УДК 513.88: 517.98

С. В. Тищенко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО ДЕЯКИЙ КЛАС ТОПОЛОГІЧНИХ $*$-АЛГЕБР ІЗ СТАНДАРТНИМИ ТОТОЖНОСТЯМИ

Let A be a unital semisimple topological nuclear $*$-algebra over C and let Z be its center. Then A is topologically isomorphic to $M_n(Z)$ if and only if A satisfies the standart identity and the maximality condition.

Пусть A — унитальная полупростая топологическая ядерная $*$-алгебра над C и Z — ее центр. A топологически изоморфна $M_n(Z)$ тогда и только тогда, когда A удовлетворяет стандартному тождеству и условию максимальности.

Вступ. Корисним узагальненням комутативних алгебр є матричні алгебри над комутативними топологічними алгебрами. Так, у роботі [1] доведено, що будь-яка напівпроста банахова алгебра A над полем комплексних чисел C з одиницею e і центром Z ізоморфна матричній алгебрі $M_n(Z)$ тоді і тільки тоді, коли A є алгеброю із стандартними тотожностями (F_{2n}-алгеброю) і містить підалгебру A_0, яка ізоморфна $M_n(C)$ і містить одиницю e. У роботі [2] цей результат узагальнено на унітальні алгебри над деяким полем скалярів G. Також у [2] (наслідок 3) доведено, що у випадку, коли A — нормована алгебра над C, має місце топологічний ізоморфізм між A та $M_n(Z)$.

Метою даної роботи є доведення результатів, подібних до отриманих у [1, 2], для класу топологічних ядерних $*$-алгебр.

Основні означення і поняття. Нехай $(H_\tau)_{\tau\in T}$ (T — довільна множина індексів) — сім'я комплексних гільбертових просторів із скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_\tau := (\cdot,\cdot)_{H_\tau}$ і нормами $\|\cdot\|_\tau := \|\cdot\|_{H_\tau}$. Топологічний простір $A = \operatorname{pr}\lim_{\tau\in T} H_\tau$ називається ядерним [3, с. 21], якщо для кожного $\tau\in T$ знайдеться $\tau'\in T$ таке, що оператор вкладення $H_{\tau'}\to H_\tau$ є оператором Гільберта–Шмідта.

Топологічний ядерний простір A будемо називати ядерною алгеброю, якщо A є асоціативною алгеброю, причому операція множення $A\times A\ni(f,g)\mapsto f\cdot g\in A$ є сумісно неперервною у топології проективної границі, тобто неперервною за сукупністю змінних. Під ядерною $*$-алгеброю будемо розуміти ядерну алгебру з інволюцією $*$, яка задовольняє умову $\|f^*\|_\tau=\|f\|_\tau$ для всіх $f\in A$, $\tau\in T$.

Для довільно вибраних елементів $a_1, a_2, \dots, a_n\in A$ визначимо стандартний поліном степеня n за допомогою формули

$$F_n(a_1,a_2,\dots,a_n) = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma a_{\sigma(1)}\dots a_{\sigma(n)},$$

де S_n і $(-1)^\sigma$ — відповідно симетрична група і знак підстановки σ. Алгебра A називається F_n-алгеброю, якщо $F_n(a_1,a_2,\dots,a_n)=0$ для довільних фіксованих $a_1,a_2,\dots,a_n\in A$ [4].

Допоміжні результати.

Лема 1. *Нехай U — топологічний ядерний простір. Тоді множина $A = M_n(U)$ також буде топологічним ядерним простором.*

Доведення. На множині $M_n(U)$ введемо структуру топологічного простору, який є проективною границею гільбертових. Оскільки простір U є топологічним ядерним, то $U = \operatorname{pr}\lim_{\tau\in T} H_\tau$, причому виконується умова ядерності для проективної границі. Далі, при кожному $\alpha = (\tau_{ij})_{i,j=1}^n = (\tau)_{i,j=1}^n \in T^{n\times n} := \Gamma$ (тобто $\tau_{ij} = \tau \in T$ для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, n$) визначимо гільбертовий простір $H_\alpha := M_n(H_\tau)$ матричнозначних функцій $F = (f_{ij})_{i,j=1}^n$, $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n$ ($f_{ij}, g_{ij} \in \in H_\tau$), в якому скалярний добуток і норму визначимо за допомогою формул

$$(F, G)_\alpha := \sum_{i,j} (f_{ij}, g_{ij})_\tau, \qquad \|F\|_\alpha^2 := \sum_{i,j} \|f_{ij}\|_\tau^2$$

