УДК 519.21+62

Я. М. Чабанюк (Нац. ун-т „Львів. політехніка”)

СТІЙКІСТЬ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ З НАПІВМАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕМИКАННЯМИ В УМОВАХ ДИФУЗІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

We obtain sufficient conditions of the stability of a dynamical system in the semi-Markov space under the conditions of the diffusion approximation by using asymptotic properties of the compensation operator for the semi-Markov process and properties of the Lyapunov function for an averaged system.

Получены достаточные условия устойчивости динамической системы в полумарковской среде в условиях диффузионной аппроксимации с использованием асимптотических свойств компенсирующего оператора для полумарковского процесса, а также свойств функции Ляпунова для усредненной системы.

1. Вступ. Вивчення стійкості динамічних систем у випадковому середовищі почалося з розвитку теорії випадкових еволюцій [1, 2]. В умовах дифузійної апроксимації динамічної системи з марковським збуренням проблему стійкості вперше було розв'язано в роботі [3] з використанням мартингальної характеризації відповідного марковського процесу, а також в роботах В. С. Королюка (див., наприклад, [4]).

Стійкість динамічної системи з напівмарковським перемиканням в умовах усереднення та дифузійної апроксимації вивчалась у роботах А. В. Свіщука (див. [5]) зведенням до марковського процесу. При цьому використовувалась мартингальна характеризація відповідного марковського процесу з додатковою компонентою лінійного процесу.

В даній роботі аналіз стійкості динамічної системи з напівмарковськими перемиканнями будемо розглядати у більш загальній формі і реалізувати з використанням компенсуючого оператора для напівмарковського процесу, введеного в роботі [6]. Асимптотичне зображення компенсуючого оператора, що побудоване в даній роботі, фактично зводить проблему стійкості системи з напівмарковськими перемиканнями до аналогічної проблеми з марковськими перемиканнями.

2. Постановка задачі. Динамічна система в напівмарковському середовищі в умовах дифузійної апроксимації задається еволюційним диференціальним рівнянням

$$\frac{du^{\varepsilon}(t)}{dt} = \varepsilon^{-1} C_1\Big(u^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^2)\Big) + C_0\Big(u^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^2)\Big), \tag{1}$$

$$u^{\varepsilon}(0) = u_0,$$

де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, а $u^{\varepsilon}(t) = \Big(u_k^{\varepsilon}(t),\ k = \overline{1,d}\Big)$.

Швидкості $C_k(u, x) = \Big(C_{ki}(u, x); i = \overline{1, d}\Big)$, $k = 1, 0$, $u \in R^d$, $x \in X$, задовольняють умови, що забезпечують існування глобальних розв'язків детермінованих систем при кожному $\varepsilon > 0$:

$$\frac{du_x^{\varepsilon}(t)}{dt} = \varepsilon^{-1} C_1\Big(u_x^{\varepsilon}(t), x\Big) + C_0\Big(u_x^{\varepsilon}(t), x\Big), \quad x \in X. \tag{2}$$

Тут $x(t)$, $t \geq 0$, — напівмарковський процес (НМП) у стандартному фазовому просторі станів $(X, \mathfrak{X})$, що породжується процесом марковського відновлення x_n, τ_n, $n \geq 0$, який задається напівмарковським ядром [7]

$$Q(t, x, B) = P(x, B) G_x(t),$$

де стохастичне ядро

$$P(x, B) := \mathrm{P}\{x_{n+1} \in B \,|\, x_n = x\}, \quad B \in \mathfrak{X},$$

визначає вкладений ланцюг Маркова (ВЛМ) $x_n = x(\tau_n)$ в моменти відновлення

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{n} \theta_k, \quad n \geq 0, \quad \tau_0 = 0,$$

через інтервали $\theta_{k+1} = \tau_{k+1} - \tau_k$ між моментами відновлення. При цьому θ_n визначаються функціями розподілу

$$G_x(t) = \mathrm{P}\{\theta_{n+1} \leq t \,|\, x_n = x\} =: \mathrm{P}\{\theta_x \leq t\}.$$

Напівмарковський процес задається співвідношенням

$$x(t) = x_{\nu(t)}, \quad t \geq 0,$$

де лічильний процес $\nu(t)$ визначається формулою

$$\nu(t) := \max\{n : \tau_n \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

