УДК 517.54

А. К. Бахтин, В. Е. Вьюн (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗДЕЛЯЮЩЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ К ОЦЕНКАМ ВНУТРЕННИХ РАДИУСОВ ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ*

We obtain solutions of new extremal problems of the geometric theory of functions of complex variable associated with estimates of inner radii of nonoverlapping domains. Some already known results are generalized to the case of open sets.

Одержано розв'язки нових екстремальних задач геометричної теорії функцій комплексної змінної, пов'язаних з оцінками внутрішніх радіусів неперетинних областей. Узагальнено деякі раніш відомі результати на випадок відкритих множин.

Экстремальные задачи геометрической теории функций комплексной переменной, связанные с оценками внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств, возникли в связи с работой М. А. Лаврентьева [1], где была решена задача о произведении конформных радиусов двух взаимно непересекающихся областей. Эта работа вызвала поток исследований многих авторов (см. [2 – 16]).

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$. Систему точек $A_{n,m} := \{a_{k,p} \in \mathbb{C} : k = \overline{1,n},\ p = \overline{1,m}\}$ назовем (n,m)-лучевой, если при всех $k = \overline{1,n}$ и $p = \overline{1,m}$ выполняются соотношения

$$0 < |a_{k,1}| < |a_{k,2}| < \ldots < |a_{k,m}| < \infty,$$
$$\arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \ldots = \arg a_{k,m} =: \theta_k =: \theta_k(A_{n,m}),$$
$$0 = \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < \theta_{n+1} := 2\pi, \qquad a_{n+1,p} := a_{1,p}.$$

Определим умножение (n,m)-лучевой системы $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$ на число $t > 0$ следующим образом: $tA_{n,m} := \{ta_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$. В случае $m = 1$ назовем $(n,1)$-лучевую систему точек n-лучевой и рассмотрим более простые обозначения: $a_{k,1} =: a_k$, $k = \overline{1,n}$, $A_{n,1} =: A_n$. Пусть

$$\alpha_k := \frac{1}{\pi}\left(\arg a_{k+1,1} - \arg a_{k,1}\right),$$
$$\Lambda_k := \{w \in \mathbb{C} : \arg a_{k+1,1} < \arg w < \arg a_{k,1}\},$$

$z_k(w)$ — однозначная ветвь функции $-i(e^{-i\arg a_{k,1}} w)^{1/\alpha_k}$, которая реализует однолистное комформное отображение области Λ_k, $k = \overline{1,n}$, на плоскость $\operatorname{Re} z > 0$. Пусть

$$\chi(t) := \frac{1}{2}(t + t^{-1}), \qquad U_R := \{w \in \mathbb{C} : w < R\}, \qquad R > 0.$$

При $n, m \in \mathbb{N}$, $n = 2$ обозначим

$$L(A_{n,2}) := \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2}\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{a_{k+1,p}}\right|^{1/2\alpha_k}\right)|a_{k,p}|,$$
$$L_p(A_{n,2}) := \prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{a_{k+1,p}}\right|^{1/2\alpha_k}\right)|a_{k,p}|, \qquad p = 1, 2.$$

---

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Государственной программы Украины № 0107U002027.

При $m = 1$ обозначим $L_1(A_{n,1}) =: L_1(A_n) =: L(A_n)$,

$$L(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{1/2\alpha_k}\right)|a_k|.$$

Пусть задана произвольная $(n,2)$-лучевая система точек $A_{n,2} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Четверка точек

$$\{z_k(a_{k,1}),\ z_k(a_{k+1,1}),\ z_k(a_{k,2}),\ z_k(a_{k+1,2})\}, \qquad k = \overline{1,n},$$

расположена на мнимой оси, причем интервал $(z_k(a_{k,1}),\ z_k(a_{k+1,1}))$ содержит начало координат. Конформный автоморфизм плоскости комплексных чисел вида $z \mapsto \dfrac{1+z}{1-z}$ преобразует указанную четверку в четверку точек на единичной окружности. Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 — различные точки единичной окружности. Обозначим через z_0 точку открытого единичного круга, в которой пересекаются неевклидовы геодезические, соединяющие соответственно пары точек z_1, z_3 и z_2, z_4. Тогда конформный автоморфизм комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}_z$ вида $z \mapsto e^{i\theta}\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$, $\theta \in \mathbb{R}$, преобразует заданную четверку точек в вершины некоторого невырожденного прямоугольника со сторонами, параллельными координатным осям. С учетом изложенного выше нетрудно указать при каждом $k = \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, конформные автоморфизмы $T_k(z)$ комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}_z$ такие, что

$$-i\rho_k^{1/\alpha_k} = T_k(z_k(a_{k,1})), \qquad -i\rho_k^{-1/\alpha_k} = T_k(z_k(a_{k,2})),$$

$$i\rho_k^{1/\alpha_k} = T_k(z_k(a_{k+1,1})), \qquad i\rho_k^{-1/\alpha_k} = T_k(z_k(a_{k+1,2})), \qquad k = \overline{1,n}.$$