(тут і далі будемо використовувати скорочене позначення $\sum_{i,j}(\cdot)$ замість $\sum_{i,j=1}^n(\cdot)$). Маємо сім'ю гільбертових просторів $(H_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$. Множина $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} H_\alpha = \bigcap_{\tau\in T} M_n(H_\tau) = M_n\left(\bigcap_{\tau\in T} H_\tau\right) = M_n(U)$ є щільною у кожному просторі H_α, оскільки простір U є щільним у кожному H_τ. Сім'я гільбертових просторів $(H_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ також є направленою по вкладенню: для довільних $\alpha_1 = (\tau_1)_{i,j=1}^n$, $\alpha_2 = (\tau_2)_{i,j=1}^n \in \Gamma$ знайдеться таке $\alpha_3 = (\tau_3)_{i,j=1}^n \in \Gamma$, що $H_{\alpha_3} \subset H_{\alpha_1}$, $H_{\alpha_3} \subset H_{\alpha_2}$, причому вкладення є топологічними.

Перевіримо, що лінійний топологічний простір $A = M_n(U) = \operatorname{pr}\lim_{\alpha\in\Gamma} H_\alpha$ є ядерним, тобто для нього виконується умова: для довільного $\alpha = (\tau)_{i,j=1}^n \in \Gamma$ знайдеться $\alpha' = (\tau')_{i,j=1}^n \in \Gamma$ таке, що вкладення $H_{\alpha'} \to H_\alpha$ є квазіядерним (оператор вкладення є оператором Гільберта – Шмідта). Справді, розглянемо локально опуклий топологічний простір $A = \operatorname{pr}\lim_{\alpha\in\Gamma} H_\alpha$, який, як множина, збігається з перетином $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} H_\alpha$ гільбертових просторів H_α. Базис околів нуля в A утворюють множини $W(0; \alpha, \delta) = \{F \in A : \|F\|_\alpha < \delta\}$ при довільних $\alpha \in \Gamma$ і $\delta > 0$. Оскільки простір $U = \operatorname{pr}\lim_{\tau\in T} H_\tau$ є ядерним, то для довільного $\tau \in T$ знайдеться $\tau' \in T$ таке, що оператор вкладення $O_{\tau'}^{\tau} : H_{\tau'} \to H_\tau$ є квазіядерним, тобто норма Гільберта – Шмідта $|O_{\tau'}^{\tau}|$ оператора вкладення $O_{\tau'}^{\tau}$ є скінченною. Позначимо $\alpha' = (\tau')_{i,j=1}^n \in \Gamma$. Тоді норма Гільберта – Шмідта оператора вкладення $O_{\alpha'}^{\alpha} : H_{\alpha'} \to H_\alpha$ також буде скінченною:

$$|O_{\alpha'}^{\alpha}|^2 = \sum_{i,j} |O_{\tau'}^{\tau}|^2 = n^2 |O_{\tau'}^{\tau}|^2 < \infty,$$

що й доводить квазіядерність вкладення $H_{\alpha'} \to H_\alpha$.

Лему доведено.

Лема 2. *Нехай U — унітальна комутативна топологічна ядерна $*$-алгебра. Тоді $A = M_n(U)$ також буде унітальною топологічною ядерною $*$-алгеброю.*

Доведення. Згідно з лемою 1, $M_n(U)$ є топологічним ядерним простором. Очевидно також, що $A = M_n(U)$ є унітальною алгеброю над полем C із звичайними лінійними операціями над матрицями $F = (f_{ij})_{i,j=1}^n$, $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n$, матричним множенням та інволюцією $(f_{ij})_{i,j=1}^n = F \mapsto F^* = (f_{ji}^*)_{j,i=1}^n$.

