УДК 517.983.27

В. Л. Макаров, Я. В. Клименко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗАСТОСУВАННЯ FD-МЕТОДУ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ШТУРМА – ЛІУВІЛЛЯ З КОЕФІЦІЄНТАМИ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

The functional-discrete (FD-) method is applied to the solution of the Sturm – Liouville problem with coefficients of special form and estimates of exactness are obtained. A numerical experiment is carried out with the use of Maple-10.

Функционально-дискретный (FD-) метод применен к решению задачи Штурма – Лиувилля с коэффициентами специального вида и получены оценки точности. Проведен численный эксперимент с помощью пакета Maple-10.

1. Вступ. У роботі розглянуто застосування FD-методу до задачі Штурма – Ліувілля з особливістю (коефіцієнт при похідній другого порядку вироджується на кінцях інтервалу), що є розповсюдженням результатів з [1, 2] на новий клас задач на власні значення.

2. Постановка задачі. Розглянемо задачу Штурма – Ліувілля

$$\begin{gathered}(1-z^2)u''(z)-2zu'(z)+(\lambda-q(z))u(z) = 0, \quad z\in(-1,1),\\ |u(-1)| < \infty, \quad |u(1)| < \infty,\end{gathered} \tag{1}$$

де $q(z)$ — поліном степеня $N-1$. Якщо функція $q(z)$ не є поліномом, то її спочатку наближаємо з точністю, з якою ми хочемо одержати розв'язок вихідної задачі (1), поліномом $\tilde{q}(z)$, а потім розв'язуємо задачу

$$(1-z^2)\tilde{u}''(z) - 2z\tilde{u}'(z) + \left(\tilde{\lambda}-\tilde{q}(z)\right)\tilde{u}(z) = 0, \quad z\in(-1,1),$$

$$|\tilde{u}(-1)| < \infty, \quad |\tilde{u}(1)| < \infty.$$

Введемо похибку

$$w(z) = u(z) - \tilde{u}(z).$$

Для неї маємо задачу

$$(1-z^2)w''(z) - 2zw'(z) + \left(\tilde{\lambda}-q(z)\right)w(z) = -(\lambda-q(z))\tilde{u}(z) + \left(\tilde{\lambda}-\tilde{q}(z)\right)\tilde{u}(z),$$

$$|w(\pm1)| < \infty.$$

Умова розв'язності останньої задачі приводить до співвідношення

$$\tilde{\lambda} - \lambda = \frac{\int_0^1 \left(q(z)-\tilde{q}(z)\right)\tilde{u}(z)u(z)\,dz}{\int_0^1 \tilde{u}(z)u(z)\,dz}.$$

Далі показуємо, що при $\tilde{q}(z) \to q(z)$ розв'язок $\tilde{u}(z) \to u(z)$ і

$$\left|\int_0^1 \tilde{u}(z)u(z)\,dz\right| \geq \alpha > 0.$$

Після цього одержуємо оцінку

$$\left|\tilde{\lambda}-\lambda\right| \leq \frac{\max\left|q(z)-\tilde{q}(z)\right|}{\alpha} \tag{2}$$

при умові нормування $\tilde{u}(z)$ та $u(z)$.

Якщо функцію $q(z)$ наблизити інтерполяційним поліномом Лагранжа $L_{N-1}(z)$, коли інтерполяційні вузли збігаються з нулями полінома Чебишова першого роду $T_N(x)$, $x_{k,N} = \cos\dfrac{(k-1/2)\pi}{N}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, то будемо мати оцінку

$$\max\left|q(z)-L_{N-1}(z)\right| \leq C\ln N\cdot E_{N-1}(q). \tag{3}$$

Тут $E_{N-1}(q)$ — похибка найкращого наближення функції $q(z)$ поліномами не вище $(N-1)$-го степеня, а множник $\ln N$ виникає за рахунок сталої Лебега (див. [3, 4]).

Оцінки (2), (3) дозволяють побудувати поліном $\tilde{q}(z) = L_{N-1}(z)$ із заданою точністю.

