УДК 517.9

В. В. Савчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩІ НАБЛИЖЕННЯ ГОЛОМОРФНИМИ ФУНКЦІЯМИ. ЗАСТОСУВАННЯ ДО НАЙКРАЩИХ МНОГОЧЛЕННИХ НАБЛИЖЕНЬ КЛАСІВ ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ

We find necessary and sufficient conditions under which a real function from $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$, is badly approximable by the Hardy subspace $H_p^0 := \{f \in H_p\colon f(0) = 0\}$. In a number of cases, we obtain exact values for the best approximations in the mean of functions holomorphic in the unit disk by functions that are holomorphic outside the unit disk. We use obtained results in determining exact values of the best polynomial approximations and n-widths of some classes of holomorphic functions. We find necessary and sufficient conditions under which the generalized Bernstein inequality for algebraic polynomials on the unit circle is true.

Установлены необходимые и достаточные условия, при которых действительнозначная функция из $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$, является плохо приближаемой подпространством Гарди $H_p^0 := \{f \in H_p\colon f(0) = 0\}$. В ряде случаев найдены точные значения наилучших приближений в среднем функций, голоморфных в круге единичного радиуса, функциями, являющимися голоморфными вне этого круга. Полученные результаты применены к нахождению точных значений величин наилучших многочленных приближений и n-поперечников некоторых классов голоморфных функций. Установлены необходимые и достаточные условия, при которых выполняется обобщенное неравенство Бернштейна для алгебраических многочленов на единичной окружности.

1. Вступ. Попередні відомості. Нехай $\mathbb{D} := \big\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\big\}$ — одиничний круг у комплексній площині $\mathbb{C}$, $\mathbb{T} := \big\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\big\}$ — одиничне коло в комплексній площині, σ — нормована міра Лебега на $\mathbb{T}$, $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$, — простір сумовних на $\mathbb{T}$ відносно σ функцій f з нормою

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{T})} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{T}} |f|^p d\sigma\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}} |f(z)|, & p = \infty, \end{cases}$$

H_p — простір Гарді голоморфних в $\mathbb{D}$ функцій f із нормою

$$\|f\|_{H_p} := \begin{cases} \sup\limits_{0<\varrho<1} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \big|f(\varrho\,\cdot)\big|^p d\sigma\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \big|f(z)\big|, & p = \infty. \end{cases}$$

Відомо, що функції з простору Гарді H_p мають на колі $\mathbb{T}$ граничні значення по недотичних шляхах. Залишивши за граничними значеннями функції $f \in H_p$ те ж саме позначення f, на підставі відомих теорем будемо мати рівність $\|f\|_{H_p} = \|f\|_{L_p(\mathbb{T})}$. З огляду на це далі будемо використовувати єдине позначення $\|\cdot\|_p$ для норми у просторах H_p і $L_p(\mathbb{T})$.

У даній роботі наведено результати досліджень, що стосуються такої задачі:

Нехай функція f належить $L_p(\mathbb{T})$ і $\mathfrak{A}_p$ — деякий підпростір H_p, $1 \le p \le \infty$. Обчислити значення величини найкращого наближення функції f підпростором $\mathfrak{A}_p$, тобто обчислити

$$\inf_{g \in \mathfrak{A}_p} \|f + g\|_p,$$

а також знайти екстремальну функцію $g_f \in \mathfrak{A}_p$ (якщо така існує), для якої досягається нижня межа.

У першій частині роботи, конкретизуючи цю задачу, ми даємо характеризацію множини дійснозначних функцій із $L_p(\mathbb{T})$, які є *погано наближуваними підпростором H_p^0*, тобто тих функцій $f \in L_p(\mathbb{T})$, для яких

$$\inf_{g \in H_p^0} \|f + g\|_p = \|f\|_p,$$

де $H_p^0 := \big\{g \in H_p \colon g(0) = 0\big\}$.

У другій частині роботи ми застосовуємо отриманий результат до розв'язання задачі про найкраще наближення в середньому функцій, голоморфних у крузі $\mathbb{D}$, функціями, які є голоморфними зовні цього круга, тобто в $\mathbb{D}_\infty := \big\{z \in \mathbb{C} \colon |z| > 1\big\}$. Також в цій частині наведено кілька важливих наслідків, які мають самостійний інтерес в теорії функцій.

Нарешті, у третій частині ми застосовуємо попередні результати до задачі про найкраще наближення алгебраїчними многочленами класів згорток за Адамаром та задачі про n-поперечники таких класів функцій.

Методи доведення основних тверджень цієї роботи ґрунтуються на конкретних співвідношеннях двоїстості, які є окремими випадками одного загального твердження. Для зручності наведемо його тут.

Теорема двоїстості (див., наприклад, [1, с. 110]). *Нехай X — банахів простір, Y — замкнений підпростір X, X^* і Y^* — відповідно спряжені простори і $Y^\perp$ — анулятор Y. Тоді*:

1) *фактор-простір $X^*/Y^\perp$ ізометрично ізоморфний простору Y^* і для кожного фіксованого функціонала $\phi \in X^*$*

$$\sup_{y \in Y, \|y\|_X \le 1} \big|\phi(y)\big| = \min_{\psi \in Y^\perp} \|\phi + \psi\|, \tag{1}$$

де „min" *означає, що нижня межа досягається*;

2) *простір $(X/Y)^*$ ізометрично ізоморфний простору $Y^\perp$ і для кожного фіксованого елемента $x \in X$*

$$\max_{\psi \in Y^\perp, \|\psi\| \le 1} \big|\psi(x)\big| = \inf_{y \in Y} \|x + y\|_X, \tag{2}$$

де „min" *означає, що верхня межа досягається.*

***Зауваження* 1.** Якщо $X = L_p(\mathbb{T})$ і $Y = H_p^0$, або $Y = H_p$, то (див., наприклад, [1, с. 132; 2, с. 138]) існують єдині екстремальні елементи, для яких досягаються відповідні верхні та нижні межі у співвідношеннях (1) і (2).

2. Наближення дійснозначних функцій функціями з простору Гарді. Функція $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ називається *знакосталою* на $\mathbb{T}$, якщо $f \geq 0$ або ж $f \leq 0$ майже скрізь на $\mathbb{T}$.

Теорема 1. *Нехай* $1 \leq p < \infty$, $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *— функція з* $L_p(\mathbb{T})$ *і* $f \not\equiv 0$. *Наступні твердження є рівносильними*:

1) *функція* $g^* \equiv 0$ *— єдиний елемент з* H_p^0, *що найкраще наближає функцію* f, *тобто* $\min\limits_{g \in H_p^0} \|f+g\|_p = \|f+g^*\|_p = \|f\|_p$;

2) *якщо* $p = 1$, *то функція* f *знакостала на* $\mathbb{T}$, *якщо ж* $1 < p < \infty$, *то* $f \equiv \mathrm{const}$.

Доведення. 1) $\Rightarrow$ 2). Згідно із зауваженням 1 існує єдина функція $F \in H_q = (H_p)^\perp$, $1/q + 1/p = 1$, $\|F\|_q = 1$, така, що

$$\int\limits_{\mathbb{T}} F f d\sigma = \min_{g \in H_p^0} \|f+g\|_p.$$

За умовою теореми $g^* \equiv 0$ — єдина екстремальна функція з H_p^0, для якої досягається нижня межа у правій частині цього співвідношення. Отже, за нерівністю Гельдера

$$\|f\|_p \leq \|F\|_q \|f\|_p = \|f\|_p\ ,$$

причому рівність можлива тоді і тільки тоді, коли майже скрізь на $\mathbb{T}$

$$0 \leq Ff = \|f\|_p^{1-p} |f|^p, \quad \text{якщо} \quad 1 \leq p < \infty, \tag{3}$$

і

$$\overline{F}|F|^{q-2} = \|f\|_p^{-1} f, \quad \text{якщо} \quad 1 < p < \infty. \tag{4}$$

Розглянемо на $\mathbb{T}$ множини

$$S_f^- := \big\{w \in \mathbb{T}\colon f(w) < 0\big\},$$

$$S_f^+ := \big\{w \in \mathbb{T}\colon f(w) > 0\big\}$$

і покажемо, що одна з цих множин має нульову міру Лебега.