Доведемо, що A є топологічною $*$-алгеброю, тобто множення й інволюція є неперервними операціями в A. Справді, внаслідок сумісної неперервності операції множення і неперервності інволюції в топології проективної границі вихідної алгебри для довільного $\tau \in T$ знайдуться $\tau_1, \tau_2 \in T$ такі, що для довільних $f, g \in U = \operatorname{pr}\lim_{\tau\in T} H_\tau$ мають місце наступні оцінки для цих операцій:

$$\|f\cdot g\|_\tau \le \|f\|_{\tau_1}\|g\|_{\tau_2} \quad \text{і} \quad \|f^*\|_\tau = \|f\|_\tau.$$

Тепер, позначаючи $\alpha := (\tau)_{i,j=1}^n$, $\alpha_1 := (\tau_1)_{i,k=1}^n$, $\alpha_2 := (\tau_2)_{k,j=1}^n$, для відповідних матричнозначних функцій $F = (f_{ij})_{i,j=1}^n \in H_{\alpha_1} = M_n(H_{\tau_1})$, $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in$ $\in H_{\alpha_2} = M_n(H_{\tau_2})$ і $F\cdot G \in H_\alpha = M_n(H_\tau)$ на підставі нерівності Буняковського – Шварца одержуємо

$$\|F\cdot G\|_\alpha^2 = \sum_{i,j}\Big\|\sum_k f_{ik}g_{kj}\Big\|_\tau^2 \le \sum_{i,j}\Big(\sum_k \|f_{ik}g_{kj}\|_\tau\Big)^2 \le \sum_{i,j}\Big(\sum_k \|f_{ik}\|_{\tau_1}\|g_{kj}\|_{\tau_2}\Big)^2 \le$$

$$\le \left(\sum_{i,k}\|f_{ik}\|_{\tau_1}^2\right)\left(\sum_{k,j}\|g_{kj}\|_{\tau_2}^2\right) = \|F\|_{\alpha_1}^2\|G\|_{\alpha_2}^2.$$

Звідси

$$\|F\cdot G\|_\alpha \le \|F\|_{\alpha_1}\|G\|_{\alpha_2}.$$

Остання нерівність доводить, що множення в A є сумісно неперервним.

Далі, оскільки при $\alpha = (\tau)_{i,j=1}^n$

$$\|F^*\|_\alpha^2 = \sum_{j,i}\|f_{ji}^*\|_\tau^2 = \sum_{j,i}\|f_{ji}\|_\tau^2 = \sum_{i,j}\|f_{ij}\|_\tau^2 = \|F\|_\alpha^2,$$

то інволюція $*$ є унітарним оператором у кожному просторі H_α, а отже, є неперервним оператором в алгебрі A.

Лема 3. *Нехай A — унітальна напівпроста ядерна $*$-алгебра над C і $Z\subset A$ — її центр. Тоді $M_n(Z)$ також буде унітальною напівпростою ядерною $*$-алгеброю.*

Доведення. Зауважимо спочатку, що центр Z ядерної $*$-алгебри A, будучи замкненою підалгеброю в A [5, с. 203], є комутативною ядерною $*$-алгеброю в індукованій з A топології. Тоді за лемами 1, 2 матрична алгебра $M_n(Z)$ також буде ядерною $*$-алгеброю.

Далі відмітимо, що алгебра Z, а отже і $M_n(Z)$, буде напівпростою. Справді, перетин $I_Z = I\cap Z$ будь-якого максимального лівого ідеалу $I\subset A$ з центром Z є максимальним лівим ідеалом у Z. Отже, якщо a належить радикалу $R(Z)$, то a належить кожному максимальному лівому ідеалу, а це й означає, що $a\in R(Z)$, тобто $a=0$.

Основний результат.

Теорема. *Нехай A — унітальна напівпроста топологічна ядерна $*$-алгебра над C і Z — її центр. A топологічно ізоморфна $M_n(Z)$ тоді і тільки тоді, коли*:

а) *A є F_{2n}-алгеброю*;