Совокупность чисел $\{\rho_k\}_{k=1}^n$ однозначно определяется системой точек $A_{n,2}$ (см. также [13]). Пусть

$$t_0 := t_0(A_{n,2}) := \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1-\rho_k^{2/\alpha_k}}{1+\rho_k^{2/\alpha_k}}\right)^{1/n}, \qquad R^0 := \left[\frac{1-t_0}{1+t_0}\right]^{1/n}.$$

Рассмотрим открытое множество $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, $A_{n,2} \subset D$. Связную компоненту множества $D \cap \overline{\Lambda}_k$, содержащую точку a, будем обозначать $D_k(a)$. Если множества $D_k(a_{k,1})$, $D_k(a_{k,2})$, $D_k(a_{k+1,1})$, $D_k(a_{k+1,2})$ (соответственно $D_k(a_k)$, $D_k(a_{k+1})$) не пусты и попарно не пересекаются при всех $k = \overline{1,n}$, то будем говорить, что множество D удовлетворяет обобщенному условию неналегания относительно системы точек $A_{n,2}$ (соответственно относительно системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$) (см., например, [14, 15]). На множестве пар целочисленных индексов определим равенство $(k,p) = (q,s) \Leftrightarrow k = q$ и $p = s$.

Используемые в дальнейшем определения внутреннего радиуса $r(B,a)$ области B относительно содержащейся в ней точки a, квадратичного дифференциала, обобщенной функции Грина $g_B(z,w)$ области B, конденсатора и связанные с ним понятия его емкости и модуля содержатся, например, в [2, 3, 8, 10]. Если B — открытое множество, $a \in B$, то $B(a)$ — связная компонента множества B, содержащая точку a. Положим $r(B,a) := r(B(a),a)$,

$$g_B(w,a) := \begin{cases} g_{B(a)}(w,a), & w \in B(a), \\ \overline{\lim\limits_{\zeta \to w}}\, g_{B(a)}(\zeta,a), & w \in \partial B(a) \ (\zeta \in B(a)), \\ 0, & w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B(a)}. \end{cases}$$

Во введенных выше обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $n \geq 2$. *Тогда каковы бы ни были* $(n,2)$*-лучевая система точек* $A_{n,2}$ *такая, что* $L(A_{n,2}) = 1$, *и открытое множество* $D \subset \mathbb{C}$, *удовлетворяющее обобщенному условию неналегания относительно заданной* $A_{n,2}$, *имеет место неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(D,a_{k,p}) \leq 2^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\rho_k^{2/\alpha_k}}{1+\rho_k^{2/\alpha_k}}\right)^2 \prod_{(k,p)\neq(q,s)} \exp\{-g_D(a_{k,p},a_{q,s})\}, \quad (1)$$

знак равенства в котором достигается, когда точки $a_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$, *и множество* D *являются соответственно полюсами и объединением всех круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(w)\,dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n+1)^2}{(w^n-(R^0)^n)^2(1-(R^0)^n w^n)^2}\,dw^2.$$

Эта теорема обобщает результаты о неналегающих областях, установленные в работах [12, 13].

Доказательство следует схеме, предложенной в работах [14, 15], и использует идеи и методы работ [8 – 13].

Из условий, наложенных на множество D, следует, что функция $g_D(z,w)$ определена при всех $z, w \in D$ и конечна при всех $z \neq w$. Пусть $E_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus D$,

$$E(a_{k,p},\varepsilon) = \{w \in \mathbb{C} : |w - a_{k,p}| \leq \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0, \quad k = \overline{1,n}, \quad p = 1,2.$$

Для достаточно малых ε рассмотрим конденсатор

$$C(\varepsilon,D,A_{n,2}) = \{E_0, E_1(\varepsilon)\}, \qquad E_1(\varepsilon) = \bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_{p=1}^{2} E(a_{k,p},\varepsilon).$$

Емкость конденсатора $C(\varepsilon,D,A_{n,2})$

$$\operatorname{cap} C(\varepsilon,D,A_{n,2}) := \inf \iint \left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right) dx\,dy,$$

где точная нижняя грань берется по всем вещественным непрерывным липшицевым на $\overline{\mathbb{C}}$ функциям $\varphi = \varphi(z)$ таким, что $\varphi|_{E_0} = 0$, $\varphi|_{E_1(\varepsilon)} = 1$. Величина $|C(\varepsilon,D,A_{n,2})| := (\operatorname{cap} C(\varepsilon,D,A_{n,2}))^{-1}$ называется модулем конденсатора $C(\varepsilon,D,A_{n,2})$.