НМП $x(t)$, $t \geq 0$, розглядаємо регулярний та рівномірно ергодичний [8] зі стаціонарним розподілом $\pi(B)$, $B \in \mathfrak{X}$, який задовольняє співвідношення [9]

$$\pi(dx) = \rho(dx) m(x)/m,$$

де

$$m(x) = \mathrm{E}\theta_x = \int_0^\infty \overline{G}_x(t)\, dt, \qquad \overline{G}_x(t) = 1 - G_x(t),$$

$$m = \int_X \rho(dx)\, m(x),$$

а $\rho(B)$ — стаціонарний розподіл ВЛМ x_n, $n \geq 0$:

$$\rho(B) = \int_X \rho(dx)\, P(x, B), \qquad \rho(X) = 1.$$

Для інтенсивності часу перебування введемо позначення

$$q(x) = m^{-1}(x), \quad q = m^{-1}.$$

При $m(x) = 0$ покладемо $q(x) = \infty$.

Далі будемо використовувати також супроводжуючий марковський процес $x^0(t)$, $t \geq 0$, що задається генератором

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_X P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)], \tag{3}$$

на тест-функціях $\varphi(x)$ банахового простору $\mathfrak{B}(X)$ дійснозначних функцій з супремум-нормою $\|\varphi(x)\| := \sup_{x \in X} |\varphi(x)|$.

Стаціонарний розподіл $\pi(B)$, $B \in \mathfrak{X}$, породжує проектор Π в $\mathcal{B}(X)$, що задається рівністю [9]

$$\Pi\varphi(x) = \hat{\varphi}\mathbf{1}(x), \qquad \hat{\varphi} := \int_X \pi(dx)\, \varphi(x), \quad \mathbf{1}(X) \equiv 1.$$

Будемо використовувати також потенціальний оператор (потенціал) R_0 [9], що визначається співвідношенням $QR_0 = R_0 Q = \mathrm{I} - \Pi$.

Стійкість стохастичної системи (1) розглядається в умовах стійкості усередненої системи, яка при умові балансу

$$\int_X \pi(dx)\, C_1(u, x) \;\equiv\; 0, \quad u \in R^d,$$

визначається розв'язком стохастичної системи [10]

$$\begin{aligned} du(t) &= C_0(u(t))\, dt + d\zeta(t), \\ d\zeta(t) &= a(u(t))\, dt + \sigma(u(t))\, dw(t). \end{aligned} \tag{4}$$

Усереднення здійснюється за стаціонарним розподілом $\pi(dx)$:

$$C_0(u) := \int_X \pi(dx)\, C_0(u,x).$$

Дифузійний процес $\zeta(t),\ t \ge 0,$ визначається вектор-функцією зсуву

$$a(u) = a_1(u) + a_2(u),$$

де

$$\begin{aligned} a_1(u) &= -\int_X \pi(dx)\, C_1(u, x)\, R_0\, C_1'(u, x), \\ a_2(u) &= \frac{1}{2} q \int_X \rho(dx)\, \mu(x) C_1(u, x)\, C_1'(u, x), \end{aligned} \tag{5}$$

та матрицею дисперсії $\sigma(u)$, що визначається співвідношенням

$$B(u) = \sigma(u)\sigma^*(u),$$

при умові позитивної визначеності матриці

$$B(u) = B_0(u) + B_1(u), \tag{6}$$

де

$$\begin{aligned} B_0(u) &= -2 \int_X \pi(dx)\, C_1(u, x)\, R_0\, C_1(u, x), \\ B_1(u) &= q \int_X \rho(dx)\, \mu(x)\, C_1^2(u, x). \end{aligned} \tag{7}$$

В (5) та (7)

$$\mu(x) = m_2(x) - 2\, m^2(x),$$

$$m^2(x) = \int_0^\infty \overline{G}_x^{(2)}(s)\, ds, \quad \text{а} \quad \overline{G}_x^{(2)}(t) := \int_t^\infty \overline{G}_x(s) ds.$$

Зауваження 1. Для показникових функцій розподілу з інтенсивністю $q(x) = m^{-1}(x)$ маємо $\mu(x) = 0$. Отже, члени $a_2(u)$ зсуву та $B_2(u)$ дисперсії характеризують немарковість перемикаючого процесу.