Припустимо, що це не так, тобто $\min(\sigma(S_f^-), \sigma(S_f^+)) > 0$. Внаслідок дійснозначності функції f із співвідношення (3) випливає, що $0 \leq Ff$, тобто $\operatorname{Im} F = 0$ майже скрізь на $\mathbb{T}$. Тому за формулою Шварца

$$F(z) = i \int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{Im} F(w) \frac{1+\overline{w}z}{1-\overline{w}z} d\sigma(w) + \operatorname{Re} F(0) = \operatorname{Re} F(0) \quad \forall z \in \mathbb{D}. \tag{5}$$

Отже, функція $F \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$. Далі, на множині S_f^- $0 \leq cf$. Отже, $c \leq 0$. Але і на множині S_f^+ $0 \leq cf$. Отже, $c \geq 0$. Таким чином, $0 = c \equiv F$ і внаслідок (3) $f \equiv 0$, що виключається умовою теореми.

Отримана суперечність доводить співвідношення

$$0 = \min(\sigma(S_f^-), \sigma(S_f^+)) < \max(\sigma(S_f^-), \sigma(S_f^+)) \le 1.$$

Отже, функція f є знакосталою на $\mathbb{T}$ і $F \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$, $|c| = 1$. Якщо ж $1 < p < \infty$, то ці факти разом зі співвідношенням (4) свідчать про те, що $f = c\|f\|_p = \mathrm{const}$ майже скрізь на $\mathbb{T}$.

2) $\Rightarrow$ 1). Нехай для визначеності $f \ge 0$ майже скрізь на $\mathbb{T}$, якщо $p = 1$, і $f = \mathrm{const} > 0$, якщо $1 < p < \infty$.

З одного боку,

$$\min_{g \in H_p^0} \|f + g\|_p \le \|f\|_p,$$

а з іншого, згідно зі співвідношенням (2),

$$\min_{g \in H_p^0} \|f + g\|_p = \max_{\substack{F \in H_q \\ \|F\|_q \le 1}} \left| \int_{\mathbb{T}} F f d\sigma \right| \ge \int_{\mathbb{T}} 1 \cdot f d\sigma = \|f\|_p.$$

Отже, $\min_{g \in H_p^0} \|f + g\|_p = \|f\|_p$ і згідно із зауваженням 1 функція $g \equiv 0$ є єдиним елементом з H_p^0, що найкраще наближає функцію f.

***Зауваження* 2.** У випадку наближення дійснозначної функції $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, множиною H_p можна довести таке твердження:

$$\min_{g \in H_p} \|f + g\|_p = \|f\|_p \Leftrightarrow f \equiv 0.$$

Справді, якщо виконується така рівність, то

$$\|f\|_p = \min_{g \in H_p} \|f + g\|_p \le \min_{g \in H_p^0} \|f + g\|_p \le \|f\|_p.$$

Отже, за теоремою 1 функція f є сталою. Згідно зі співвідношенням двоїстості майже скрізь на $\mathbb{T}$ виконується рівність (3), в якій двоїста екстремальна функція F належить H_q^0. Отже, за формулою Шварца (5) $F \equiv 0$. Але виконання (4) при цьому можливе лише тоді, коли $f = 0$ майже скрізь на $\mathbb{T}$.

Характеризацію підмножини неперервних на $\mathbb{T}$ функцій, які є погано наближуваними простором H_∞, отримано в роботах [3, 4].

3. Наближення в середньому функцій, голоморфних в $\mathbb{D}$, функціями, голоморфними в $\mathbb{D}_\infty$. У цьому пункті домовимося про такі позначення:

$\mathcal{H}_+$, $\mathcal{H}_-$ — множини функцій, голоморфних відповідно в $\mathbb{D}$ і $\mathbb{D}_\infty$;

$\mathcal{H}_-^0$ — множина функцій f, голоморфних в $\mathbb{D}_\infty$, таких, що $f(\infty) = 0$;

$\mathcal{P}_n$ — множина алгебраїчних многочленів степеня не більшого за n, $n \in \mathbb{N}$;

$\mathcal{S}^+$, $\mathcal{S}^-$ — множини інтегралів типу Коші – Стільтьєса відповідно в $\mathbb{D}$ і $\mathbb{D}_\infty$;

$\mathcal{R}^+$ — множина функцій, голоморфних в $\mathbb{D}$, для яких $\mathrm{Re}\, f \ge 0$;

$H_{p,-}$ — простір Гарді в $\mathbb{D}_\infty$.

Нагадаємо, що інтегралом типу Коші – Стільтьєса в $\mathbb{D}$ (відповідно в $\mathbb{D}_\infty$) називається функція $f \in \mathcal{H}_+$ $\left(f \in \mathcal{H}_-^0\right)$ вигляду

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(w)}{1 - \overline{w}z} \quad \forall z \in \mathbb{D} \quad (z \in \mathbb{D}_\infty), \tag{6}$$

де μ — комплексний заряд на $\mathbb{T}$.

Нехай $f \in \mathcal{H}_+$, $g \in \mathcal{H}_-^0$ і

$$\|f + g\|_1^* := \lim_{\varrho \to 1-} \left\| f(\varrho\, \cdot) + g\left(\frac{1}{\varrho}\, \cdot\right) \right\|_1 .$$

Величину $\inf_{g \in \mathcal{H}_-^0} \|f + g\|_1^*$ будемо називати найкращим наближенням у середньому даної функції $f \in \mathcal{H}_+$ множиною $\mathcal{H}_-^0$. Якщо ця величина є скінченною, то будемо говорити, що функцію f можна наблизити множиною $\mathcal{H}_-^0$.

З основного результату роботи [5] випливає характеризація множини функцій із $\mathcal{H}_+$, які можна наблизити множиною $\mathcal{H}_-^0$. Так, перефразовуючи основний результат цієї роботи, отримуємо наступне твердження.

Твердження 1. *Для того щоб функцію $f \in \mathcal{H}_+$ можна було наблизити множиною $\mathcal{H}_-^0$, необхідно і достатньо, щоб $f \in \mathcal{S}^+$, при цьому наближуючою підмножиною з $\mathcal{H}_-^0$ буде $\mathcal{S}^-$.*

Твердження 1 залишається правильним, якщо в ньому формально поміняти місцями $\mathcal{H}_+$ і $\mathcal{H}_-^0$, а також $\mathcal{S}^+$ і $\mathcal{S}^-$.

Покажемо, як співвідноситься множина $\mathcal{S}^+$ з деякими важливими для подальшого викладу матеріалу множинами голоморфних функцій.

Насамперед зазначимо, що згідно з теоремами братів Рісів і В. І. Смірнова (див., наприклад, [1, с. 39, 40; 2, с. 100])

$$H_1 \subset \mathcal{S}^+ \subset \bigcap_{0<p<1} H_p.$$

Тому функції з $\mathcal{S}^+$ мають майже скрізь на колі $\mathbb{T}$ граничні значення по недотичних шляхах. Якщо для граничних значень функцій $f \in \mathcal{S}^+$ і $g \in \mathcal{S}^-$ залишити ті ж самі позначення f і g, то $f,\ g \in L_p(\mathbb{T})$ для всіх $p \in (0, 1)$.

Далі, за теоремою Ріса – Герглотца голоморфна в $\mathbb{D}$ функція f належить $\mathcal{R}^+$ тоді і тільки тоді, коли знайдеться борелівська міра μ на $\mathbb{T}$ така, що

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(w)}{1 - \overline{w}z} - \overline{f(0)} \quad \forall z \in \mathbb{D}. \tag{7}$$

Отже, $\mathcal{R}^+ \subset \mathcal{S}^+$.

З огляду на зазначені факти нашою метою в даному пункті буде вивчення найкращих наближень функцій з $\mathcal{S}^+$ множинами $\mathcal{S}^-$.

Нехай $f \in \mathcal{H}_+$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k z^k, \qquad z \in \mathbb{D}, \quad \text{де} \quad \widehat{f}_k := \frac{f^{(k)}(0)}{k!},$$

і $g \in \mathcal{H}_-^0$. Тоді за теоремою Коші

$$\widehat{f}_0 = \int\limits_{\mathbb{T}} f(\varrho w) d\sigma(w) = \int\limits_{\mathbb{T}} \left(f(\varrho w) + g\left(\frac{1}{\varrho} w\right)\right) d\sigma(w), \quad 0 < \varrho < 1.$$

Звідси випливає, що для будь-якої функції $f \in \mathcal{H}_+$ справджується оцінка

$$\inf_{g \in \mathcal{H}_-^0} \|f + g\|_1^* \geq |\widehat{f}_0|. \tag{8}$$

Природно виникає питання про те, для яких функцій у цьому співвідношенні виконується рівність.