3. Застосування FD-методу. Для побудови розв'язку задачі (1) „занурюємо" цю задачу в більш загальну

$$(1-z^2)u''_z(z,t)-2zu'_z(z,t)+(\lambda(t)-t\,q(z))u(z,t) = 0, \tag{4}$$

$$|u(\pm 1,t)| < \infty.$$

Очевидно, що

$$u(z,1) = u(z), \qquad \lambda(1) = \lambda,$$

$$u_n(z,0) = CP_n(z), \qquad \lambda_n(0) = n(n+1),$$

де $P_n(z)$ — поліноми Лежандра [5].

Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді

$$u_n(z,t) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j u_n^{(j)}(z), \tag{5}$$

$$\lambda_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j \lambda_n^{(j)}. \tag{6}$$

Якщо радіус збіжності рядів (5), (6) $R>1$, то ряд (5) можна почленно диференціювати при $|t|<R$ (див., наприклад, [6, с. 361]).

Підставляючи ряди (5), (6) у (4) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t, отримуємо рекурентну послідовність рівнянь, де ліва частина залишається однією і тією ж, а права змінюється відповідним чином:

$$(1-z^2)\frac{d^2u_n^{(j+1)}(z)}{dz^2} - 2z\frac{du_n^{(j+1)}(z)}{dz} + n(n+1)u_n^{(j+1)}(z) =$$

$$= -\sum_{p=0}^{j}\lambda_n^{(j+1-p)}u_n^{(p)}(z) + q(z)u_n^{(j)}(z), \quad j = 0, 1, \ldots, \tag{7}$$

$$\left|u_n^{(j+1)}(\pm 1)\right| < \infty,$$

$$\lambda_n^{(0)} = n(n+1).$$

Тут $u_n^{(0)}(z)$ — розв'язок базової задачі

$$(1-z^2)\left(u_n^{(0)}(z)\right)'' - 2z\left(u_n^{(0)}(z)\right)' + n(n+1)u_n^{(0)}(z) = 0, \quad z \in (-1,1),$$

$$\left|u_n^{(0)}(\pm 1)\right| < \infty,$$

який має вигляд

$$u_n^{(0)}(z) = C_0 P_n(z).$$

Сталу C_0 виберемо з умови нормування

$$\int_{-1}^{1} (C_0 P_n(z))^2 dz = 1,$$

що приводить до формули

$$C_0 = \sqrt{\frac{2n+1}{n}}.$$

Невідомі $\lambda_n^{(j+1)}$, $j = 0, 1, \ldots$, будемо шукати з умови розв'язності рівнянь (7), тобто з умови ортогональності правої частини до розв'язку базової задачі $u_n^{(0)}(z)$ та додаткової умови $\int_{-1}^{1} u_n^{(j+1)}(z)u_n^{(0)}(z)dz = 0$. Тоді одержуємо

$$\lambda_n^{(j+1)} = \int_{-1}^{1} q(z)u_n^{(j)}(z)u_n^{(0)}(z)dz, \quad j = 0, 1, \ldots.$$

Для кожного $j = 0, 1, \ldots$ розв'язок $u_n^{(j+1)}(z)$ рівняння (7) шукаємо у вигляді

$$u_n^{(j+1)}(z) = C_{(j+1)}P_n(z) + w_n^{(j+1)}(z),$$

де $w_n^{(j+1)}(z)$ — частинний розв'язок неоднорідного рівняння (7), який у свою чергу будемо шукати у вигляді розкладу за поліномами Лежандра $P_p(z)$:

$$w_n^{(j+1)}(z) = \sum_{p=0}^{n+N(j+1)} \beta_p P_p(z), \tag{8}$$

$P_p(z)$ — поліноми Лежандра.

Також розкладемо праву частину рівняння (7) за поліномами Лежандра

$$F_n^{(j+1)}(z) = -\sum_{p=0}^{j} \lambda_n^{(j+1-p)}u_n^{(p)}(z) + q(z)u_n^{(j)}(z) = \sum_{p=0}^{n+N(j+1)} \alpha_p P_p(z), \tag{9}$$

$$\alpha_p = \frac{2p+1}{2}\int_{-1}^{1} F_n^{(j+1)}(x)P_p(x)dx.$$

Підставивши (8) у ліву частину рівняння (7), отримаємо

$$(1-z^2)\sum_{p=0}^{n+N(j+1)} \beta_p P_p''(z) - 2z\sum_{p=0}^{n+N(j+1)} \beta_p P_p'(z) + n(n+1)\sum_{p=0}^{n+N(j+1)} \beta_p P_p(z) =$$