Зауваження 2. Генератор стохастичної системи (4) визначається на тест-функціях $\varphi(u) \in C^2(R^d)$ співвідношенням

$$\boldsymbol{L}\varphi(u) = C(u)\, \varphi'(u) + \frac{1}{2} \operatorname{Tr}\big[B(u)\, \varphi''(u)\big], \tag{8}$$

де

$$C(u) = C_0(u) + a(u). \tag{9}$$

Задача полягає в тому, щоб за умов збіжності стохастичної системи (1) до усередненої системи (4) при $\varepsilon \to 0$ встановити додаткові умови, що забезпечують стійкість початкової системи (1) при всіх $\varepsilon \le \varepsilon_0$ (ε_0 — достатньо мале число).

Стійкість системи (1) розглядається в умовах експоненціальної стійкості усередненої системи [4]

$$\frac{d\tilde{u}(t)}{dt} = C_0(\tilde{u}(t)).$$

3. Формулювання результату.

Теорема. *Нехай для усередненої стохастичної системи* (4), *що визначається генератором* (8), *існує функція Ляпунова* $V(u)$, $u \in R^d$, *для якої виконуються умова експоненціальної стійкості*:

C_1) $\boldsymbol{L}V(u) \le -C_0 V(u)$, $C_0 > 0$,

а також наступні додаткові умови при $k, r, l = 0, 1$:

C_2) $\left| C_k(u, x) V'(u) \right| \le C_1 V(u)$, $C_1 > 0$,

$$\left| C_k(u, x) R_0 \left[C_r(u, x) V'(u) \right]' \right| \le C_2 V(u), \quad C_2 > 0,$$

$$\left| C_k(u, x) R_0 \left[C_r(u, x) \left[C_1(u, v) V'(u) \right]' \right]' \right| \le C_3 V(u), \quad C_3 > 0;$$

C_3) *функції розподілу* $G_x(t), t \ge 0$, $x \in X$, *задовольняють умову Крамера рівномірно по* $x \in X$:

$$\sup_{x \in X} \int_0^\infty e^{ht} \overline{G}_x(t) dt \le H < +\infty, \quad h > 0,$$

а також мають місце оцінки

$$0 < \underline{m} \le m(x) \le \overline{m} < +\infty.$$

Тоді для всіх $\varepsilon \le \varepsilon_0$ *розв'язок еволюційного рівняння* (1) *при всіх початкових умовах* $| u^\varepsilon(0) | \le u_0$ (u_0 *— достатньо мале*) *є асимптотично стійким з імовірністю* 1:

$$\mathrm{P}\left\{ \lim_{t \to \infty} \left\| u^\varepsilon(t) \right\| = 0 \right\} = 1.$$

4. Компенсуючий оператор. *Розширений процес марковського відновлення* (РПМВ) задається послідовністю

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), \qquad x_n^\varepsilon = x^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), \qquad \tau_n^\varepsilon = \varepsilon^2 \tau_n, \quad n \ge 0. \tag{10}$$

Означення [5]. *Компенсуючий оператор* (*КО*) *РПМВ* (10) *визначається співвідношенням*

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{L}^\varepsilon \varphi(u, x, t) = \\ &= \varepsilon^{-2} q(x) \left[\mathrm{E}\left\{ \varphi(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon, \tau_{n+1}^\varepsilon) \middle| u_n^\varepsilon = u, x_n^\varepsilon = x, \tau_n^\varepsilon = t \right\} - \varphi(u, x, t) \right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Розглянемо сукупність напівгруп $C_t^\varepsilon(x)$, $t \ge 0$, $x \in X$, що породжується супроводжуючою системою (2) та визначається генератором

$$\boldsymbol{C}^\varepsilon(x) \varphi(u) = \boldsymbol{C}^\varepsilon(u, x) \varphi'(u), \tag{12}$$

де

$$\boldsymbol{C}^\varepsilon(u, x) = \varepsilon^{-1} C_1(u, x) + C_0(u, x),$$

а також оператор $\boldsymbol{C}_\varepsilon(x)$, що має вигляд

$$\boldsymbol{C}_\varepsilon(x) := \varepsilon \boldsymbol{C}^\varepsilon(x) = \boldsymbol{C}_1(x) + \varepsilon \boldsymbol{C}_0(x), \tag{13}$$