Характеризація множини таких функцій випливає з наступного твердження.

Теорема 2. *Нехай f належить $\mathcal{H}_+$ і $\widehat{f}_0 > 0$. Наступні твердження є рівносильними*:

1) $2 \operatorname{Re} f \geq \widehat{f}_0$ *у крузі* $\mathbb{D}$;

2) $\inf\limits_{g \in \mathcal{H}_-^0} \|f + g\|_1^* = \|f + g_{_f}\|_1^* = \widehat{f}_0$, *де* $g_{_f}(z) := \overline{f(1/\overline{z})} - \widehat{f}_0$ *— єдиний елемент з* $\mathcal{H}_-^0$, *що найкраще наближає функцію* f.

Доведення. 1) $\Rightarrow$ 2). Насамперед зазначимо, що $f \in \mathcal{R}^+ \subset \mathcal{S}^+$. Отже, згідно з твердженням 1 функцію f можна наблизити в середньому множиною $\mathcal{H}_-^0$. Далі, функція $g_{_f}$ належить $\mathcal{H}_-^0$ і $f(z) + g_{_f}(1/\overline{z}) > 0$ у крузі $\mathbb{D}$. Оскільки для кожного фіксованого $\varrho \in [0,1)$ $f(\varrho\,\cdot) \in H_1$ і $g_{_f}(1/\varrho\,\cdot) \in H_{1,-}^0$, де

$$H_{1,-}^0 := \left\{ f \in \mathcal{H}_-^0 : \text{функція } z \mapsto \overline{f(1/\overline{z})} \in H_1, \quad z \in \mathbb{D} \right\},$$

то за теоремою 1

$$\min_{g \in H_{1,-}^0} \|f(\varrho\,\cdot) + g(\cdot)\|_1 =$$

$$= \min_{h \in H_{1,-}^0} \|f(\varrho\,\cdot) + g_{_f}(1/\varrho\,\cdot) + h(\cdot)\|_1 = \|f(\varrho\,\cdot) + g_{_f}(1/\varrho\,\cdot)\|_1 = \widehat{f}_0. \tag{9}$$

За теоремою двоїстості $g_{_f}(1/\varrho\,\cdot)$ — єдина функція, для якої досягається нижня межа в (9).

Звідси випливає, що для будь-якої функції $h \in \mathcal{H}_-^0$

$$\|f(\varrho\,\cdot) + g_{_f}(1/\varrho\,\cdot)\|_1 \leq \|f(\varrho\,\cdot) + h(1/\varrho\,\cdot)\|_1 \quad \forall \varrho \in [1,0),$$

і, отже,

$$\|f + g_{_f}\|_1^* \leq \|f + h\|_1^*.$$

Якщо g_1 — інша функція з $\mathcal{H}_-^0$ така, що $\|f + g_1\|_1^* = \inf_{g \in \mathcal{H}_-^0} \|f + g\|_1^*$, то на підставі того, що функція $z \mapsto f(z) + g_1(1/\overline{z})$ у крузі $\mathbb{D}$ є функцією з гармонічного простору Гарді h_1 (див., наприклад, [1, с. 2]), згідно з (9) виконуються співвідношення

$$\widehat{f}_0 = \|f(\varrho\,\cdot) + g_{_f}(1/\varrho\,\cdot)\|_1 \leq \|f(\varrho\,\cdot) + g_1(1/\varrho\,\cdot)\|_1 \leq \widehat{f}_0 \quad \forall \varrho \in [0,1).$$

Отже, за теоремою двоїстості $g_1 = g_{_f}$.

2) $\Rightarrow$ 1). Для кожного фіксованого $\varrho \in [0,1)$ за теоремою двоїстості (див. зауваження 1) існує єдина функція $g_\varrho^* \in H_{1,-}^0$, для якої

$$\min_{g\in H_{1,-}^0} \|f(\varrho\ \cdot)+g(\cdot)\|_1 = \int\limits_{\mathbb{T}} |f(\varrho w)+g_\varrho^*(w)|d\sigma(w) = \widehat{f}_0\ .$$

Але оскільки $g_\varrho^* \in H_{1,-}^0$, то і

$$\int\limits_{\mathbb{T}} (f(\varrho w)+g_\varrho^*(w))d\sigma(w) = \widehat{f}_0.$$

Отже, майже скрізь на $\mathbb{T}$

$$0 \le f(\varrho w)+g_\varrho^*(w) = |f(\varrho w)+g_\varrho^*(w)|. \tag{10}$$

Далі, розглянемо функцію $\varphi_\varrho(z) := \overline{g_\varrho^*(1/\overline{z})} - f(\varrho z) + \widehat{f}_0,\ z \in \mathbb{D}$. Функція φ_ϱ належить H_1^0 і згідно з (10) $\operatorname{Im}\varphi_\varrho = 0$ майже скрізь на $\mathbb{T}$, тому за формулою Шварца (див. (5)) $\varphi_\varrho(z) = c$, $c \in \mathbb{R}$, для всіх $z \in \mathbb{D}$. Але оскільки $\varphi_\varrho \in H_1^0$, то $0 = \widehat{\varphi}_\varrho(0) = c$. Отже, $\operatorname{Re} g_\varrho^*(w) = \operatorname{Re} f(\varrho w) - \widehat{f}_0$ майже скрізь на $\mathbb{T}$ і співвідношення (10) набирає вигляду $0 \le 2\operatorname{Re} f(\varrho w) - \widehat{f}_0$.

***Зауваження* 3.** Якщо функція f належить простору Гарді $H_1 \subset \mathcal{H}_+$, то скрізь у доведенні теореми 2 можна вважати, що $\varrho = 1$, а під функціями f і g_f розуміти їх граничні значення на $\mathbb{T}$.

Розглянемо тепер найкращі наближення функції $f \in \mathcal{H}_+$ множиною

$$\mathcal{P}_{n-1} + \mathcal{H}_-^0 := \left\{f\colon f = p+g, p \in \mathcal{P}_{n-1},\ g \in \mathcal{H}_-^0\right\}$$

при даному фіксованому $n \in \mathbb{N}$.

Зрозуміло, що можливість такого наближення повністю характеризується твердженням 1.

Якщо $f \in \mathcal{H}_+$ і $g \in \mathcal{P}_{n-1} + \mathcal{H}_-^0$, то за формулою Коші

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{\varrho^n}\int\limits_{\mathbb{T}} \overline{w}^n \left(f(\varrho w) + g\left(\frac{1}{\varrho}w\right)\right) d\sigma(w) \quad \forall \varrho \in [0,1),$$

звідки випливає оцінка

$$\inf_{g\in\mathcal{P}_{n-1}+\mathcal{H}_-^0} \|f+g\|_1^* \ge |\widehat{f}_n|. \tag{11}$$

Найближчою нашою метою є знаходження умов на функцію f, за яких співвідношення (11) є рівністю.

Нехай

$$S_{n-1}(f)(z) := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}_k z^k$$

— частинна сума ряду Тейлора функції $f \in \mathcal{H}_+$.

Наступне твердження є безпосереднім наслідком теореми 2.

Теорема 3. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $f \in H_1$ *і* $|\widehat{f}_n| > 0$. *Наступні твердження є рівносильними*:

1) $2\,\mathrm{Re}\,\dfrac{f(z) - S_{n-1}(f)(z)}{z^n \widehat{f}_n} \geq 1$ *у крузі* $\mathbb{D}$;

2) $\inf\limits_{g \in \mathcal{P}_{n-1} + H^0_{1,-}} \|f + g\|_1 = \|f + g_{_f}\|_1 = |\widehat{f}_n|$, *де*

$$g_{_f}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\overline{\widehat{f}_{2n-k}} e^{i2\arg \widehat{f}_n} - \widehat{f}_k \right) z^k + e^{i2\arg \widehat{f}_n} z^{2n} \left(\overline{f(1/\overline{z})} - \overline{S_{2n}(f)(1/\overline{z})} \right)$$

— *єдиний елемент із* $\mathcal{P}_{n-1} + H^0_{1,-}$, *що найкраще наближає функцію* f.

