathbb{Z}$, то $S(x) := L_{j+1}(f;x)$; якщо $x \in [w_j,\ w_{j-1}] = [y_i,\ y_i^+]$, то $S(x) := L_{j-1}(f;x)$; якщо ж $[w_{j+1},\ w_j]$ не збігається з жодним із відрізків $[y_i^-,\ y_i]$ або $[y_i,\ y_i^+]$, $i \in \mathbb{Z}$, то для $x \in [w_{j+1},\ w_j]$ визначаємо $S(x) := \min\bigl\{L_{j+1}(f;x), L_j(f;x)\bigr\}$, коли функція f опукла догори на відрізку $[w_{j+1}, w_j]$, і $S(x) := \max\bigl\{L_{j+1}(f;x), L_j(f;x)\bigr\}$, коли f опукла донизу на $[w_{j+1},\ w_j]$ (значення квадратних тричленів $L_{j+1}(f;x)$ і $L_j(f;x)$ збігаються в кінцевих точках відрізка $[w_{j+1},\ w_j]$, тому в його внутрішніх точках один із них є не меншим за іншого). В результаті маємо коректно визначену функцію $S \in C$, і, оскільки квадратний тричлен, що інтерполює опуклу догори або донизу функцію, є відповідно опуклим догори або донизу, то $S \in C_Y$.

З іншого боку, нехай $P_j(x)$ позначає алгебраїчний поліном найкращого рівномірного наближення функції f на відрізку $[w_{j+1},\ w_{j-1}]$ степеня 2, $\|f\|_{[a,\ b]} := \max_{a\leq x\leq b}\bigl|f(x)\bigr|$, $a < b$. Оскільки для всіх цілих j виконуються нерівності $\dfrac{2\pi}{n} \leq w_{j-1} - w_{j+1} \leq \dfrac{2m\pi}{n}$, то фундаментальні тричлени в інтерполяційній формулі Лагранжа для полінома $P_j(x)$ рівномірно обмежені зверху на відрізку $[w_{j+1},\ w_{j-1}]$ додатною величиною $c(m)$. Тому з нерівності Уітні (див., наприклад, теорему 4.1 [6]), загальних властивостей модулів неперервності [6] (лема 2.2) та із зображення $f(x) - L_j(f;x) = f(x) - P_j(x) - L_j(f - P_j;x)$, $w_{j+1} \leq x \leq w_{j-1}$, для кожного $j \in \mathbb{Z}$ маємо співвідношення

$$\|f - L_j(f;\cdot)\|_{[w_{j+1},\, w_{j-1}]} \le$$
$$\le \|f - P_j\|_{[w_{j+1},\, w_{j-1}]} + \|L_j(f - P_j)\|_{[w_{j+1},\, w_{j-1}]} \le$$
$$\le \|f - P_j\|_{[w_{j+1},\, w_{j-1}]} + 3c(m)\|f - P_j\|_{[w_{j+1},\, w_{j-1}]} \le$$
$$\le c(1+3c(m))\omega_3(f, w_{j-1} - w_{j+1}) \le$$
$$\le c(1+3c(m))\omega_3\left(f, \frac{2m\pi}{n}\right) \le c(1+3c(m))2^3(2m)^3\omega_3\left(f, \frac{\pi}{n}\right) =$$
$$= 16c(1+3c(m))2m^3\omega_3\left(f, \frac{\pi}{n}\right),$$

де c — стала Уітні (див. [6]). З цих співвідношень випливає оцінка

$$\|f - S\|_C \le c(m)\omega_3\left(f, \frac{\pi}{n}\right). \tag{2}$$

Тепер „виправимо" функцію S і отримаємо L. Розглянемо функцію $S_0(x) := S(-\pi) + \int_{-\pi}^{x} S_0'(y)dy$, $x \in [-\pi,\ \pi)$, де $S_0'(x) = S'(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus U$, а для $x \in U$ визначимо $S_0'(x)$ таким чином. Якщо $x \in U_i := (y_i^-,\ y_i^+) = (w_{j+1},\ w_{j-1})$, то $S_0'(x) := \max\left\{L_{j+1}'(f;y_i),\ L_{j-1}'(f;y_i)\right\}$ для парного i та $S_0'(x) := \min\left\{L_{j+1}'(f;y_i), L_{j-1}'(f;y_i)\right\}$ для непарного i. На відрізку $[-\pi,\ \pi]$ покладемо $L(x) := S_0(x)$ у випадку $S_0(\pi) = S(\pi)$; якщо $S_0(\pi) < S(\pi)$, то функцію L визначаємо з умов $L'(x) = \mathrm{const} > S_0'(y_0)$ при $x \in (U_{2s} \cup U_0) \cap [-\pi,\ \pi]$, $L'(x) = S_0'(x)$ при $x \in [-\pi,\ \pi] \setminus (U_{2s} \cup U_0)$, $L(\pi) = S(\pi)$; якщо ж $S_0(\pi) > S(\pi)$, то L визначаємо з умов $L'(x) = \mathrm{const} < S_0'(y_{2s-1})$ при $x \in U_{2s-1}$, $L'(x) = S_0'(x)$ при $x \in [-\pi,\ \pi] \setminus U_{2s-1}$, $L(\pi) = S(\pi)$; після цього беремо 2π-періодичне продовження функції L на дійсну пряму $\mathbb{R}$.