складові якого визначаються за формулами

$$\boldsymbol{C}_1(x)\varphi(u) := C_1(u, x)\varphi'(u), \qquad \boldsymbol{C}_0(x)\varphi(u) = C_0(u, x)\varphi'(u).$$

Лема 1. *КО* (11) *для РПМВ* (10) *на тест-функціях* $\varphi(u, x)$ *має вигляд*

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon \varphi(u, x) = \varepsilon^{-2} q(x)\left[\int_0^\infty G_x(ds) C^\varepsilon_{\varepsilon^2 s}(x) \int_X P(x, dy)\varphi(u, y) - \varphi(u, x)\right]. \tag{14}$$

Доведення. Оскільки

$$\mathrm{E}\varphi(u_1^\varepsilon, x_1^\varepsilon) = \mathrm{E} C^\varepsilon_{\theta_x}(x)\varphi(u, x_1^\varepsilon) = \int_0^\infty G_x(ds)\, C^\varepsilon_{\varepsilon^2 s}(x) \int_X P(x, dy)\varphi(u, y),$$

то з (11) маємо (14).

Лема 2. *КО* (14) *на тест-функціях* $\varphi(u, \cdot) \in C^3(R^d)$ *допускає асимптотичні зображення*

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon \varphi(u, x) = \varepsilon^{-2} Q\varphi(u, x) + \varepsilon^{-1}\theta_0^\varepsilon(x)\varphi(u, x) =$$

$$= \varepsilon^{-2} Q\varphi(u, x) + \varepsilon^{-1} Q_1(x)\varphi(u, x) + \theta_1^\varepsilon(x)\varphi(u, x) =$$

$$= \varepsilon^{-2} Q\varphi(u, x) + \varepsilon^{-1} Q_1(x)\varphi(u, x) + Q_2(x)\varphi(u, x) + \varepsilon\theta_2^\varepsilon(x)\varphi(u, x), \tag{15}$$

де оператор Q *визначено в* (3), *а оператори* $Q_1(x)$ *і* $Q_2(x)$ *визначаються співвідношеннями*

$$Q_1(x)\varphi(u, x) = \boldsymbol{C}_1(x)\boldsymbol{P}\varphi(u, x),$$

$$Q_2(x)\varphi(u, x) = \left[\boldsymbol{C}_0(x) + \mu_2(x)\boldsymbol{C}_1^2(x)\right]\boldsymbol{P}\varphi(u, x),$$

$$\mu_2(x) = \frac{m_2(x)}{2m(x)},$$

а залишкові члени мають вигляд

$$\theta_0^\varepsilon(x)\varphi(u, x) = q(x)\boldsymbol{C}_\varepsilon(x)\boldsymbol{G}_1^\varepsilon(x)\boldsymbol{P}\varphi(u, x), \tag{16}$$

$$\theta_1^\varepsilon(x)\varphi(u, x) = q(x)\left[\boldsymbol{C}_\varepsilon^2(x)\boldsymbol{G}_2^\varepsilon(x) + \boldsymbol{C}_0(x)\right]\boldsymbol{P}\varphi(u, x), \tag{17}$$

$$\theta_2^\varepsilon(x)\varphi(u, x) = q(x)\left[\boldsymbol{C}_\varepsilon^3(x)\boldsymbol{G}_3^\varepsilon(x) + \frac{m_2(x)}{2}\boldsymbol{C}_2^\varepsilon(x)\right]\boldsymbol{P}\varphi(u, x). \tag{18}$$

Тут оператори $\boldsymbol{G}_k^\varepsilon(x)$, $k = \overline{1, 3}$, *визначаються рекурсією*

$$\boldsymbol{G}_k^\varepsilon(x) = \int_0^\infty \overline{G}_x^{(k)}(s)ds\, C^\varepsilon_{\varepsilon^2 s}(x),$$

де $\overline{G}_x^{(1)}(s) = \overline{G}_x(s)$, *а* $\boldsymbol{C}_2^\varepsilon(x) = \boldsymbol{C}_0(x)[2\boldsymbol{C}_1(x) + \varepsilon\boldsymbol{C}_0(x)]$.