Доведення. Розглянемо функції

$$\varphi(z) := \frac{1}{z^n \widehat{f}_n} \left(f(z) - S_{n-1}(f)(z) \right), \quad z \in \mathbb{D},$$

і

$$g_{_\varphi}(z) := \overline{\varphi(1/\overline{z})} - \widehat{\varphi}_0, \quad z \in \mathbb{D}_\infty.$$

Рівносильність тверджень 1 і 2 теореми встановлюється застосуванням теореми 2 до функцій φ і $g_{_\varphi}$ з урахуванням зауваження 3 і рівності

$$\varphi(w) + g_{_\varphi}(w) =$$

$$= \frac{1}{\widehat{f}_n w^n} \left(f(w) - S_{n-1}(f)(w) \right) + \frac{1}{\overline{\widehat{f}_n} \overline{w}^n} \left(\overline{f(w)} - \overline{S_{n-1}(f)(w)} \right) - 1 =$$

$$= \frac{1}{w^n \widehat{f}_n} \Bigg(f(w) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\overline{\widehat{f}_{2n-k}} e^{i2\arg \widehat{f}_n} - \widehat{f}_k \right) w^k +$$

$$+ e^{i2\arg \widehat{f}_n} w^{2n} \left(\overline{f(w)} - \overline{S_{2n}(f)(w)} \right) \Bigg) =$$

$$= \frac{1}{w^n \widehat{f}_n} (f(w) + g_{_f}(w)),$$

яка виконується майже в кожній точці $w \in \mathbb{T}$.

Наведемо тепер деякі інші наслідки теореми 2.

Наслідок 1. *Якщо* f *належить* H_∞, $f \neq \mathrm{const}$, *і* $|f| \leq K$ *у крузі* $\mathbb{D}$, *то*

$$\inf_{g \in H_{1,-}} \|f + g\|_1 \leq \min \left(K, 2(K - |\widehat{f}_0|) \right).$$

Доведення. Зрозуміло, що достатньо довести нерівність $\inf_{g \in \mathcal{H}_-} \|f + g\|_1 \leq$ $\leq 2(K - |\widehat{f}_0|)$.

Для цього розглянемо функцію

$$\varphi := 2K - |\widehat{f}_0| - e^{-i\arg \widehat{f}_0} f.$$

Очевидно, що $\widehat{\varphi}_0 = 2\big(K - |\widehat{f}_0|\big)$ і

$$2\operatorname{Re}\varphi = 2\left(2K - |\widehat{f}_0| - \operatorname{Re}(e^{-i\arg\widehat{f}_0}\, f)\right) \geq 2\left(K - |\widehat{f}_0|\right) = \widehat{\varphi}_0 > 0.$$

Отже, за теоремою 2

$$\inf_{g\in H_{1,-}} \|f+g\|_1 = \inf_{g\in H_{1,-}} \|e^{-i\arg\widehat{f}_0}\, f + g\|_1 \leq$$

$$\leq \min_{g\in H^0_{1,-}} \|\varphi+g\|_1 = \widehat{\varphi}_0 = 2(K - |\widehat{f}_0|).$$

Голоморфна в $\mathbb{D}$ функція f, $f(0) = 0$, називається опуклою в $\mathbb{D}$, якщо вона однолиста і образ $f(\mathbb{D})$ є опуклою областю.

***Наслідок* 2.** *Якщо f — опукла функція в $\mathbb{D}$, то функція $g_f(z) := z^2\overline{f(1/\overline{z})} - \overline{\widehat{f}_1} z$ — єдиний елемент з $\mathcal{H}_-$, що найкраще наближає функцію f, і*

$$\min_{g\in\mathcal{H}_-} \|f+g\|^*_1 = \|f+g_f\|^*_1 = |\widehat{f}_1|.$$

Доведення. Оскільки функція f є однолистою, то $\widehat{f}_1 = f'(0) \neq 0$. Розглянемо функцію

$$F(z) := \frac{f(z)}{\widehat{f}_1 z}.$$

Оскільки $F(0) = 1$ і $\operatorname{Re} F > 1/2$ (див., наприклад, [6, с. 45]), то за теоремою 2

$$1 = \min_{g\in\mathcal{H}^0_-} \|F+g\|^*_1 = \|F+G_F\|^*_1 = \frac{1}{|\widehat{f}_1|}\|f+g_f\|^*_1,$$

де $G_F(z) := \overline{F(1/\overline{z})} - 1$.

Звідси випливає співвідношення

$$\min_{g\in\mathcal{H}_-} \|f+g\|^*_1 \leq \|f+g_f\|^*_1 = |\widehat{f}_1|,$$

яке з урахуванням (11) насправді є рівністю.

Оскільки за теоремою 2 функція G_F (елемент найкращого наближення для F) є єдиною, то звідси випливає і єдиність функції g_f.

Зауважимо, що безпосередньо зі співвідношення (11) і наслідків 1 та 2 випливають оцінки коефіцієнтів Тейлора голоморфних функцій:

$$|\widehat{f}_n| \leq \min\Big(K, 2(K - |\widehat{f}_0|)\Big) \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad \text{якщо} \quad |f| \leq K,$$

і

$$|\widehat{f}_n| \leq |\widehat{f}_1| \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad \text{якщо} \;\; f \;\; \text{є опуклою.}$$

Кожна з цих оцінок є непокращуваною на відповідному класі функцій. Перша відома як нерівність Каратеодорі, а друга — як нерівність Льовнера – Привалова (див., наприклад, [6, с. 46]).

***Наслідок* 3.** *Нехай f належить $\mathcal{H}_+$ і $f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k z^k$, $z \in \mathbb{D}$. Якщо $\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}_k| \le 1/2$, то функція $g_f(z) = \overline{f(1/\overline{z})} - 1$, $z \in \mathbb{D}_\infty$, є єдиним елементом з $H^0_{1,-}$, що найкраще наближає функцію f, і*

$$\min_{g \in H^0_{1,-}} \|f + g\|_1 = \|f + g_f\|_1 = 1. \tag{12}$$

Доведення. Легко бачити, що

$$2 \operatorname{Re} f(e^{it}) - 1 = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}_k| \cos(kt - \arg \widehat{f}_k) \ge 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}_k| \ge 0,$$

тобто $2 \operatorname{Re} f \ge 1$ скрізь на $\mathbb{T}$.

Отже, за теоремою 2 виконується рівність (12).

Функція $h\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ називається *внутрішньою*, якщо h голоморфна в $\mathbb{D}$, $\big|h(z)\big| \le$ ≤ 1 для всіх $z \in \mathbb{D}$ і $|h(z)| = 1$ для майже всіх $z \in \mathbb{T}$.

Зовнішньою в просторі H_p, $p > 0$, називається голоморфна в $\mathbb{D}$ функція вигляду

$$Q(z) = c \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{w + z}{w - z} \log \psi(w) d\sigma(w) \right),$$

де $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, і ψ — невід'ємна функція з $L_p(\mathbb{T})$ така, що $\log \psi \in L_1(\mathbb{T})$.

Поняття внутрішньої та зовнішньої функцій у просторі $H_{p,-}$, $p > 1$, нам буде зручно подати таким чином. Голоморфна в $\mathbb{D}_\infty$ функція f називається внутрішньою (у просторі $H_{p,-}$), якщо функція $z \mapsto \overline{f(1/\overline{z})}$, $z \in \mathbb{D}$, є внутрішньою. Голоморфна в $\mathbb{D}_\infty$ функція f називається зовнішньою у просторі $H_{p,-}$, $p > 0$, якщо функція $z \mapsto \overline{f(1/\overline{z})}$, $z \in \mathbb{D}$, є зовнішньою у просторі H_p.

Відомо, що кожну функцію $f \in H_p$, $p > 0$, можна єдиним чином, з точністю до множника, рівного за модулем одиниці, зобразити у вигляді $f = hQ$, де h — внутрішня, а Q — зовнішня функція.

Позначимо

$$H^n_p := \{f \in H_p \colon \widehat{f}_j = 0, \;\; j = \overline{0, n}\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{13}$$

Наведемо елементарне твердження, потрібне для подальшого викладу.