б) *A містить підалгебру A_0, яка ізоморфна $M_n(C)$ і містить одиницю e.*

Доведення. Згідно з основною теоремою роботи [2], умови а) і б) є необхідними та достатніми для алгебраїчного ізоморфізму алгебр A і $M_n(Z)$. Зазначимо, що доведення необхідності теореми є наслідком теореми Аміцура – Левицького про те, що матрична алгебра $M_n(C)$ є F_{2n}-алгеброю (див., наприклад, [6], § 6). Для повноти доведення теореми нагадаємо, як будується алгебраїчний ізоморфізм алгебр A і $M_n(Z)$. Нехай $(e_{jk})_{j,k=1}^n \in M_n(C)$ є матричними одиницями. Якщо φ — ізоморфізм між A_0 та $M_n(C)$, то, згідно з умовою б), існують однозначно визначені елементи $a_{jk}\in A_0$ такі, що $\varphi(a_{jk}) = e_{jk}$. Далі, для будь-якого $z \in A$ визначимо матричні елементи $w_{jk}(z) = \sum_s a_{sj}\, z\, a_{ks}$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, а також матричнозначну функцію $\sigma(z) = \left(w_{jk}(z)\right)_{j,k=1}^n \in M_n(A)$. Наступними кроками у роботі [2] є доведення того, що: 1) відображення σ є лінійним мультиплікативним; 2) ядро σ є тривіальним; 3) $w_{jk}(z) \in Z$ для всіх $j, k = 1, 2, \ldots, n$ та $z \in A$; 4) σ відображає алгебру A на всю алгебру $M_n(Z)$.

З огляду на леми 1 – 3 залишається довести, що алгебра A топологічно ізоморфна $M_n(Z)$, тобто обидва відображення σ та σ^{-1} є неперервними.

Справді, з одного боку, внаслідок неперервності операції множення у вихідній алгебрі U для довільного $\alpha = (\tau)_{i,j=1}^n$ знайдуться $\alpha_1 = (\tau_1)_{i,j=1}^n$, $\alpha_2 = (\tau_2)_{i,j=1}^n$, $\alpha_3 = (\tau_3)_{i,j=1}^n$ такі, для яких виконується оцінка

$$\|\sigma(z)\|_\alpha^2 = \sum_{j,k} \|w_{jk}(z)\|_\tau^2 = \sum_{j,k} \left\| \sum_m a_{mj}\, z\, a_{km} \right\|_\tau^2 \le \sum_{j,k} \left(\sum_m \left\| a_{mj}\, z\, a_{km} \right\|_\tau \right)^2 \le$$

$$\le 2 \sum_{j,k} \left(\sum_m \|a_{mj}\|_{\tau_1} \|z\|_{\tau_2} \|a_{km}\|_{\tau_3} \right)^2 = \sum_{j,k} \left(\sum_m \|a_{mj}\|_{\tau_1} \|a_{km}\|_{\tau_3} \right)^2 \|z\|_{\tau_2}^2 = K_1 \|z\|_{\tau_2}^2,$$

де $K_1 = \sum_{j,k} \left(\sum_m \|a_{mj}\|_{\tau_1} \|a_{km}\|_{\tau_3} \right)^2$.

З іншого боку, також внаслідок неперервності операції множення в U для довільного $\tau \in T$ знайдуться $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in T$ такі, що виконується оцінка

$$\|z\|_\tau^2 = \left\| \sum_{j,k} a_{j1}\, w_{jk}(z) a_{1k} \right\|_\tau^2 \le \left(\sum_{j,k} \left\| a_{j1}\, w_{jk}(z) a_{1k} \right\|_\tau \right)^2 \le$$

$$\le \sum_{j,k} \left(\left\| a_{j1} \right\|_{\tau_1} \left\| w_{jk}(z) \right\|_{\tau_2} \|a_{1k}\|_{\tau_3} \right)^2 \le K_2 \sum_{j,k} \left\| w_{jk}(z) \right\|_{\tau_2}^2 = K_2 \|\sigma(z)\|_{\alpha_2}^2,$$

де $K_2 = 2\left(\max_j \left\| a_{j1} \right\|_{\tau_1} \max_k \left\| a_{1k} \right\|_{\tau_3} \right)^2$.

З одержаних оцінок випливає, що обидва відображення σ та σ^{-1} є неперервними, а це і доводить топологічність ізоморфізму.

Теорему доведено.

1. *Krupnik N., Silbermann B.* The structure of some Banach algebras fulfilling a standart identity // Math. Nachr. – 1989. – **142**. – P. 175 – 180.
2. *Roch S., Silbermann B.* On algebras with standart identities // Linear Algebra and its Appl. – 1990. – **137/138**. – P. 239 – 247.
3. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. – Киев: Наук. думка, 1978. – 360 с.
4. *Rabanovich S. V., Samoilenko Yu. S.* Representations of F_n-algebras and applications // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1998. – **4**, № 4. – P. 86 – 96.
5. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. – М.: Наука, 1968. – 664 с.
6. *Herstein I. N.* Noncommutative rings. – New York: Wiley, 1968.

Одержано 14.04.2005