$$= \sum_{p=0}^{n+N(j+1)} \beta_p \Big[(1-z^2)P_p''(z) - 2zP_p'(z)\Big] + n(n+1) \sum_{p=0}^{n+N(j+1)} \beta_p P_p(z) =$$

$$= -\sum_{p=0}^{n+N(j+1)} \beta_p p(p+1) P_p(z) + n(n+1) \sum_{p=0}^{n+N(j+1)} \beta_p P_p(z) =$$

$$= \sum_{p=0}^{n+N(j+1)} \beta_p \big(n(n+1) - p(p+1)\big) P_p(z).$$

Враховуючи зображення (9) для функції $F_n^{(j+1)}(z)$, знаходимо коефіцієнти β_p:

$$\beta_p = \frac{\alpha_p}{n(n+1) - p(p+1)}, \quad p \neq n.$$

Отже,

$$u_n^{(j+1)}(z) = C_{j+1} P_n(z) +$$

$$+ \sum_{p=0}^{n+N(j+1)} \left[\frac{\frac{2p+1}{2} \int_{-1}^{1} \Big(-\sum_{k=0}^{j} \lambda_n^{(j+1-k)} u_n^{(k)}(x) + q(x) u_n^{(j)}(x)\Big) P_p(x)\,dx}{n(n+1) - p(p+1)} \right] P_p(z), \quad p \neq n.$$

C_{j+1} ми будемо вибирати таким чином, щоб $\int_{-1}^{1} u_n^{(j+1)}(z) u_n^{(0)}(z)\,dz = 0$. Звідси одержуємо $C_{j+1} = 0$. Таким чином, вираз для $u_n^{(j+1)}(z)$ буде таким:

$$u_n^{(j+1)}(z) =$$

$$= \sum_{p=0}^{n+N(j+1)} \left[\frac{\frac{2p+1}{2} \int_{-1}^{1} \Big(-\sum_{k=0}^{j} \lambda_n^{(j+1-k)} u_n^{(k)}(x) + q(x) u_n^{(j)}(x)\Big) P_p(x)\,dx}{n(n+1) - p(p+1)} \right] P_p(z), \quad p \neq n.$$

4. Оцінка точності для власних значень і власних функцій за FD-методом. Знайдемо оцінку для членів ряду $u_n(x, 1) = u_n(x)$:

$$u_n^{(j+1)}(x) = \sum_{p=0}^{n+j(N-1)} \left[\frac{\frac{2p+1}{2} \int_{-1}^{1} F_n^{(j+1)}(\xi) \overline{P}_p(\xi)\,d\xi}{n(n+1) - p(p+1)} \overline{P}_p(x) \right], \quad n \neq p, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

за L_2-нормою

$$\| u(x) \| = \left(\int_{-1}^{1} u^2(\xi)\,d\xi \right)^{1/2}.$$

Маємо

$$\left\| u_n^{(j+1)}(x) \right\|^2 = \sum_{p=0}^{n+j(N-1)} \left[\frac{\int_{-1}^{1} F_n^{(j+1)}(\xi)\,\overline{P}_p(\xi)\,d\xi}{n(n+1) - p(p+1)} \right]^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{4n^2} \sum_{p=0}^{n+j(N-1)} \left[\int_{-1}^{1} F_n^{(j+1)}(\xi)\,\overline{P}_p(\xi)\,d\xi \right]^2 \leq \frac{1}{4n^2} \left\| F_n^{(j+1)}(x) \right\|^2 .$$

Оцінимо $\left\| F_n^{(j+1)}(x) \right\|^2$:

$$\left\| F_n^{(j+1)}(x) \right\|^2 = \int_{-1}^{1} \left[-\lambda_n^{(j+1)} u_n^{(0)}(\xi) - \sum_{k=1}^{j} \lambda_n^{(j+1-k)} u_n^{(k)}(\xi) + q(\xi) u_n^{(j)}(\xi) \right]^2 =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\lambda_n^{(j+1)}\right)^2 \left(u_n^{(0)}(\xi)\right)^2 d\xi + \int_{-1}^{1} \left(-2\lambda_n^{(j+1)} u_n^{(0)}(\xi) \left(q(\xi) u_n^{(j)}(\xi) - \sum_{k=1}^{j} \lambda_n^{(j+1-k)} u_n^{(k)}(\xi) \right) \right) +$$