З визначень функцій S і S_0 та нерівності Маркова $\|P'\|_{[a,\ b]} \le \dfrac{2n^2\|P\|_{[a,\ b]}}{b-a}$ для похідної алгебраїчного полінома P степеня n на відрізку $[a,\ b]$, $a < b$, випливають нерівності

$$\left|S_0'(x) - S'(x)\right| \le \left|L_{j+1}'(f;x) - L_{j-1}'(f;x)\right| + \left|L_{j+1}'(f;y_i) - L_{j-1}'(f;y_i)\right| \le$$
$$\le 2\cdot 2^2\cdot(2\pi m/n)^{-1}\left\|L_{j+1}(f;\cdot) - L_{j-1}(f;\cdot)\right\|_{U_i} \le$$
$$\le \frac{4}{\pi}\frac{n}{m}\left(\left\|f(\cdot) - L_{j+1}(f;\cdot)\right\|_{U_i} + \left\|f(\cdot) - L_{j-1}(f;\cdot)\right\|_{U_i}\right) \le$$
$$\le \frac{4}{\pi}\frac{n}{m}c\,\omega_3\left(f, \frac{\pi m}{n}\right) \le c(m)n\omega_3\left(f, \frac{\pi}{n}\right),$$
$$x \in U_i \cap (-\pi,\ \pi), \qquad U_i = (y_i^-,\ y_i^+) = (w_{j+1},\ w_{j-1}), \quad i = \overline{1, 2s}$$

(ми скористалися нерівностями $\left\|f - L_{j+1}(f;\cdot)\right\|_{U_i} \le c(m)\,\omega_3\left(f, \frac{\pi}{n}\right)$ і $\|f - L_{j-1}(f;\cdot)\|_{U_i} \le c(m)\,\omega_3\left(f, \frac{\pi}{n}\right)$, які доводяться за допомогою наведених вище міркувань з використанням нерівності Уітні). З цих нерівностей для кожного $x \in (-\pi,\ \pi)$ маємо оцінку

$$\big|S_0(x) - S(x)\big| \le \int\limits_{U\cap(\pi,\ \pi)} |S_0'(t) - S'(t)|\,dt \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{2s} \int\limits_{U_i\cap(\pi,\ \pi)} \big|S_0'(t) - S'(t)\big|\,dt \le$$

$$\le 2s\frac{2m\pi}{n}c(m)\,n\,\omega_3\left(f,\frac{\pi}{n}\right) \le c(s,m)\,\omega_3\left(f,\frac{\pi}{n}\right),$$

з якої випливає, що

$$\big|L(x) - S(x)\big| \le 2c(s,m)\,\omega_3\left(f,\frac{\pi}{n}\right) \quad \forall x \in (-\pi,\ \pi).$$

Поєднуючи останню оцінку з (2), отримуємо

$$\|f - L\|_C \le \|f - S\|_C + \|S - L\|_C \le c(s,m)\,\omega_3\left(f,\frac{\pi}{n}\right).$$

Включення $L \in C_Y$ безпосередньо випливає з визначення функції L.

Щоб сформулювати потрібні властивості побудованої функції L, введемо декілька позначень. Для будь-якого скінченного набору точок $A \subset \mathbb{R}$, які попарно не збігаються, позначимо $\Pi_A(x) := \prod_{y\in A} \sin\dfrac{x-y}{2}$, зокрема $\Pi_Y(x) := \prod_{i=1}^{2s} \sin\dfrac{x-y_i}{2}$. Нехай $h := \dfrac{\pi}{n}$, $x_j := -jh$, $j \in \mathbb{Z}$, $\Delta_h^1 L(x) := L(x+h) - L(x)$, $\Delta_h^2 L(x) := L(x) - 2L(x+h) + L(x+2h)$ і $\Delta_h^3 L(x) := -L(x) + 3L(x+h) - 3L(x+2h) + L(x+3h)$ — відповідно перша, друга і третя різниці функції L з кроком h у точці x, $\chi_{L,Y,j}(x)$ — функція, визначена таким чином: якщо $\Pi_Y(x_j)\cdot\Delta_h^3 L(x_{j+1}) > 0$, то $\chi_{L,Y,j}(x) = 0\ \forall x \le x_{j-1}$, $\chi_{L,Y,j}(x) = 1\ \forall x > x_{j-1}$; якщо ж $\Pi_Y(x_j)\cdot\Delta_h^3 L(x_{j+1}) \le 0$, то $\chi_{L,Y,j}(x) = 0\ \forall x \le x_j$, $\chi_{L,Y,j}(x) = 1\ \forall x > x_j$, $x \in \mathbb{R}$.

Необхідні для подальшого властивості функції L містяться у наступній лемі.

Лема 1. *Побудована вище функція L належить класу C_Y, і для неї має місце зображення*

$$L(x) = L(x_n) - (x - x_n)\frac{\Delta_h^1 L(x_n)}{h} + (x - x_n)(x - x_{n-1})\frac{\Delta_h^2 L(x_n)}{2h^2} +$$

$$+ \frac{1}{2h^2}\sum_{j=2-n}^{n-1}(x - x_j)(x - x_{j-1})\chi_{L,Y,j}(x)\Delta_h^3 L(x_{j+1}), \quad x \in [-\pi,\ \pi].$$

Крім того, L задовольняє такі умови:

$$\Delta_h^3 L(x-h) = 0, \quad \textit{якщо} \quad x = \pi + 2\pi k, \quad \pi \pm \frac{\pi}{n} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

$$\|f - L\|_C \le c(s,m)\,\omega_3(f,h), \tag{4}$$

$$\Pi_Y(x)\Delta_h^2 L(x) \ge 0 \quad \forall x \in W, \tag{5}$$

$$|\Delta_h^3 L(x-h)| \le c(s,m)\,\omega_3(f,h) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

$$\Delta_h^3 L(x-h) = \Delta_h^2 L(x) = 0, \quad \textit{якщо} \quad (x-h,\ x+2h) \subset U. \tag{7}$$

Доведення. Належність функції L до класу C_Y та нерівність (4) вже було встановлено. Наведене вище зображення функції L на відрізку $[-\pi,\ \pi]$ фактично доведено в [7] (пропозиція 1). Співвідношення (7) випливає з визначення функції L, (5) — з (3), а (6) — з лінійності третьої різниці:

$$\left|\Delta_h^3 L(x-h)\right| = \left|\Delta_h^3 (L-f+f)(x-h)\right| =$$

$$= \left|\Delta_h^3 (L-f)(x-h) + \Delta_h^3 f(x-h)\right| \le \left|\Delta_h^3 (L-f)(x-h)\right| + \left|\Delta_h^3 f(x-h)\right| \le$$

$$\le c(s,m)\,\omega_3(f,h) + \omega_3(f,h) = (c(s,m)+1)\,\omega_3(f,h).$$

Лему 1 доведено.