Доведення. Спочатку використаємо очевидне зображення

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon = \varepsilon^{-2} Q + \varepsilon^{-2}\boldsymbol{L}_1^\varepsilon(x), \tag{19}$$

де

$$\boldsymbol{L}_1^\varepsilon(x) := q(x)[\boldsymbol{G}_\varepsilon(x) - I]\boldsymbol{P}, \tag{20}$$

та в правій частині (20)

$$\boldsymbol{G}_\varepsilon(x) := \int_0^\infty G_x(ds) C^\varepsilon_{\varepsilon^2 s}(x). \tag{21}$$

Далі, інтегруючи частинами та використовуючи рівняння для напівгрупи

$$dC^{\varepsilon}_{\varepsilon^2 s}(x) = \varepsilon^2 \boldsymbol{C}^{\varepsilon}(x) C^{\varepsilon}_{\varepsilon^2 s}(x)\,ds,$$

з урахуванням умови C_3 теореми отримуємо для (21) таке зображення:

$$\boldsymbol{G}_{\varepsilon}(x) - I = \varepsilon^2 \boldsymbol{C}^{\varepsilon}(x) \boldsymbol{G}^{\varepsilon}_1(x), \tag{22}$$

де

$$\boldsymbol{G}^{\varepsilon}_1(x) = \int\limits_0^{\infty} \overline{G}_x(s)\,ds\, C^{\varepsilon}_{\varepsilon^2 s}(x). \tag{23}$$

Аналогічно з (23) маємо

$$\boldsymbol{G}^{\varepsilon}_1(x) = m(x) I + \varepsilon^2 \boldsymbol{C}^{\varepsilon}(x) \boldsymbol{G}^{\varepsilon}_2(x), \tag{24}$$

де

$$\boldsymbol{G}^{\varepsilon}_2(x) := \int\limits_0^{\infty} \overline{G}^{(2)}_x(s)\,ds\, C^{\varepsilon}_{\varepsilon^2 s}(x), \tag{25}$$

а також з (25) знаходимо

$$\boldsymbol{G}^{\varepsilon}_2(x) = \frac{m_2(x)}{2} I + \varepsilon^2 \boldsymbol{C}^{\varepsilon}(x) \boldsymbol{G}^{\varepsilon}_3(x), \tag{26}$$

де

$$\boldsymbol{G}^{\varepsilon}_3(x) := \int\limits_0^{\infty} \overline{G}^{(3)}_x(s)\,ds\, C^{\varepsilon}_{\varepsilon^2 s}(x),$$

і

$$\overline{G}^{(3)}_x(s) := \int\limits_s^{\infty} \overline{G}^{(2)}_x(s)\,ds.$$

Об'єднуючи (22), (24) та (26), одержуємо

$$\boldsymbol{G}_{\varepsilon}(x) - I = \varepsilon^2 m(x) \boldsymbol{C}^{\varepsilon}(x) + \varepsilon^4 m_2(x) \left[\boldsymbol{C}^{\varepsilon}(x)\right]^2 + \varepsilon^6 \left[\boldsymbol{C}^{\varepsilon}(x)\right]^3 \boldsymbol{G}^{\varepsilon}_3(x). \tag{27}$$

Тепер, враховуючи (12) та (13), остаточно з (27) маємо

$$\boldsymbol{G}_{\varepsilon}(x) - I = \varepsilon m(x) \boldsymbol{C}_1(x) + \varepsilon^2 \left[m(x) \boldsymbol{C}_0(x) + m_2(x) \boldsymbol{C}^2_1(x)\right] + \varepsilon^3 \theta^{\varepsilon}_3(x), \tag{28}$$

де залишковий член

$$\theta^{\varepsilon}_3(x) = m_2(x)\left(2\boldsymbol{C}_1(x)\boldsymbol{C}_0(x) + \varepsilon \boldsymbol{C}^2_0(x)\right) + \boldsymbol{C}^3_{\varepsilon}(x) \boldsymbol{G}^{\varepsilon}_3(x). \tag{29}$$

Об'єднуючи (19), (20), (28) і (29), отримуємо асимптотичні зображення (15).

5. Збурена функція Ляпунова. Доведення теореми базується на використанні розв'язку проблеми сингулярного збурення (РПСЗ) [4] для компенсуючого оператора, поданого в асимптотичному зображенні (15).