Твердження 2. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$, $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ — функція з $L_p(\mathbb{T})$ і h — внутрішня функція в $\mathbb{D}$. Тоді*

$$\min_{g \in H^n_p} \|hf + g\|_p \le \min_{g \in H^n_p} \|f + g\|_p \le \min_{g \in H^n_p} \|\overline{h} f + g\|_p. \tag{14}$$

Доведення. Якщо $g \in H^n_p$, то і $hg \in H^n_p$. Отже,

$$\min_{g \in H^n_p} \|\overline{h} f + g\|_p = \min_{g \in H^n_p} \|\overline{h}(f + hg)\|_p = \min_{g \in H^n_p} \|f + hg\|_p \ge \min_{g \in H^n_p} \|f + g\|_p, \tag{15}$$

і праву нерівність в (14) доведено. Продовжуючи далі співвідношення (15), одержуємо

$$\min_{g\in H_p^n}\|f+g\|_p=\min_{g\in H_p^n}\|h(f+g)\|_p\geq\min_{g\in H_p^n}\|hf+g\|_p.$$

***Зауваження* 4.** Якщо f належить $H_{2,-}$, то при $p=2$ у співвідношеннях (14) виконуються рівності, оскільки в такому випадку функція $g\equiv 0$ — єдиний елемент, що найкраще наближає функції hf, f і $\overline{h}f$.

З твердження 2 і теореми 1 маємо такі наслідки.

***Наслідок* 4.** *Нехай $1\leq p\leq\infty$, функція $f\in H_p$ і $f=hQ$ — розклад f на внутрішній і зовнішній множники. Тоді*

$$\min_{g\in H_{p,-}^0}\|Q+g\|_p\leq\min_{g\in H_{p,-}^0}\|f+g\|_p. \tag{16}$$

Доведення. Справді, функція $h_1(z):=\overline{h(1/\overline{z})}$, $\in\mathbb{D}_\infty$, є внутрішньою в $H_{p,-}$. Тому за другою нерівністю в (14)

$$\min_{g\in H_{p,-}^0}\|Q+g\|_p\leq\min_{g\in H_{p,-}^0}\|\overline{h_1}\cdot Q+g\|_p=$$

$$=\min_{g\in H_{p,-}^0}\|h\cdot Q+g\|_p=\min_{g\in H_{p,-}^0}\|f+g\|_p\ .$$

***Наслідок* 5.** *Нехай $1\leq p\leq\infty$ і h — внутрішня функція в $\mathbb{D}$. Тоді*

$$\min_{g\in H_p^0}\|\overline{h}+g\|_p=\|h\|_p=1.$$

Доведення. Згідно з першою нерівністю в (14)

$$\min_{g\in H_p^0}\|1+g\|_p\leq\min_{g\in H_p^0}\|\overline{h}+g\|_p\leq\|h\|_p=1.$$

Але за теоремою 1 для $1\leq p<\infty$ ліва частина останнього співвідношення дорівнює 1.

Якщо ж $p=\infty$, то для функції $g_1\in H_\infty^0$, що найкраще наближає 1, майже скрізь на $\mathbb{T}$ виконується співвідношення $|1+g_1|\leq 1$, з якого випливає, що $\mathrm{Re}(-g_1)\geq 0$ у крузі $\mathbb{D}$, тобто $-g_1\in\mathcal{R}^+$. Отже, за теоремою Ріса–Герґлотца (див. (7))

$$-g_1(z)=\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{d\mu(w)}{1-\overline{w}z}+\overline{g_1(0)}\quad\forall z\in\mathbb{D},$$

де μ — борелівська міра на $\mathbb{T}$.

Але $g_1(0)=0$, тому

$$0=\int\limits_{\mathbb{T}}d\mu=|\mu|(\mathbb{T}).$$

Звідси внаслідок того, що $\mu\geq 0$, випливає, що $\mu\equiv 0$ і $g_1=0$.

4. Найкраще наближення алгебраїчними многочленами класів голоморфних функцій. Для даної послідовності комплексних чисел $\psi:=\{\psi_k\}_{k=0}^\infty$ такої, що $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|\psi_k|}\leq 1$, побудуємо функцію

$$\Psi(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z^k, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Якщо функція f належить $\mathcal{H}_+$, то сума ряду

$$(f * \Psi)(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k \psi_k z^k$$

визначає функцію, голоморфну в $\mathbb{D}$, і називається згорткою Адамара функцій f і Ψ.

Якщо для заданої послідовності ψ функцію $f \in \mathcal{H}_+$ можна зобразити у вигляді згортки $g * \Psi$ з деякою функцією $g \in \mathcal{H}_+$, то говорять [7], що f є ψ-інтегралом функції g. В свою чергу функцію g називають ψ-похідною функції f і використовують при цьому позначення f^{ψ}.

Якщо X — деякий нормований лінійний простір, то UX означатиме одиничну кулю в ньому.

Визначимо клас H_p^{ψ}, $1 \le p \le \infty$, таким чином:

$$H_p^{\psi} := \left\{ f \in \mathcal{H}_+ \colon f^{\psi} \in UH_p \right\}.$$

Будемо говорити, що функція $\Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z^k \in \mathcal{H}_+$ є твірним ядром класу H_p^{ψ}, якщо вона задовольняє умови, наведені вище, і $|\psi_k| > 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$.

Зрозуміло, що якщо Ψ є твірним ядром і $f \in H_p^{\psi}$, то

$$f^{\psi}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\psi_k} \widehat{f}_k z^k \in UH_p, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Розглянемо послідовність лінійних операторів $\{U_n\}_0^{\infty}$, заданих на $\mathcal{H}_+$, що діють за правилом

$$U_n(f)(z) = U_{n,\Lambda}(f)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^n \widehat{f}_k z^k, \tag{17}$$

де λ_k^n — елементи нескінченної нижньотрикутної матриці $\Lambda := \{\lambda_k^n\}$, $n = \overline{1, \infty}$, $k = \overline{0, n-1}$, над полем комплексних чисел.

Таким чином, будь-яка нижньотрикутна матриця Λ породжує за правилом (17) певний лінійний поліноміальний метод наближення функцій з $\mathcal{H}_+$.

Нехай X — нормований лінійний простір функцій, голоморфних в $\mathbb{D}$, і $\mathfrak{A}$ — підмножина в $\mathcal{H}_+$. Величина

$$\mathcal{L}_n(\mathfrak{A}; X) := \inf_{\Lambda} \sup_{f \in \mathfrak{A}} \|f - U_n(f)\|_X, \quad n \in \mathbb{N},$$

де нижня межа береться по множині усіх нижньотрикутних числових матриць Λ, називається найкращим лінійним наближенням класу $\mathfrak{A}$ в просторі X. Якщо існує матриця Λ^*, яка породжує послідовність операторів $\{U_n^*\}_0^{\infty}$ таких, що

$$\sup_{f \in \mathfrak{A}} \left\| f - U_n^*(f) \right\|_X = \mathcal{L}_n(\mathfrak{A}; X), \quad n = \overline{0, \infty},$$

то кажуть, що матриця Λ^* породжує найкращий лінійний метод наближення класу $\mathfrak{A}$ в просторі X.

Величина

$$E_n(\mathfrak{A}; X) := \sup_{f\in\mathfrak{A}} \inf_{P_{n-1}\in\mathcal{P}_{n-1}} \|f - P_{n-1}\|_X$$

називається найкращим многочленим наближенням порядку n класу $\mathfrak{A}$ в просторі X.

Нехай $C(\mathbb{T}_\varrho)$ — банахів простір неперервних на $\mathbb{T}_\varrho := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = \varrho\}$, $\varrho > 0$, функцій f з нормою

$$\|f\|_{C(\mathbb{T}_\varrho)} := \max_{z\in\mathbb{T}_\varrho} |f(z)|.$$

Теорема 4. *Нехай функція* $\Psi(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z^k$ *— твірне ядро класу* H_p^ψ, $1 \le p \le \infty$.