У попередніх міркуваннях ми не підкреслювали залежність від m та n в означеннях множин U та U_i, оскільки m і n були фіксовані. Далі величини m і n можуть змінюватися, і в тих випадках, коли виникне потреба підкреслити залежність від цих величин, ми замість U та U_i будемо відповідно писати $U_{m,\,n}$ та $U_{m,\,n;\,i}$. Подібні подвійні позначення будемо використовувати і для деяких інших величин.

Нехай $b \in \mathbb{N}$. Для кожного $j \in \mathbb{Z}$ визначимо додатний тригонометричний поліном $J_j(x)$ порядку $(n-1)b$ рівністю

$$J_j(x) = J_{n;j}(x) := \left(\frac{\sin\dfrac{n(x-x_j)}{2}}{\sin\dfrac{x-x_j}{2}}\right)^{2b} + \left(\frac{\sin\dfrac{n(x-x_{j-1})}{2}}{\sin\dfrac{x-x_{j-1}}{2}}\right)^{2b} \tag{8}$$

(тобто суму двох „сусідніх” ядер типу Джексона).

Для кожного $j \in I_{m/2,n} := \{j\colon x_j \in \mathbb{R}\setminus U_{m/2,n}, |j| < n + m/2\}$ позначимо

$$d_j := \int\limits_{x_j-\pi}^{x_j+\pi} J_j(u)\Pi_Y(u)du,$$

$$T_j(x) = T_{m,n;j}(b,Y;x) := \frac{1}{d_j}\int\limits_{x_j-\pi}^{x} J_j(u)\Pi_Y(u)du.$$

В [5] (лема 1) показано, що $d_j \ne 0$, і тому поліном ${}_j(x)$ є коректно визначеним для всіх $j \in I_{m/2,n}$. Для кожного $j \in I_{m,n} := \{j\colon x_j \in \mathbb{R}\setminus U_{m,n}, |j| < n\}$ позначимо

$$M_j(x) = M_{m,n;j}(b,Y;x) := \alpha_j \int\limits_{x_j-\pi}^{x} T_{j+m/2}(u)du + (1-\alpha_j)\int\limits_{x_j-\pi}^{x} T_{j-m/2}(u)du,$$

де $\alpha_j \in [0,\ 1]$ вибрано з умови

$$M_j(x_j+\pi) = \pi.$$

Зазначимо, що існування α_j доведено в [3], а зображення функцій $T_j(x)$ і $M_j(x)$ у вигляді

$$T_j(x) = \frac{1}{2\pi}x + r_j(x), \quad j \in I_{m/2,n},$$

$$M_j(x) = \frac{1}{4\pi}x^2 + \frac{\pi - x_j}{2\pi}x + R_j(x), \quad j \in I_{m,n}, \tag{9}$$

де $r_j(x)$ і $R_j(x)$ — тригонометричні поліноми порядку $\leq c(b)n$, встановлено відповідно в роботах [5] і [3].

Позначимо

$$\chi(x) := \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leq 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 0, \end{cases}$$

$$x_+ := x \cdot \chi(x),$$

$$\Gamma_j(x) = \Gamma_{n;j}(x) := \min\left\{1, \left(n\left|\sin\frac{x - (x_j + h/2)}{2}\right|\right)^{-1}\right\}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Лема 2. *Нехай $j \in I_{m/2,n}$ і $b \geq 6(s+1)$. Тоді мають місце співвідношення*

$$T_j(x_j \pm \pi) = \chi(\pm\pi - x_j),$$

$$T_j'(x)\Pi_Y(x)\Pi_Y(x_j) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

$$\left|T_j'(x)\right| \leq c_1\frac{1}{h}\Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b}\left|\frac{\Pi_Y(x)}{\Pi_Y(x_j)}\right|, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\left|T_j'(x)\right| \leq c_2\frac{1}{h}\Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b-s}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\left|T_j'(x)\right| \geq c_3\frac{1}{h}\Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b+2s}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash U(m/2), \tag{11}$$

$$\left|T_j'(x)\right| \geq c_3\frac{1}{h}\Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b+2s}\left|\frac{x - y_i}{x_j - y_i}\right|, \qquad x \in U_i(m/2), \quad i \in \mathbb{Z}, \tag{12}$$

$$|\chi(x - x_j) - T_j(x)| \leq c_4\Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b-s-1}, \quad x \in [-\pi, \pi], \tag{13}$$

в яких сталі c_1, c_2, c_3 і c_4 залежать лише від b.

Лема 2 доводиться за допомогою нерівностей

$$c_1\frac{1}{h_j}\Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b}\left|\frac{\Pi_Y(x)}{\Pi_Y(x_j)}\right| \leq \left|T_j'(x)\right| \leq c_2\frac{1}{h_j}\Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b}\left|\frac{\Pi_Y(x)}{\Pi_Y(x_j)}\right|,$$

$$\left|\frac{\Pi_Y(x)}{\Pi_Y(x_j)}\right| \leq \Big(\Gamma_j(x)\Big)^{-s}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad j \in I_{m/2},$$

$$\left|\int\limits_x^{x_j+\pi}\Big(\Gamma_j(t)\Big)^b dt\right| < \frac{c}{n}\Big(\Gamma_j(x)\Big)^{b-1}, \quad b \in \mathbb{N}, \quad x \in [x_j, x_j + 2\pi],$$

$$\left|\int\limits_x^{x_j-\pi}\Big(\Gamma_j(t)\Big)^b dt\right| < \frac{c}{n}\Big(\Gamma_j(x)\Big)^{b-1}, \qquad b \in \mathbb{N}, \quad x \in [x_j - 2\pi, x_j]$$

(детальніше див. [5]). Ці нерівності ми будемо використовувати без спеціальних посилань. Наступна лема випливає з леми 2 та тотожності

$$\left|M_j''(x)\right| \equiv \alpha \left|T_{j+m/2}'(x)\right| + (1-\alpha)\left|T_{j-m/2}'(x)\right|.$$

Лема 3. *Нехай $j \in I_{m/2}$ і $b \geq 6(s+2)$. Тоді мають місце співвідношення*

$$M_j'(x_j \pm \pi) = \chi(\pm\pi - x_j), \tag{14}$$

$$M_j''(x)\Pi_Y(x)\Pi_Y(x_j) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

$$\left|(x-x_j)_+ - M_j(x)\right| \leq c_5\, h\Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b-s-2}, \quad x \in [-\pi,\pi], \tag{16}$$

$$\left|\chi(x-x_j) - M_j'(x)\right| \leq c_6\Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b-s-1}, \quad x \in [-\pi,\pi],$$

$$\left|M_j''(x)\right| \leq c_7\frac{1}{h}\Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b-s}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{17}$$

$$\left|M_j''(x)\right| \geq c_8\frac{1}{h}\Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b+2s}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash U_{m/2,n}, \tag{18}$$

$$\left|M_j''(x)\right| \geq c_8\frac{1}{h_j}\Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b+2s}\left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|, \quad x \in U_{m/2,n;i}, \quad i \in \mathbb{Z}, \tag{19}$$

в яких сталі c_5, c_6, c_7 і c_8 залежать лише від b.