$$+ \int_{-1}^{1} \left(\sum_{k=1}^{j} \lambda_n^{(j+1-k)} u_n^{(k)}(\xi) - q(\xi) u_n^{(j)}(\xi) \right)^2 d\xi =$$

$$= \left(\lambda_n^{(j+1)}\right)^2 - 2\left(\lambda_n^{(j+1)}\right)^2 + \int_{-1}^{1} \left(\sum_{k=1}^{j} \lambda_n^{(j+1-k)} u_n^{(k)}(\xi) - q(\xi) u_n^{(j)}(\xi) \right)^2 d\xi \leq$$

$$\leq \int_{-1}^{1} \left(\sum_{k=1}^{j} \lambda_n^{(j+1-k)} u_n^{(k)}(\xi) - q(\xi) u_n^{(j)}(\xi) \right)^2 d\xi .$$

Звідси знаходимо

$$\left\| F_n^{(j+1)}(x) \right\| \leq \sum_{k=1}^{j} \left| \lambda_n^{(j+1-k)} \right| \left\| u_n^{(k)}(x) \right\| + \| q(x) \|_\infty \left\| u_n^{(j)}(x) \right\| . \tag{10}$$

З формули для визначення $\lambda_n^{(j+1)}$ отримуємо оцінку

$$\left| \lambda_n^{(j+1)} \right| \leq \| q(x) \|_\infty \left\| u_n^{(j)}(x) \right\| . \tag{11}$$

Використовуючи нерівність (11), записуємо (10) у вигляді

$$\left\| F_n^{(j+1)}(x) \right\| \leq \| q(x) \|_\infty \sum_{k=0}^{j} \left\| u_n^{(k)}(x) \right\| \left\| u_n^{(j-k)}(x) \right\| .$$

Тепер одержуємо

$$\left\| u_n^{(j+1)}(x) \right\| \leq M_n \sum_{k=0}^{j} \left\| u_n^{(k)}(x) \right\| \left\| u_n^{(j-k)}(x) \right\| , \quad M_n = \frac{\| q(x) \|_\infty}{2n} . \tag{12}$$

Виконаємо заміну

$$\left\| u_n^{(j)} \right\| = (M_n)^j \tilde{U}^{(j)} \le (M_n)^j U^{(j)}.$$

Тоді нерівність (12) набере вигляду

$$\tilde{U}^{(j+1)} \le \sum_{k=0}^{j} \tilde{U}^{(k)} \tilde{U}^{(j-k)}, \quad j = 0, 1, \ldots . \tag{13}$$

Неважко переконатись, що якщо замість нерівності (13) розглянути рекурентні рівняння

$$U^{(j+1)} = \sum_{k=0}^{j} U^{(k)} U^{(j-k)}, \quad j = 0, 1, \ldots , \tag{14}$$

то їх розв'язок буде мажорувати зверху розв'язок нерівностей (13), тобто буде мати місце оцінка $\tilde{U}^{(j)} \le U^{(j)}$.

Розв'яжемо рівняння (14) методом твірних функцій. Позначимо

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j U^{(j)},$$

домножимо обидві частини рівняння (14) на z^{j+1} і підсумуємо від 0 до ∞:

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^{j+1} U^{(j+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(z^{j+1} \sum_{k=0}^{j} U^{(k)} U^{(j-k)} \right), \quad j = 0, 1, \ldots .$$

Звідси отримаємо квадратне рівняння відносно $f(z)$:

$$f(z) - 1 = z(f(z))^2,$$

розв'язок якого

$$f(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}, \quad |4z| < 1.$$

Оскільки $f(0) = 0$, залишаємо другий корінь

$$f(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}, \quad |4z| < 1. \tag{15}$$

Розкладемо $\sqrt{1-4z}$ в ряд в околі $z = 0$:

$$\sqrt{1-4z} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-j+1\right)}{j!}(-4z)^j = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j (2j-3)!!}{j!} z^j$$

і підставимо цей розклад в (15):