1. *Для кожного фіксованого* $\varrho \in [0,1]$ *і кожного натурального* n *рівність*

$$E_n\left(H_\infty^\psi; C(\mathbb{T}_\varrho)\right) = \mathcal{L}_n\left(H_\infty^\psi; C(\mathbb{T}_\varrho)\right) = |\psi_n|\varrho^n \tag{18}$$

має місце тоді і тільки тоді, коли

$$2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\psi_n}\sum_{k=0}^{\infty}\psi_{k+n}z^k\right) \ge 1 \quad \forall z \in \mathbb{D}. \tag{19}$$

При цьому існує єдиний найкращий лінійний метод наближення $\Lambda^* = \{\lambda_k^{*n}\}$, *який має вигляд*

$$\lambda_k^{*n} = 1 - \frac{\overline{\psi_{2n-k}}}{\psi_k} e^{2i\arg\psi_n}\varrho^{2(n-k)}, \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{20}$$

2. *Якщо виконується* (19), *то для кожного фіксованого* $\varrho \in [0,1]$ *і кожного натурального* n *при всіх* $p \in [1,\infty)$

$$E_n\left(H_p^\psi; L_p(\mathbb{T}_\varrho)\right) = \mathcal{L}_n\left(H_p^\psi; L_p(\mathbb{T}_\varrho)\right) = \sup_{f\in H_p^\psi} \|f - U_{n,\Lambda^*}(f)\|_{L_p(\mathbb{T}_\varrho)} = |\psi_n|\varrho^n. \tag{21}$$

***Зауваження* 5.** Якщо числа ψ_k для $k = \overline{n,\infty}$ є дійсними, то умова (19) рівносильна такій: гармонічна функція

$$\frac{1}{2}\psi_n + \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\psi_{k+n}z^k$$

є знакосталою в крузі $\mathbb{D}$.

За таких обмежень на функцію Ψ імплікацію $(19) \Rightarrow \mathcal{L}_n\left(H_p^\psi; L_p(\mathbb{T}_\varrho)\right) = |\psi_n|\varrho^n$ доведено в роботі [8], де також побудовано найкращий лінійний метод наближення у вигляді (20). За цих же обмежень на Ψ імплікація $(19) \Rightarrow E_n\left(H_p^\psi; L_p(\mathbb{T}_\varrho)\right) = |\psi_n|\varrho^n$ випливає з результатів робіт [9, 10].

Доведення. 1. Для кожної функції $f \in H^{\psi}_{\infty}$ має місце формула

$$f(\varrho z) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\psi_k} \widehat{f}_k \varrho^k z^k = \int_{\mathbb{T}} f^{\psi}(\overline{w} z) \left(\Psi(\varrho w) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \varrho^k w^k + g\left(\frac{1}{\varrho} w\right) \right) d\sigma(w), \tag{22}$$

в якій α_k — будь-які комплексні числа, $z \in \mathbb{T}$, $\varrho \in [0, 1)$ і g — довільна функція з $\mathcal{H}^0_-$.

З цієї формули за теоремою двоїстості (співвідношення (2)) маємо рівності

$$\sup_{f \in H^{\psi}_{\infty}} \left| f(\varrho) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\psi_k} \widehat{f}_k \varrho^k \right| =$$

$$= \sup_{h \in UH_{\infty}} \left| \int_{\mathbb{T}} h(w) \left(\Psi(\varrho w) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \varrho^k w^{-k} + g\left(\frac{1}{\varrho} w\right) \right) d\sigma(w) \right| =$$

$$= \inf_{g \in H^0_{1,-}} \left\| \Psi(\varrho\, \cdot) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (\varrho\, \cdot)^k + g(\cdot) \right\|_1 .$$

Оскільки клас H^{ψ}_{∞} є інваріантним відносно зсуву аргументу, то звідси випливає

$$\mathcal{L}_n \left(H^{\psi}_{\infty}; C(\mathbb{T}_{\varrho}) \right) = \inf_{\Lambda} \sup_{f \in H^{\psi}_{\infty}} |f(\varrho) - U_{n,\Lambda}(f)(\varrho)| =$$

$$= \inf_{\alpha_k} \sup_{f \in H^{\psi}_{\infty}} \left| f(\varrho) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\psi_k} \widehat{f}_k \varrho^k \right| =$$

$$= \inf_{\alpha_k} \inf_{g \in H^0_{1,-}} \left\| \Psi(\varrho\, \cdot) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (\varrho\, \cdot)^k + g(\cdot) \right\|_1 =$$

$$= \inf_{g \in \mathcal{P}_{n-1} + H^0_{1,-}} \| \Psi(\varrho\, \cdot) + g(\cdot) \|_1 . \tag{23}$$

Отже, якщо виконується (18), то

$$\inf_{g \in \mathcal{P}_{n-1} + H^0_{1,-}} \| \Psi(\varrho\, \cdot) + g(\cdot) \|_1 = \varrho^n |\psi_n|, \tag{24}$$

і за теоремою 3 для функції $\Psi(\varrho\, \cdot)$, а відтак і для Ψ, виконується умова (19). Навпаки, якщо має місце (19), то за теоремою 3 виконується рівність (24). Отже, згідно з (23) має місце (18).

2. Оцінюючи інтеграл, що стоїть у правій частині (22), за інтегральною нерівністю Мінковського, одержуємо співвідношення

$$\left\| f(\varrho\, \cdot) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\psi_k} \widehat{f}_k (\varrho\, \cdot)^k \right\|_p \leq$$

$$\le \left\| \int\limits_{\mathbb{T}} f^{\psi}(\overline{w}\ \cdot) \left(\Psi(\varrho w) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \varrho^k w^k + g\left(\frac{1}{\varrho} w\right) \right) d\sigma(w) \right\|_p \le$$

$$\le \|f^{\psi}\|_p \left\| \Psi(\varrho\ \cdot) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (\varrho\ \cdot)^k + g\left(\frac{1}{\varrho}\ \cdot\right) \right\|_1,$$

з якого випливає оцінка

$$E_n\left(H_p^{\psi}; L_p(\mathbb{T}_\varrho)\right) \le \mathcal{L}_n\left(H_p^{\psi}; L_p(\mathbb{T}_\varrho)\right) \le \inf_{g \in \mathcal{P}_{n-1} + H^0_{1,-}} \|\Psi(\varrho\ \cdot) + g(\cdot)\|_1.$$

Оскільки за умови (19) виконується (24), то

$$E_n\left(H_p^{\psi}; L_p(\mathbb{T}_\varrho)\right) \le \mathcal{L}_n\left(H_p^{\psi}; L_p(\mathbb{T}_\varrho)\right) \le \varrho^n |\psi_n|.$$

З іншого боку, за теоремою двоїстості (співвідношення (1)) для функції $f_*(z) = = \psi_n z^n$ має місце рівність

$$\min_{P_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}} \left\| f_*(\varrho\ \cdot) - P_{n-1}(\cdot) \right\|_{H_p} = \sup_{g \in L_{q,n}(\mathbb{T})} \left| \int\limits_{\mathbb{T}} f_*(\varrho w) \overline{g(w)} d\sigma(w) \right|,$$

в якій

$$L_{q,n}(\mathbb{T}) := \left\{ g \in UL_q(\mathbb{T}) \colon \int\limits_{\mathbb{T}} g(w) \overline{w}^k d\sigma(w) = 0, \quad k = \overline{0, n-1} \right\}.$$

Отже,

$$E_n\left(H_p^{\psi}; L_p(\mathbb{T}_\varrho)\right) \ge \min_{P_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}} \|f_*(\varrho\ \cdot) - P_{n-1}(\cdot)\|_{H_p} \ge$$

$$\ge \left| \int\limits_{\mathbb{T}} f_*(\varrho w) \overline{w}^n d\sigma(w) \right| = \varrho^n |\psi_n|,$$

що і завершує доведення другої частини теореми.

З'ясуємо тепер умови на твірну функцію Ψ, за яких простір алгебраїчних многочленів буде оптимальним наближуючим n-вимірним простором для класів H_p^{ψ} в сенсі n-поперечників (див. означення далі).

Для цього нам потрібне наступне твердження, яке дає необхідні і достатні умови на функцію Ψ, за яких має місце узагальнена нерівність Бернштейна для алгебраїчних многочленів на колі $\mathbb{T}$ в термінах ψ-похідних.