Зафіксуємо $j \in I_{m/2,n}$. Позначимо

$$\{z_i\}_{i=1}^{2s} := Y \cap (x_j-\pi, x_j+\pi],$$

де точки z_i перенумеровано справа наліво; $z_{2s+1} := x_j - \pi$, $z_0 := x_j + \pi$ (тобто точки z_0 і z_1 можуть збігатися). Через $i(j)$ позначимо такий індекс $i = \overline{0,2s}$, для якого виконуються нерівності $z_{i(j)+1} < x_j < z_{i(j)}$.

Наступна лема є наслідком леми 3, леми 5.2 з роботи [8] та леми 1 з роботи [4].

Лема 4. *Для кожного $j \in I_{m/2}$ і $b \geq 6(2s+2)$ існує набір $\mathbf{T}$ з $2s$ фіксованих точок t_i,*

$$z_{2s+1} < t_{2s} < \ldots < z_{i(j)+2} < t_{i(j)+1} < z_{i(j)+1},$$

$$z_{i(j)} < t_{i(j)} < \ldots < t_2 < z_1 \leq t_1 \leq z_0,$$

такий, що функція

$$\check{M}_j(x) := M_{m,n;j}\,(b, Y \cup \mathbf{T}; x)$$

задовольняє співвідношення (9), (14) *та* (17) *і, крім того,*

$$\left|(x-x_j)_+ - \check{M}_j(x)\right| \leq c_9\, h\Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2(b-s-1)}, \quad x \in [-\pi,\pi], \tag{20}$$

$$\left|\chi(x-x_j) - \check{M}_j'(x)\right| \leq c_{10}\Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b-2s-1}\left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|, \quad x \in U_{m/2,n;i}, \quad i = \overline{1,2s}, \tag{21}$$

$$\Big|\chi(x-x_j)-\check{M}_j'(x)\Big| \le c_{10}\Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b-2s-1}, \quad x\in[-\pi,\pi], \tag{22}$$

де сталі c_9 і c_{10} залежать лише від b.

Виберемо

$$b_1 := 6(4s+2)+1, \quad b_2 := 6(2s+2),$$
$$c_{11} := 5\max\left\{2,\ \left[1+\sqrt{\frac{24c_9(b_1)}{b_1-2s-2}}\right],\quad \left[1+\frac{12c_{10}(b_1)}{c_8(b_2)}\right]\right\} \tag{23}$$

і

$$N := 2c_{11}n,$$

де $[\cdot]$ — ціла частина. Для кожного $j=2-n,\ldots,n-1$, позначимо через j^+ і j^- індекси такі, що $x_{j^+} := x_{j^+,N} = x_{j-1,n}$ і $x_{j^-} := x_{j^-,N} = x_{j,n}$ відповідно. Будемо писати також $j^\pm = j^+ \vee j^-$.

Лема 5. *Для кожного $j\in I_{m,n}$ існують такі числа $\beta,\ \gamma\in[0,1]$, що дві функції*

$$V_{j^+}(x) := \int\limits_{x_{j^+}-\pi}^{x}\Big(2M_{m,N;j^+}(b_1,Y\cup\mathbf{T};u)+$$
$$+\frac{h}{2}\Big(\beta\,T_{m,N;(j+1)^+}(b_2,Y;u)+$$
$$+(1-\beta)T_{m,N;(j-1)^+}(b_2,Y;u)+M'_{m,N;j^+}(b_2,Y;u)\Big)\Big)du,$$

$$V_{j^-}(x) := \int\limits_{x_{j^-}-\pi}^{x}\Big(2M_{m,N;j^-}(b_1,Y\cup\mathbf{T};u)-$$
$$-\frac{h}{2}\Big(\gamma\,T_{m,N;(j+1)^-}(u;b_2;Y)+$$
$$+(1-\gamma)T_{m,N;(j-1)^-}(b_2,Y;u)+M'_{m,N;j^-}(b_2,Y;u)\Big)\Big)du,$$

задовольняють умови

$$V_{j^+}(x_{j^+}+\pi)=V_{j^+}(x_{j-1}+\pi)=\pi^2+\pi h, \tag{24}$$

$$V_{j^-}(x_{j^-}+\pi)=V_{j^-}(x_j+\pi)=\pi^2-\pi h \tag{25}$$

і для кожного $x\in[-\pi,\ \pi]$ виконуються нерівності

$$\Big(V''_{j^+}(x)-2\chi(x-x_{j^+})\Big)\Pi_Y(x)\Pi_Y(x_j)\ge 0, \tag{26}$$

$$\Big(V''_{j^-}(x)-2\chi(x-x_{j^-})\Big)\Pi_Y(x)\Pi_Y(x_j)\le 0, \tag{27}$$

$$\left|(x-x_j)(x-x_{j-1})\chi_{L,Y,j}(x)\Delta_h^3 L(x_{j+1}) - V_{j^\pm}(x)\right| \le c\, h^2 \Big(\Gamma_j(x)\Big)^6. \tag{28}$$

Крім того, $V_{j^+}(x)$ *та* $V_{j^-}(x)$ *мають вигляд*

$$V_{j^+}(x) = \frac{1}{6\pi}x^3 + \Big(\frac{\pi - x_{j^+}}{2\pi} + \frac{h}{4\pi}\Big)x^2 +$$

$$+\frac{x_{j^+}^2 + \frac{2}{3}\pi^2 + \pi h - 2\pi x_{j^+} - h x_{j^+}}{2\pi}\,x + H_{j^+}(x), \tag{29}$$

$$V_{j^-}(x) = \frac{1}{6\pi}x^3 + \Big(\frac{\pi - x_{j^-}}{2\pi} - \frac{h}{4\pi}\Big)x^2 +$$

$$+\frac{x_{j^-}^2 + \frac{2}{3}\pi^2 - \pi h - 2\pi x_{j^-} + h x_{j^-}}{2\pi}\,x + H_{j^-}(x), \tag{30}$$

де $H_{j^\pm}(x)$*— тригонометричні поліноми порядку* $\le c(b)n$.