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{j-1}(2j-3)!!}{j!} z^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j (2j-1)!!}{j!} z^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4^j (2j-1)!!}{(2j)!!} z^j, \quad (-1)!! = 1.$$

З іншого боку,

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j U^{(j)}.$$

Тому, прирівнявши праві частини, отримаємо

$$U^{(j)} = \frac{4^j (2j-1)!!}{(2j)!!}.$$

Отже,

$$\left\| u_n^{(j+1)} \right\| \le \left(\frac{4\|q\|_\infty}{2n} \right)^{j+1} \frac{(2j+1)!!}{(2j+2)!!},$$

$$\left| \lambda_n^{(j+1)} \right| \le \|q\|_\infty \left(\frac{4\|q\|_\infty}{2n} \right)^{j+1} \frac{(2j+1)!!}{(2j+2)!!}.$$

Тепер ми можемо сформулювати теорему про точність FD-методу.

Теорема. *Нехай виконується умова*

$$r_n = \frac{4\|q\|_\infty}{2n} \le \beta < 1,$$

тоді FD-*метод збігається не повільніше геометричної прогресії із знаменником* r_n *і мають місце наступні оцінки точності:*

$$\left\| u_n(x) - \overset{j}{u}_n(x) \right\|_\infty \le \frac{(r_n)^{j+1}}{1-r_n} \alpha_{j+1}, \quad \alpha_{j+1} = \frac{(2j+1)!!}{(2j+2)!!},$$

$$\left\| \lambda_n - \overset{j}{\lambda}_n \right\| \le \|q\|_\infty \frac{(r_n)^j}{1-r_n} \alpha_{j+1},$$

де

$$\overset{j}{u}_n(x) = \sum_{p=0}^{j} u_n^{(p)}(x), \qquad \overset{j}{\lambda}_n = \sum_{p=0}^{j} \lambda_n^{(p)}.$$

Зазначимо, що отримані оцінки є двосторонніми.

5. Чисельний експеримент. Нехай $q(z) = z^2$, тоді в оцінках точності $\|q\|_\infty = 1$. В таблиці в рядках в порядку зростання наведено j-ті уточнення для $\lambda_n^{(0)} = n(n+1)$ при $n = \overline{1,4}$. В останньому стовпчику вказано j-те наближення точного значення λ_n, яке шукається за формулою $\overset{j}{\lambda}_n = \sum_{p=0}^{j} \lambda_n^{(p)}$.

n	j			
	0	1	2	3
2	6	0,5238095238	0,0101500917	−0,0004760811
3	12	0,5111111111	0,0032941768	0,0000595989
4	20	0,5064935065	0,0017750507	0,0000053147
5	30	0,5042735043	0,0011298966	0,0000011652

n	j		
	4	5	$\lambda_n = \sum_{k=0}^{5} \lambda_n^{(j)}$
2	– 0,0000141089	0,0000024412	6,533471867
3	– 0,0000026542	$-8{,}877561728 \cdot 10^{-8}$	12,51446215
4	$5{,}040382526 \cdot 10^{-7}$	$-1{,}321932266 \cdot 10^{-8}$	20,50827436
5	$5{,}770297106 \cdot 10^{-8}$	$1{,}479911013 \cdot 10^{-9}$	30,50540463

6. Висновок. Отримані апріорні оцінки точності показують достатню ефективність FD-методу. Також видно важливу властивість методу покращення точності з ростом порядкового номера власного значення. В чисельному експерименті швидкість збіжності є набагато кращою, ніж це гарантують апріорні оцінки, до того ж є практична збіжність навіть при $n = 2$, коли її не гарантує доведена теорема.

1. *Макаров В. Л.* О функционально-разностном методе произвольного порядка точности решения задачи Штурма – Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1991. – **320**, № 1. – С. 34 – 39.
2. *Bandyrskii B. I., Makarov V. L., Ukhanev O. L.* Sufficient convergence conditions of nonclassical asymptotic expansions for the Sturm – Liouville problem with periodic conditions // Differents. Uravneniya. – 1999. – **35**, № 3. – P. 1 – 12.
3. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. – М.: Наука, 1986. – 744 с.
4. *Сеге Г.* Ортогональные полиномы. – М.: Физматгиз, 1962.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1974.
6. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. – М.: Наука, 1974. – Т. 1.

Одержано 26.09.2006