Теорема 5. *Нехай* $\psi := \{\psi_0, \ldots, \psi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *— набір комплексних чисел, відмінних від нуля.*

1. *Для того щоб для будь-якого алгебраїчного многочлена* $P_n \in \mathcal{P}_n$ *виконувалась узагальнена нерівність Бернштейна*

$$\left\|P_n^{\psi}\right\|_{C(\mathbb{T})} \le \frac{1}{|\psi_n|}\|P_n\|_{C(\mathbb{T})}, \tag{25}$$

необхідно і достатньо, щоб існувала послідовність чисел $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ *така, що*

$$2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\psi_n}{\psi_{n-k}}z^k + z^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k\right) \ge 1 \quad \forall z \in \mathbb{D}. \tag{26}$$

2. *Якщо виконується* (26), *то для будь-якого алгебраїчного многочлена* $P_n \in$ $\in \mathcal{P}_n$ *при кожному* $p \in [1,\infty)$

$$\left\|P_n^{\psi}\right\|_{L_p(\mathbb{T})} \le \frac{1}{|\psi_n|}\|P_n\|_{L_p(\mathbb{T})}. \tag{27}$$

Рівність у (27) *досягається для* $P_n(z) = z^n$.

***Зауваження* 6.** Умова (26) рівносильна кожній із наступних умов:

1) існує борелівська міра μ на $\mathbb{T}$ така, що

$$\int\limits_{\mathbb{T}} w^{-k} d\mu(w) = \frac{\psi_n}{\psi_{n-k}}, \quad k = 0,\ldots,n;$$

2) для кожного натурального m і будь-яких комплексних чисел λ_k, $k = 0,1,\ldots,$

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}\gamma_{k-l}\lambda_k\overline{\lambda_l} \ge 0, \tag{28}$$

де

$$\gamma_k = \begin{cases} \dfrac{\psi_n}{\psi_{n-k}}, & k = 0,\ldots,n, \\ c_k, & k = n+1,\ldots, \end{cases}$$

і $\gamma_{-k} = \overline{\gamma_k}$, $k \ge 1$.

Справді, позначаючи

$$F(z) := 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\psi_n}{\psi_{n-k}}z^k + 2z^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k,$$

бачимо, що умова (26) рівносильна тому, що $\mathrm{Re}\,F \ge 0$ у крузі $\mathbb{D}$, тобто F належить $\mathcal{R}^+$, що, в свою чергу, за теоремою Ріса – Герґлотца рівносильне рівності

$$F(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{d\lambda(w)}{1-\overline{w}z} - 1 = (\widehat{d\lambda}_0 - 1) + \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{d\lambda}_k z^k \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

де λ — додатна борелівська міра на $\mathbb{T}$.

З іншого боку, за теоремою Каратеодорі (див., наприклад, [6, с. 40]) F належить $\mathcal{R}^+$ тоді і тільки тоді, коли виконується (28).

У випадку, коли числа ψ_k є такими, що умова (26) виконується при $c_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$, імплікація (26) $\Rightarrow$ (25) доведена Г. Сеге (див. посилання в [11, с. 173]) і передоведена в [12].

Доведення. Нехай для будь-якого многочлена $P_n \in \mathcal{P}_n$ виконується (25). Очевидно, що для многочлена $P_n^*(z) = z^n$ в (25) виконується рівність. Отже,

$$\sup_{P_n \in U\mathcal{P}_n} \|P_n^{\psi}\|_{C(\mathbb{T})} = \frac{1}{|\psi_n|}, \tag{29}$$

де $U\mathcal{P}_n := \big\{P_n \in \mathcal{P}_n \colon \|P_n\|_{C(\mathbb{T})} \le 1\big\}$.

Оскільки

$$P_n^{\psi}(z) = \frac{z^n}{\psi_n} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{P_n(w)}{w^n} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\psi_n}{\psi_{n-k}} \left(\frac{w}{z}\right)^k \right) d\sigma(w) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

і множина $U\mathcal{P}_n$ є інваріантною відносно зсуву аргументу, тобто $(P_n \in U\mathcal{P}_n) \Rightarrow$ $\Rightarrow (P_n(e^{i\theta}\cdot) \in U\mathcal{P}_n \ \forall \theta \in [0, 2\pi])$, то за теоремою двоїстості (співвідношення (1)) і з урахуванням (29) маємо рівності

$$1 = |\psi_n| \sup_{P_n \in U\mathcal{P}_n} \left\|P_n^{\psi}\right\|_{C(\mathbb{T})} = |\psi_n| \sup_{P_n \in U\mathcal{P}_n} \left|P_n^{\psi}(1)\right| =$$

$$= \sup_{P_n \in U\mathcal{P}_n} \left| \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{P_n(w)}{w^n} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\psi_n}{\psi_{n-k}} w^k \right) d\sigma(w) \right| = \inf_{\mu \in M_n(\psi)} |\mu|(\mathbb{T}), \tag{30}$$

де

$$M_n(\psi) := \left\{ \mu \in M(\mathbb{T}) \colon \widehat{d\mu_k} := \int\limits_{\mathbb{T}} w^{-k} d\mu(w) = \frac{\psi_n}{\psi_{n-k}}, \ \ k = \overline{0, n} \right\}$$

і $M(\mathbb{T})$ — банахів простір комплексних зарядів μ на $\mathbb{T}$ з повною варіацією $|\mu|(\mathbb{T})$ у ролі норми.

Нехай $\{\mu_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ — послідовність зарядів з $M_n(\psi)$ така, що

$$\lim_{\nu \to \infty} |\mu_\nu|(\mathbb{T}) = \inf_{\mu \in M_n(\psi)} |\mu|(\mathbb{T}) = 1.$$

Розглянемо інтеграл Пуассона – Стільтьєса заряду μ_ν

$$P(d\mu_\nu)(z) := \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|1-\bar{\zeta}z|^2} d\mu_\nu(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Оскільки для кожного $\nu \in \mathbb{N}$

$$|P(d\mu_\nu)(z)| \le \frac{1+|z|}{1-|z|} \sup_{\nu \in \mathbb{N}} |\mu_\nu|(\mathbb{T})$$

на кожному компакті в $\mathbb{D}$, то послідовність функцій $P(d\mu_\nu),\ \nu = 1, 2, \ldots,$ є рівномірно обмеженою в $\mathbb{D}$.

Тому за принципом згущення для гармонічних функцій (див., наприклад, [13, с. 25]) з послідовності $\{P(d\mu_\nu)\}_{\nu=1}^{\infty}$ можна виділити підпослідовність, яка буде рівномірно збігатися в $\mathbb{D}$ до деякої гармонічної функції, наприклад до u. Модуль $|u|$ при цьому буде границею підпослідовності $\left|P(d\mu_{\nu_j})\right|$ на кожному компакті K в $\mathbb{D}$, тобто

$$|u(z)| = \lim_{j\to\infty} \left|P(d\mu_{\nu_j})(z)\right| \quad \forall z \in K \subset \mathbb{D}.$$

Звідси за лемою Фату з урахуванням (30) для будь-якого $\varrho \in [0, 1)$ справджується співвідношення

$$\int\limits_{\mathbb{T}} |u(\varrho w)| d\sigma(w) \le \varliminf_{\nu\to\infty} \int\limits_{\mathbb{T}} |P(d\mu_\nu)(\varrho w)| d\sigma(w) \le$$

$$\le \lim_{\nu\to\infty} |\mu_\nu|(\mathbb{T}) = \inf_{\mu \in M_n(\psi)} |\mu|(\mathbb{T}) = 1. \tag{31}$$

З рівномірної збіжності підпослідовності $P(d\mu_{\nu_j})$ до u випливає, що $\widehat{(d\mu_{\nu_j})}_k \to \widehat{u}_k$ при $j \to \infty$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$.

Отже, гармонічну функцію u в крузі $\mathbb{D}$ можна подати у вигляді

$$u(\varrho w) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\psi_n}{\psi_{n-k}} \varrho^k w^k + \sum_{k \ne 0, 1, \ldots, n} c_k \varrho^{|k|} w^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\psi_n}{\psi_{n-k}} \varrho^k w^k + h(\varrho w) + g\left(\frac{1}{\varrho} w\right) \quad \forall \varrho \in [0, 1) \quad \forall w \in \mathbb{T},$$

де c_k — певні числа такі, що функції

$$h(z) := z^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad z \in \mathbb{D},$$

і

$$g(z) := \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \frac{1}{z^k}, \quad z \in \mathbb{D}_\infty,$$

є функціями відповідно з $\mathcal{H}_+^n$ і $\mathcal{H}_-^0$.