Доведення. Існування β і γ, які задовольняють (24) і (25) відповідно, випливає з вибору N та оцінок (20) і (13). Із двох аналогічних нерівностей (26) і (27) перевіримо лише (26). Якщо $x \in [-\pi,\pi]\backslash U_{m/2,N}$, то з (15), (10), (11), (18), (22) з урахуванням вибору N випливає

$$\Big(V''_{j^+}(x) - 2\chi(x-x_{j^+})\Big)\Pi_Y(x)\Pi_Y(x_j) =$$

$$= \bigg(2\Big(M'_{m,N;j^+}(b_1, Y\cup \mathbf{T}; u) - \chi(x-x_{j^+})\Big) +$$

$$+\frac{h}{2}\Big(\beta T'_{m,N;(j+1)^+}(b_2, Y; u) +$$

$$+(1-\beta)T'_{m,N;(j-1)^+}(b_2,Y;u) + M''_{m,N;j^+}(b_2,Y;u)\Big)\bigg)\Pi_Y(x)\Pi_Y(x_j) \ge$$

$$\ge c_8(b_2)\frac{h_n}{2h_N}\Big(\Gamma_{N;j^+}(x)\Big)^{2b_2+2s} - 2c_{10}(b_1)\Big(\Gamma_{n;j^+}(x)\Big)^{2b_1-2s-1} +$$

$$+\frac{h_n}{2}\bigg(c_3(b_2)\frac{\beta}{h_N}\Big(\Gamma_{N;(j+1)^+}(x)\Big)^{2b_2+2s} +$$

$$+c_3(b_2)\frac{1-\beta}{h_N}\Big(\Gamma_{N;(j-1)^+}(x)\Big)^{2b_2+2s}\bigg) \ge$$

$$\ge c_8(b_2)\frac{h_n}{2h_N}\Gamma_{N;j^+}(x)^{26s+24} - 2c_{10}(b_1)\Big(\Gamma_{n;j^+}(x)\Big)^{46s+25} \ge$$

$$\ge \bigg(c_8(b_2)\frac{h_n}{2h_N} - 2c_{10}(b_1)\bigg)\Gamma_{N;j^+}(x)^{26s+24} \ge 0.$$

Для решти значень x (26) випливає з (15), (10), (12), (19) і (21).

Доведемо (28) для j^-. Якщо $x < x_j = x_{j^-}$, то з (20), (13), (16), (23) та з нерівностей $\Gamma_{N;(j\pm1)^-}(x) < 4\Gamma_{n;j\pm1}(x) < 16\Gamma_{n;j}(x)$ випливає

$$\Big|(x-x_j)(x-x_{j-1})\chi(x-x_j) - V_{j^-}(x)\Big| =$$

$$= \Bigg| \int\limits_{x_{j^-}-\pi}^{x} \Big\{ 2\Big((u - x_{j^-})_+ - M_{m,N;j^-}(b_1, Y \cup \mathbf{T}; u) \Big) +$$

$$+ \frac{h}{2} \Big(\gamma\, T_{m,N;(j+1)^-}(b_2, Y; u) + (1-\gamma) T_{m,N;(j-1)^-}(b_2, Y; u) - \chi_{j^-}(u) \Big) \Big\} du +$$

$$+ \frac{h}{2} \Big(M_{m,N;j^-}(x; b_2; Y) - (x - x_{j^-})_+ \Big) \Bigg| \leq$$

$$\leq \int\limits_{x_{j^-}-\pi}^{x} \left(2c_9(b_1) h_N \Big(\Gamma_{N;j^-}(u) \Big)^{2(b_1-s-1)} + h c_4(b_2) \Big(16 \Gamma_{n;j}(u) \Big)^{2b_2-s-1} \right) du +$$

$$+ h^2 c_5(b_2) \left(8\Gamma_{n;j}(x) \right)^{2b_2-s-1} \leq c\, h^2 \Big(\Gamma_{n;j}(x) \Big)^6.$$

Якщо ж $x \geq x_j$, то з урахуванням (20) оцінка (28) доводиться аналогічно.

Доведемо (29). Позначимо

$$M_{m,N;j}\left(b_1, Y \cup \mathbf{T}; x\right) =: \frac{1}{4\pi} x^2 + \frac{\pi - x_j}{2\pi} x + R_j(x),$$

$$M_{m,N;j}(b_2, Y; x) =: \frac{1}{4\pi} x^2 + \frac{\pi - x_j}{2\pi} x + \bar{R}_j(x),$$

$$T_{m,N;j}\left(b_2, Y; x\right) =: \frac{1}{2\pi} x + r_j(x),$$

$$S_j(x) := R_j(x) - R_{j,0}, \qquad \bar{S}_j(x) := \bar{R}_j(x) - \bar{R}_{j,0}, \qquad s_j(x) := r_j(x) - r_{j,0},$$