Введемо збурену функцію Ляпунова

$$V^{\varepsilon}(u, x) = V(u) + \varepsilon V_1(u, x) + \varepsilon^2 V_2(u, x), \tag{30}$$

де $V(u)$ — функція Ляпунова для граничної дифузії (4).

Лема 3. *На збуреній функції Ляпунова* (30) *КО* (14) *допускає зображення*

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon} V^{\varepsilon}(u, x) = \boldsymbol{L} V(u) + \varepsilon \theta^{\varepsilon}_L(x) V(u),$$

де $\boldsymbol{L}$ — *генератор граничної дифузії* (4), *а залишковий оператор* $\theta_L^\varepsilon(x)$ *визначається співвідношенням*

$$\theta_L^\varepsilon(x)V(u) = \theta_0^\varepsilon(x)V(u) + \theta_1^\varepsilon(x)\boldsymbol{P}V_1(u,x) + \theta_2^\varepsilon(x)\boldsymbol{P}V_2(u,x). \tag{31}$$

Збурення функції Ляпунова мають зображення

$$V_1(u,x) = -R_0Q_1(x)V(u), \tag{32}$$

$$V_2(u,x) = R_0\tilde{\boldsymbol{L}}(x)V(u). \tag{33}$$

Тут

$$\tilde{\boldsymbol{L}}(x) := \boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}(x), \tag{34}$$

$$\boldsymbol{L}(x) := Q_2(x) - Q_1(x)\boldsymbol{P}R_0Q_1(x).$$

Доведення леми 3 є безпосереднім висновком РПСЗ (див. [9, с. 52], лема 3.3) та асимптотичних зображень (15). При цьому граничний оператор $\boldsymbol{L}$ обчислюється за формулою

$$\boldsymbol{L}\Pi = \Pi Q_2(x)\Pi - \Pi Q_1(x)R_0Q_1(x)\Pi,$$

а залишковий оператор $\theta_L^\varepsilon(x)$ визначається об'єднанням членів при однакових степенях ε у розкладі

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = \left[\varepsilon^{-2}Q + \varepsilon^{-1}Q_1(x)\boldsymbol{P} + Q_2(x)\boldsymbol{P} + \varepsilon\theta_2^\varepsilon(x)\boldsymbol{P}\right]V(u) +$$

$$+ \left[\varepsilon^{-1}Q + Q_1(x)\boldsymbol{P} + \varepsilon\theta_1^\varepsilon(x)\boldsymbol{P}\right]V_1(u,x) + \left[Q + \varepsilon\theta_0^\varepsilon(x)\boldsymbol{P}\right]V_2(u,x),$$

що приводить до формул (31) – (33).

Висновок 1. Граничний оператор, що визначає усереднену дифузію (4), задається рівністю (8), де $C(u)$ і $B(u)$ обчислюються за формулами відповідно (9) і (6).

Враховуючи зображення (32), (33) збурюючих функцій $V_k(u,x)$, $k = 1, 2$, та вираз (31) для залишкового оператора $\theta_L^\varepsilon(x)$, отримуємо наступне зображення залишкового оператора на функціях Ляпунова $V(u)$:

$$\theta_L^\varepsilon(x)V(u) = \left[\theta_2^\varepsilon(x) - \theta_1^\varepsilon\boldsymbol{P}R_0Q_1(x) + \theta_0^\varepsilon\boldsymbol{P}R_0\tilde{\boldsymbol{L}}(x)\right]V(u).$$

На підставі виразів (16) – (18) для залишкових операторів $\theta_k^\varepsilon(x)$, $k = 0, 1, 2$, та зображення (34) оператора $\tilde{\boldsymbol{L}}(x)$ робимо висновок, що у залишкового оператора $\theta_L^\varepsilon(x)$ діють оператори диференціювання по змінній $u \in R^d$ не вище третього порядку. Крім того, з умов теореми випливає, що оператори $\boldsymbol{G}_k^\varepsilon(x)$, $k = 0, 1, 2, 3$, та потенціал R_0 є обмеженими у просторі функцій $V(u) \in \in C^3(R^3)$. Отже, має місце такий висновок.