Розглянемо тепер найкраще наближення функції $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{\psi_n}{\psi_{n-k}} z^k + h(z)$ множиною $\mathcal{H}_{-}^{0}$.

Очевидно, що згідно з (8) і (31)

$$1 \le \inf_{f \in \mathcal{H}_{-}^{0}} \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{\psi_n}{\psi_{n-k}} (\cdot)^k + h(\cdot) + f(\cdot) \right\|_1^* \le$$

$$\le \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{\psi_n}{\psi_{n-k}} (\cdot)^k + h(\cdot) + g(\cdot) \right\|_1^* = \|u\|_1^* \le 1.$$

Отже, скрізь в останніх співвідношеннях виконується рівність. Тому за теоремою 2

$$2 \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\psi_n}{\psi_{n-k}} \, z^k + h(z) \right) \ge 1 \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

що й завершує доведення необхідності умов теореми.

Нехай виконується умова (26). Для доведення достатності цієї умови зауважимо, що для будь-якої функції $g \in \mathcal{H}_{-}^{0}$ та будь-якого $\varrho \in [0,1)$ у кожній точці $z \in \mathbb{T}$

$$P_n^{\psi}(z) = \frac{1}{\psi_n \varrho^n} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{P_n(\varrho z w)}{w^n} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\psi_n}{\psi_{n-k}} (\varrho w)^k + (\varrho w)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\varrho w)^k + g\left(\frac{1}{\varrho} w\right) \right) d\sigma(w).$$

Звідси, вибираючи належним чином функцію g, за нерівністю Гаусдорфа – Юнга отримуємо оцінку

$$\left\| P_n^{\psi} \right\|_p \le \frac{1}{|\psi_n| \varrho^n} \|P_n\|_p \left\| 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\psi_n}{\psi_{n-k}} (\varrho \, \cdot)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\varrho \, \cdot)^{k+n+1} \right) - 1 \right\|_1 =$$

$$= \frac{1}{|\psi_n| \varrho^n} \|P_n\|_p, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Спрямувавши тепер ϱ до 1, одержимо відповідно (25) і (27).

Нехай X — комплексний нормований лінійний простір, $\mathfrak{A}$ — підмножина в X, X_n — n-вимірний підпростір X, X^n — підпростір X ковимірності n і $L_n \colon X \to X_n$ — неперервний лінійний оператор рангу n.

Величини

$$b_n(\mathfrak{A}; X) := \sup_{X_{n+1}} \ \sup \left\{ r \colon rUX_{n+1} \subseteq \mathfrak{A} \right\},$$

$$d_n(\mathfrak{A}; X) := \inf_{X_n} \ \sup_{f \in \mathfrak{A}} \ \inf_{g \in X_n} \ \|f + g\|_X,$$

$$d^n(\mathfrak{A}; X) := \inf_{X^n} \sup_{f\in\mathfrak{A}\cap X^n} \|f\|_X,$$

$$\delta_n(\mathfrak{A}; X) := \inf_{L_n} \sup_{f\in\mathfrak{A}} \|f + L_n(f)\|_X$$

називають відповідно бернштейнівським, колмогоровським, гельфандівським та лінійним n-поперечником.

Оптимальними підпросторами для перших трьох із наведених поперечників називають підпростори, для яких досягаються відповідно верхня межа для b_n та нижні межі для d_n і d^n. Аналогічно для δ_n оператор L_n називають оптимальним, якщо для нього досягається нижня межа.

Перераховані n-поперечники співвідносяться між собою таким чином (див., наприклад, [14], гл. 2)

$$b_n(\mathfrak{A}; X) \le \begin{matrix} d_n(\mathfrak{A}; X) \\ d^n(\mathfrak{A}; X) \end{matrix} \le \delta_n(\mathfrak{A}; X). \tag{32}$$

Теорема 6. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $\Psi(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z^k$ *— твірне ядро класу* H_p^{ψ}, $n \in \mathbb{N}$ *і* D_n *— один з* n*-поперечників* b_n, d_n, d^n *або ж* δ_n. *Якщо для* Ψ *одночасно виконуються умови* (19) *і* (26), *то для будь-якого* $\varrho \in [0, 1]$

$$D_n(H_p^{\psi}; L_p(\mathbb{T}_\varrho)) = |\psi_n|\varrho^n. \tag{33}$$

При цьому:

1) *простір* $\mathcal{P}_n$ *є оптимальним підпростором для* b_n;

2) *простір* $\mathcal{P}_{n-1}$ *є оптимальним підпростором для* d_n;

3) *простір* H_p^{n-1} (*див. позначення* (13)) *є оптимальним підпростором для* d^n;

4) *оператор* $L_n := U_{n,\Lambda^*}$, *де елементи матриці* Λ^* *визначаються правилом* (20), *є оптимальним для* δ_n.

За умови, що послідовність $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ задовольняє умови зауваження 5 та умову (26) зі значеннями $c_k = 0$, $k = \overline{0, \infty}$, рівність (33) доведено в [12], а її окремі випадки (за конкретних значень послідовності ψ_k) — в [15, 16].

Доведення. Згідно зі співвідношенням (32) достатньо довести оцінки

$$b_n\big(H_p^{\psi}; L_p(\mathbb{T}_\varrho)\big) \ge |\psi_n|\varrho^n$$

і

$$\delta_n\big(H_p^{\psi}; L_p(\mathbb{T}_\varrho)\big) \le |\psi_n|\varrho^n.$$

Перша оцінка випливає з означення поперечника b_n та теореми 5, яка гарантує, що множина $\varrho^n|\psi_n|U\mathcal{P}_n := \Big\{P \in \mathcal{P}_n \colon \big\|P(\varrho\,\cdot)\big\|_{L_p(\mathbb{T})} \le \varrho^n|\psi_n|\Big\}$ міститься в H_p^{ψ}.

Друга ж оцінка — це наслідок теореми 4, оскільки $\delta_n\big(H_p^{\psi}; L_p(\mathbb{T}_\varrho)\big) \le \mathcal{L}_n\big(H_p^{\psi}; L_p(\mathbb{T}_\varrho)\big)$.

Оптимальність простору $\mathcal{P}_n$ для b_n випливає з теореми 5, а простору $\mathcal{P}_{n-1}$ для d_n є наслідком теореми 4 і рівності (33). Оптимальність простору H_p^{n-1} для

d^n — це наслідок рівності (33) і того факту, що функція $f(z) = \psi_n z^n$ належить $H_p^\psi \cap H_p^{n-1}$. Оптимальність оператора L_n — це наслідок рівностей (33) і (21).

1. *Duren P.* Theory of H_p spaces. – New York: Acad. Press, 1970. – 258 p.
2. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 469 р.
3. *Poreda S. J.* A characterization of badly approximable functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – **169**. – P. 249 – 256.
4. *Gamelin T. W., Garnett J. B., Rubel L. A., Shields A. L.* On badly approximable functions // J. Approxim. Theory. – 1976. – **17**, № 3. – P. 280 – 296.
5. *Тумаркин Г. Ц.* Об интегралах типа Коши – Стильтьеса // Успехи мат. наук. – 1956. – **11**, № 4. – С. 163 – 166.
6. *Pommerenke Chr.* Univalent functions. – Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1975. – 376 p.
7. *Степанец А. И., Савчук В. В.* Приближения интегралов типа Коши // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 5. – С. 706 – 740.
8. *Белый В. И., Двейрин М. З.* О наилучших линейных методах приближения на классах функций, определяемых союзными ядрами // Метрические вопросы теории функций и отображений. – Киев: Наук. думка, 1971. – **5**. – С. 37 – 54.
9. *Бабенко К. И.* Наилучшие приближения классов аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1958. – **222**, № 5. – С. 631 – 640.
10. *Scheick J. T.* Polynomial approximation of functions analytic in a disk // Proc. Amer. Math. Soc. – 1966. – **17**. – P. 1238 – 1243.
11. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений: В 2 т. – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – Т. 2. – 630 с.
12. *Тайков Л. В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. – 1977. – **22**, № 2. – С. 285 – 295.
13. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 623 с.
14. *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory. – Berlin: Springer, 1985. – 291 p.
15. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
16. *Тайков Л. В.* О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 2. – С. 155 – 162.

Одержано 11.07.2006