де $R_{j,0}$, $\bar{R}_{j,0}$ і $r_{j,0}$ — вільні члени тригонометричних поліномів $R_j(x)$, $\bar{R}_j(x)$ і $r_j(x)$ порядку $\leq c(b)n$ відповідно. Тоді

$$V_{j^+}(x) = \Big(\frac{1}{6\pi} x^3 + \frac{\pi - x_{j^+}}{2\pi} x^2 + 2R_{j^+,0}\, x \Big) -$$

$$- \Big(\frac{1}{6\pi} (x_{j^+} - \pi)^3 + \frac{\pi - x_{j^+}}{2\pi} (x_{j^+} - \pi)^2 + 2R_{j^+,0} (x_{j^+} - \pi) \Big) +$$

$$+ \frac{h}{2} \Big(\frac{1}{2\pi} x^2 + \Big(\beta\, r_{(j+1)^+,0} + (1-\beta) r_{(j-1)^+,0} + \frac{\pi - x_{j^+}}{2\pi} \Big) x \Big) -$$

$$- \frac{h}{2} \Big(\frac{1}{2\pi} (x_{j^+} - \pi)^2 + \Big(\beta\, r_{(j+1)^+,0} + (1-\beta) r_{(j-1)^+,0} + \frac{\pi - x_{j^+}}{2\pi} \Big) (x_{j^+} - \pi) \Big) +$$

$$+ 2 \int\limits_{x_{j^+}-\pi}^{x} S_{j^+,0}(u) du +$$

$$+ \frac{h}{2} \int\limits_{x_{j^+}-\pi}^{x} \Big(\beta\, s_{(j+1)^+}(u) + (1-\beta) s_{(j-1)^+}(u) + \bar{S}'_{j^+}(u) \Big) du =$$

$$= \frac{1}{6\pi} x^3 + \Big(\frac{\pi - x_{j^+}}{2\pi} + \frac{h}{4\pi} \Big) x^2 +$$

$$+\Big(2R_{j^+,0}+\frac{h}{2}\Big(\beta\, r_{(j+1)^+,0}+(1-\beta)r_{(j-1)^+,0}+\frac{\pi-x_{j^+}}{2\pi}\Big)\Big)x+H_{j^+}(x).$$

Тут

$$H_{j^+}(x):=\frac{1}{3\pi}(x_{j^+}-\pi)^3-$$

$$-\Big(2R_{j^+,0}+\frac{h}{2}\Big(\beta\, r_{(j+1)^+,0}+(1-\beta)r_{(j-1)^+,0}\Big)\Big)(x_{j^+}-\pi)+$$

$$+\frac{h}{2}\int\limits_{x_{j^+}-\pi}^{x}\Big(\beta\, s_{(j+1)^+}(u)+(1-\beta)s_{(j-1)^+}(u)+\bar S'_{j^+}(u)\Big)du+$$

$$+2\int\limits_{x_{j^+}-\pi}^{x}S_{j^+}(u)du.$$

Врахувавши (24), обчислимо значення виразу

$$2R_{j^+,0}+\frac{h}{2}\Big(\beta\, r_{(j+1)^+,0}+(1-\beta\,)r_{(j-1)^+,0}\Big)=:k,$$

а саме,

$$\pi^2+\pi h=\frac{1}{6\pi}(x_{j^+}+\pi)^3+\frac{(\pi-x_{j^+})(x_{j^+}+\pi)^2}{2\pi}+$$

$$+\frac{h}{2}\left(\frac{(x_{j^+}+\pi)^2}{2\pi}+\frac{(\pi-x_{j^+})(x_{j^+}+\pi)}{2\pi}\right)+$$

$$+k(x_{j^+}+\pi)+\frac{1}{3\pi}(x_{j^+}-\pi)^3-k(x_{j^+}-\pi)=$$

$$=\frac{\pi^2}{3}-x_{j^+}^2+2\pi x_{j^+}+\frac{h}{2}(x_{j^+}+\pi)+2\pi k.$$

Звідси

$$k=\frac{\frac{2}{3}\pi^2+x_{j^+}^2+\pi h-2x_{j^+}\pi-\frac{h}{2}(x_{j^+}+\pi)}{2\pi}.$$

Рівність (29) доведено. Рівність (30) доводиться аналогічно.

Лему 5 доведено.

2. Доведення теореми 1. Нехай спочатку $n\ge n(d_Y)$. Шуканий в теоремі 1 поліном запишемо у вигляді

$$P_n(x):=l(x)+\frac{1}{2h^2}\sum_{j\in I_{m,n}}V_j\cdot\Delta_h^3L(x_{j+1}),\tag{31}$$

де

$$V_j:=\begin{cases}V_{j^+}, & \text{якщо}\quad \Pi_Y(x_j)\cdot\Delta_h^3L(x_{j+1})>0,\\ V_{j^-}, & \text{якщо}\quad \Pi_Y(x_j)\cdot\Delta_h^3L(x_{j+1})\le 0.\end{cases}\tag{32}$$

Спочатку переконаємося, що P_n є тригонометричним поліномом порядку $\le c(b)n$. Підставивши (29) і (30) в (31) та врахувавши (7), отримаємо

$$P_n(x) = \frac{A}{6\pi}x^3 + \frac{\Delta_h^2 L(x_n)}{2h^2}x^2 + \frac{x^2}{2h^2}\sum_{j\in I_m}\left(2\frac{\pi - x_{j^\pm}}{4\pi} \pm h\frac{1}{4\pi}\right)\Delta_h^3 L(x_{j+2}) -$$

$$- \frac{\Delta_h^1 L(x_n)}{h}x - \frac{\Delta_h^2 L(x_n)}{2h^2}(x_n + x_{n-1})x +$$

$$+\frac{x}{2h^2}\sum_{j\in I_m}\frac{x_{j^\pm}^2 + \frac{2}{3}\pi^2 \pm \pi h - 2\pi x_{j^\pm} \mp h\, x_{j^\pm}}{2\pi}\Delta_h^3 L(x_{j+1}) + \widetilde{P}_n(x),$$