Висновок 2. В умовах теореми має місце оцінка

$$\left|\theta_L^\varepsilon(x)V(u)\right| \le c_L V(u).$$

З огляду на умову C_1 теореми та асимптотичне зображення (15) можемо сформулювати такий висновок.

Висновок 3. В умовах $C_1 - C_3$ теореми при всіх $\varepsilon \le \varepsilon_0$ (ε_0 — достатньо мале, $\varepsilon_0 \le c/c_L$) має місце ключова нерівність

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) \le -cV(u), \quad c > 0. \tag{35}$$

6. Доведення теореми. Завершення доведення теореми реалізується за схемою роботи [10]. Із зображень (32), (33) функцій збурення $V_k(u,x)$, $k = 1, 2$, та умови C_2 теореми маємо наступну двосторонню оцінку для збуреної функції Ляпунова $V^{\varepsilon}(u, x)$:

$$0 < (1-\varepsilon c)V(u) \le V^{\varepsilon}(u, x) \le (1+\varepsilon c)V(u). \tag{36}$$

Мартингальна характеризація процесу $\eta^{\varepsilon}(t) := V^{\varepsilon}\big(u^{\varepsilon}(\tau^{\varepsilon}),\ x(t/\varepsilon^2)\big)$ [6] та ключова нерівність (35) характеризують процес $\eta^{\varepsilon}(t)$, як невід'ємний супермартингал [10]. Отже, існує з імовірністю одиниця невід'ємна границя v^{ε}:

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{t\to\infty} V^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^2)) = v^{\varepsilon}\right\} = 1.$$

При цьому випадкова величина v^{ε} має скінченне математичне сподівання, оскільки

$$\mathrm{E}V^{\varepsilon}\big(u^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^2)\big) \le V^{\varepsilon}(u,x) \le (1+\varepsilon c)V(u).$$

Враховуючи додаткову властивість функції Ляпунова

$$V(u) \to \infty, \qquad |u| \to \infty, \tag{37}$$

робимо висновок, що $\mathrm{P}\{v^{\varepsilon} < \infty\} = 1.$ Знову ж таки з ключової нерівності (35) та оцінки (36) маємо

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{t\to\infty} V(u^{\varepsilon}(t)) = 0\right\} = 1,$$

тобто

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{n\to\infty} u^{\varepsilon}(\tau_n) = 0\right\} = 1.$$

Насамкінець, позитивність функції Ляпунова $V(u) > 0$ при $u \ne 0$, властивість (37) та регулярність напівмарковського процесу $x(t)$, $t \ge 0$, приводять до твердження теореми.

Автор висловлює подяку академіку НАН України В. С. Королюку за увагу до викладеного матеріалу.

1. *Hersh T., Griego R.* Random evolution — theory and applications // Univ. New Mexico. Techn. Repts. – 1969. – **180**. – P. 15 – 38.
2. *Pinsky M.* Random evolution // Springer Lect. Notes Math. – 1975. – **451**. – P. 89 – 100.
3. *Blankenship G. L., Papanicolaou G. C.* Stability and control of stochastic systems with wide band noise disturbances // SIAM J. Appl. Math. – 1978. – **34**. – P. 437 – 476.
4. *Королюк В. С.* Стійкість стохастичних систем у схемі дифузійної апроксимації // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 1. – С. 36 – 47.
5. *Swishchuk A. V.* Stability of semi-Markov evolutionary stochastic systems in averaging and diffusion approximation schemes // Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. – Київ : Ін-т математики НАН України, 1994. – С. 255 – 269.
6. *Свириденко М. Н.* Мартингальная характеризация предельных распределений в пространстве функций без разрывов второго рода // Мат. заметки. – 1998. – **43**, № 5. – С. 398 – 402.
7. *Korolyuk V. S., Swishchuk A. V.* Evolution of systems in random media. – CRC Press, 1995. – 352 p.
8. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Полумарковские случайные эволюции. – Киев : Наук. думка, 1992. – 246 с.
9. *Korolyuk V. S., Korolyuk V. V.* Stochastic models of systems. – Netherland: Kluwer, 1999. – 185 p.
10. *Королюк В. С., Чабанюк Я. М.* Стійкість динамічної системи з напівмарковськими перемиканнями за умов стійкості усередненої системи // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 2. – С. 195 – 204.

Одержано 10.10.2005