де

$$A := \frac{1}{2h^2}\sum_{j=2-n}^{n-1}\Delta_h^3 L(x_{j+1}) = \frac{1}{2h^2}\Big(\Delta_h^2 L(x_{2-n}) - \Delta_h^2 L(x_n)\Big) = 0,$$

$$\widetilde{P}_n(x) := L(x_n) + \frac{\Delta_h^1 L(x_n)}{h}x_n + \frac{\Delta_h^2 L(x_n)}{2h^2}x_n x_{n-1} +$$

$$+ \frac{1}{2h^2}\sum_{j\in I_m} H_{j^\pm}(x)\Delta_h^3 L(x_{j+1})$$

— деякий тригогонометричний поліном порядку $\le c(b)n$. Таким чином,

$$P_n(x) = \widetilde{P}_n(x) + x^2\left[\frac{\Delta_h^2 L(x_n)}{2h^2} + \frac{1}{2h^2}\sum_{j\in I_m}\left(2\frac{\pi - x_{j^\pm}}{4\pi} \pm h\frac{1}{4\pi}\right)\Delta_h^3 L(x_{j+1})\right] +$$

$$+x\Bigg[-\frac{\Delta_h^1 L(x_n)}{h} - \frac{\Delta_h^2 L(x_n)}{2h^2}(x_n + x_{n-1}) +$$

$$+\frac{1}{4\pi h^2}\sum_{j\in I_m}\Big(x_{j^\pm}^2 + 2/3\pi^2 \pm \pi h - 2\pi x_{j^\pm} \mp h\, x_{j^\pm}\Big)\Delta_h^3 L(x_{j+1})\Bigg] =$$

$$= x^2\left[\frac{\Delta_h^2 L(x_n)}{2h^2} + \frac{1}{8\pi h^2}\sum_{j\in I_m}\Big(2\pi - (x_j + x_{j-1}) \mp h \pm h\Big)\Delta_h^3 L(x_{j+1})\right] +$$

$$+x\Bigg[-\frac{1}{h}\Big(L(x_n) - L(x_{n-1})\Big) - \frac{h - 2\pi}{2h^2}\Big(L(x_n) - 2L(x_{n-1}) + L(x_{n-2})\Big) +$$

$$+\frac{1}{4\pi h^2}\sum_{j\in I_m}\left(\left(\frac{x_j + x_{j-1}}{2} \pm \frac{h}{2}\right)^2 + 2/3\pi^2 \pm \pi h - 2\pi\left(\frac{x_j + x_{j-1}}{2} \pm \frac{h}{2}\right) \mp\right.$$

$$\left.\mp h\left(\frac{x_j + x_{j-1}}{2} \pm \frac{h}{2}\right)\right)\Delta_h^3 L(x_{j+1})\Bigg] + \widetilde{P}_n(x) =$$

$$= x^2 \left[\frac{\Delta_h^2 L(x_n)}{2h^2} + \frac{1}{8nh^2} \sum_{j=2-n}^{n-1} \Big(2n + 2j - 1\Big) \Delta_h^3 L(x_{j+1}) \right] +$$

$$+x\left[\frac{1}{h}\Big(L(x_{n-1}) - L(x_n)\Big) + \frac{2\pi - h}{2h^2}\Delta_h^2 L(x_n) +\right.$$

$$+\frac{1}{4\pi h} \sum_{j=2-n}^{n-1} \Big(-2j + 1 \pm 1\Big) \times$$

$$\left.\times \left(\frac{h}{4}\Big(-2j+1\pm 1\Big) - \pi \mp \frac{h}{2}\right) \Delta_h^3 L(x_{j+1})\right] + \widetilde{P}_n(x) =$$

$$= x^2 \left[\frac{\Delta_h^2 L(x_n)}{2h^2} + \frac{A}{2} - \frac{A}{4n} + \frac{1}{4nh^2} \sum_{j=2-n}^{n-1} j \cdot \Delta_h^3 L(x_{j+1}) \right] +$$

$$+x\left[\frac{1}{h}\Big(L(x_{n-1}) - L(x_n)\Big) + \frac{2\pi - h}{2h^2}\Delta_h^2 L(x_n) +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\pi h} \sum_{j=2-n}^{n-1} \Big(-2j + 1 \pm 1\Big) \left(\frac{h}{4}\Big(-2j+1\mp 1\Big) - \pi\right) \Delta_h^3 L(x_{j+1})\right] + \widetilde{P}_n(x) =$$

$$= x^2\left[\frac{1}{4h^2}\Big(2L(x_n) - 4L(x_{n-1}) + 2L(x_{n-2})\Big) + \frac{1}{4nh^2}\Big(n\Big(-2L(x_n) + 2L(x_{n-1}) -\right.$$

$$\left. - L(x_{n-2}) + 2L(x_{1-n}) - L(x_{2-n})\Big) - \Delta_h^3 L(x_{2-n})\Big)\right] +$$

$$+x\left[\frac{1}{h}\Big(L(x_{n-1}) - L(x_n)\Big) + \frac{2\pi - h}{2h^2}\Delta_h^2 L(x_n) -\right.$$

$$-\frac{1}{4h} \sum_{j=2-n}^{n-1} \Big(-2j + 1 \pm 1\Big) \Delta_h^3 L(x_{j+1}) +$$

$$\left.+\frac{1}{16\pi} \sum_{j=2-n}^{n-1} \Big(-2j + 1 \pm 1\Big)\Big(-2j+1\mp 1\Big) \Delta_h^3 L(x_{j+1})\right] + \widetilde{P}_n(x) =$$

$$= \frac{x^2}{4h^2}\Big(\Delta_h^2 L(x_n) - \Delta_h^2 L(x_{n+2})\Big) +$$

$$+x\left[\frac{1}{h}\Big(L(x_{n-1}) - L(x_n)\Big) + \frac{2\pi - h}{2h^2}\Delta_h^2 L(x_n) +\right.$$

$$+\frac{1}{16\pi} \sum_{j=2-n}^{n-1} \Big(1 - 4j + 4j^2 - 1\Big) \Delta_h^3 L(x_{j+1}) +$$

$$+\frac{1}{2h}\sum_{j=2-n}^{n-1} j\cdot\Delta_h^3 L(x_{j+1}) - \frac{(h\pm h)}{2}A\Bigg] + \widetilde{P}_n(x) =$$

$$= x\left[\frac{1}{4h}\Big(4L(x_{n-1}) - 4L(x_n)\Big) + \frac{2\pi-h}{4h^2}\Big(2L(x_n) - 4L(x_{n-1}) + 2L(x_{n-2})\Big)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\pi}\sum_{j=2-n}^{n-1} j^{\,2}\cdot\Delta_h^3 L(x_{j+1}) + \frac{2\pi-h}{4\pi h}\sum_{j=2-n}^{n-1} j\cdot\Delta_h^3 L(x_{j+1})\right] + \widetilde{P}_n(x) =$$

$$= x\left[\frac{1}{2h}\Delta_h^3 L(x_{2-n}) + \frac{2\pi-h}{4h^2}\Big(\Delta_h^2 L(x_n) - \Delta_h^2 L(x_{2-n})\Big) - \frac{2\pi-h}{4\pi h}\Delta_h^3 L(x_{2-n})\right]+$$

$$+\widetilde{P}_n(x) = \widetilde{P}_n(x),$$

оскільки, за побудовою, $L(x_{n-1}) = L(x_{-1-n})$, $L(x_{1-n}) = L(x_{n+1})$, $L(x_{2-n}) = L(x_{n+2})$ і $L(x_n) = L(x_{-n})$.

Доведемо (1). Врахувавши (7) і те, що $x_{j^\pm} \le x_{(j-1)^\pm}$, з (31), (32), (5), (26) і (27) отримаємо

$$P_n''(x)\Pi_Y(x) =$$

$$= \left(2\frac{\Delta_h^2 L(x_n)}{2h^2}\chi(x-x_n) + \frac{1}{2h^2}\sum_{j\in I_{m,n}}\Big(V_{j^\pm}''(x) - 2\chi(x-x_{j^\pm})\Big)\Delta_h^3 L(x_{j+1})+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2h^2}\sum_{j\in I_{m,n}} 2\chi(x-x_{j^\pm})\Delta_h^3 L(x_{j+1})\right)\Pi_Y(x) =$$

$$= \frac{1}{2h^2}\left(\sum_{j\in I_{m,n}}\Big(V_{j^\pm}''(x) - 2\chi(x-x_{j^\pm})\Big)\Delta_h^3 L(x_{j+1})+\right.$$

$$+2\sum_{j\in I_{m,n}\cup\{n\}}\chi(x-x_{j^\pm})\Big(\Delta_h^2 L(x_j) - \Delta_h^2 L(x_{j+1})\Big)+$$

$$\left.+2\chi(x-x_n)\Delta_h^2 L(x_{n+1})\right)\Pi_Y(x) =$$

$$= \frac{1}{2h^2}\left(\sum_{j\in I_m}\Big(V_{j^\pm}''(x) - 2\chi(x-x_{j^\pm})\Big)\Delta_h^3 L(x_{j+1})+\right.$$

$$\left.+2\sum_{j\in I_{m,n}\cup\{n\}}\Big(\chi(x-x_{j^\pm}) - \chi(x-x_{(j-1)^\pm})\Big)\Delta_h^2 L(x_j)\right)\Pi_Y(x) =$$

$$= \frac{1}{2h^2}\sum_{j\in I_m}\frac{1}{\Pi_Y^2(x_j)}\Big(\Pi_Y(x_j)\Delta_h^3 L(x_{j+1})\Big)\Big(\Big(V_{j^\pm}''(x) - 2\chi(x-x_{j^\pm})\Big)\Pi_Y(x)\Pi_Y(x_j)\Big)+$$

$$+\frac{1}{h^2}\sum_{j\in I_{m,n}\cup\{n\}}\frac{1}{\Pi_Y^2(x_j)}\Big(\Pi_Y(x_j)\Delta_h^2 L(x_j)\Big)\times$$

$$\times\Big(\Big(\chi(x-x_{j^\pm})-\chi(x-x_{(j-1)^\pm})\Big)\Pi_Y(x)\Pi_Y(x_j)\Big)\geq 0.$$

Тут $n^\pm := n$, $-n^\pm := -n$ і $(1-n)^\pm = 1-n$.

Щоб довести (1) для $n \geq n(d_Y)$, скористаємось лемою 4 та запишемо L на $[-\pi,\pi]$ у вигляді

$$L(x)\equiv L(x_n)-(x-x_n)\frac{\Delta_h^1 L(x_n)}{h}+(x-x_n)(x-x_{n-1})\frac{\Delta_h^2 L(x_n)}{2h^2}+$$
$$+\frac{1}{2h^2}\sum_{j\in I_m}(x-x_j)(x-x_{j-1})\chi_{L,Y,j}(x)\Delta_h^3 L(x_{j+1}).$$

Тепер різницю $f-P_n$ подамо у вигляді

$$f(x)-P_n(x)=f(x)-L(x)+L(x)-P_n(x)=$$
$$=f(x)-L(x)+\frac{1}{2h^2}\sum_{j\in I_m}\Big((x-x_j)(x-x_{j-1})\chi_{L,Y,j}(x)-V_{j^\pm}\Big)\Delta_j^3 L(x_{j+1}).$$

Оцінка (1) випливає з (4), (28), (6) та нерівності

$$\left\|\sum_{j=1-n}^{n}(\Gamma_j)^2\right\|<6,$$

яку детально доведено в [5].

Оскільки $f(0)$ інтерполює f і належить C_Y, то для $1\leq n<n(d_Y)$ теорема 1 випливає з нерівності Уітні, яка завдяки 2π-періодичності f має вигляд $\|f - f(0)\|\leq 2\,\omega_3(f;2\pi)$.

Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівникові Г. А. Дзюбенку за постановку задачі та увагу до даної роботи.

1. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
2. *Lorentz G. G., Zeller K. L.* Degree of approximation by monotone polynomials. I // J. Approxim. Theory. – 1968. – **1**, № 4. – P. 501 – 504.
3. *Попов П. А.* Аналог нерівності Джексона для коопуклого наближення періодичних функцій // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 7. – С. 919 – 928.
4. *Плешаков М. Г., Попов П. А.* Знакосохраняющее приближение периодических функций // Там же. – 2003. – **55**, № 8. – С. 1087 – 1098.
5. *Pleshakov M. G.* Comonotone Jackson's inequality // J. Approxim. Theory. – 1999. – **99**, № 6. – P. 409 – 421.
6. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992.
7. *Dzyubenko G. A., Gilewicz J.* Nearly coconvex pointwise approximation // East J. Approxim. – 2000. – **6**. – P. 357 – 383.
8. *Gilewicz J., Шевчук И. А.* Комонотонное приближение // Фундам. и прикл. математика. – 1996. – **2**. – С. 319 – 363.

Одержано 17.11.2005