Рассмотрим разделяющее преобразование конденсатора $C(\varepsilon,D,A_{n,2})$ относительно системы функций $\{z_k(w)\}_{k=1}^{n}$ и системы областей $\{\Lambda_k\}_{k=1}^{n}$. Пусть $C_k(\varepsilon,D,A_{n,2}) = \{E_0^{(k)}, E_1^{(k)}(\varepsilon)\}$, где $E_0^{(k)}$ — объединение образа множества $E_0 \cap \overline{\Lambda}_k$ при отображении $z = z_k(w)$ с симметричным ему множеством относительно мнимой оси, а $E_1^{(k)}(\varepsilon)$ — объединение образа множества $E_1(\varepsilon) \cap \overline{\Lambda}_k$, $k = \overline{1,n}$, при том же отображении с симметричным ему множеством относительно мнимой оси. Тогда (см. [9, 10]) выполняется основное неравенство метода кусочно-разделяющего преобразования

$$\operatorname{cap} C(\varepsilon, D, A_{n,2}) \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} C_k(\varepsilon, D, A_{n,2}). \tag{2}$$

Из (2) получаем неравенство, играющее ключевую роль в дальнейших оценках:

$$\left|C(\varepsilon, D, A_{n,2})\right| \leq 2\left(\sum_{k=1}^{n}\left|C_k(\varepsilon, D, A_{n,2})\right|^{-1}\right)^{-1}. \tag{3}$$

Из теоремы 1 работы [9] следует асимптотическое равенство

$$\left|C(\varepsilon, D, A_{n,2})\right| = \frac{1}{4\pi n}\log\frac{1}{\varepsilon} + M(D, A_{n,2}) + o(1), \quad \varepsilon \to 0, \tag{4}$$

где $M(D, A_{n,2})$ — приведенный модуль множества D относительно системы точек $A_{n,2}$:

$$M(D, A_{n,2}) = \frac{1}{8\pi n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{2}\log r(D, a_{k,p}) + \sum_{(k,p)\neq(q,s)} g_D(a_{k,p}, a_{q,s})\right). \tag{5}$$

Объединение связной компоненты множества $z_k(\overline{\Lambda}_k \cap D)$, содержащей точку $\omega_{k,p}^{(1)} := z_k(a_{k,p})$, с ее симметричным отражением относительно мнимой оси, обозначим через $\Omega_{k,p}^{(1)}$. Аналогично, объединение связной компоненты множества $z_k(\overline{\Lambda}_k \cap D)$, содержащей точку $\omega_{k,p}^{(2)} := z_k(a_{k+1,p})$, с ее симметричным отражением относительно мнимой оси, обозначим через $\Omega_{k,p}^{(2)}$. Выполняются следующие равенства:

$$|z_k(w) - z_k(a_{s,p})| = \frac{1}{\alpha_k}\left|a_{s,p}\right|^{1/\alpha_k - 1}|w - a_{s,p}| + o(1), \quad w \to a_{s,p},$$
$$k = \overline{1,n}, \quad p = 1, 2, \quad s = k, k+1. \tag{6}$$

Нетрудно заметить, что

$$|\omega_{k,p}^{(1)} - \omega_{k,p}^{(2)}| = \left|a_{k,p}\right|^{1/\alpha_k} + \left|a_{k+1,p}\right|^{1/\alpha_k}, \quad k = \overline{1,n}, \quad p = 1, 2. \tag{7}$$

Применяя теорему 1 из работы [9] и используя (6), получаем соотношения

$$\left|C_k(\varepsilon, D, A_{n,2})\right| = \frac{1}{8\pi}\log\frac{1}{\varepsilon} + M_k(D, A_{n,2}) + o(1), \quad \varepsilon \to 0, \quad k = \overline{1,n}, \tag{8}$$

где

$$M_k(D, A_{n,2}) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{16}\sum_{p=1}^{2}\log\frac{r(\Omega_{k,p}^{(1)}, \omega_{k,p}^{(1)})}{\alpha_k^{-1}\left|a_{k,p}\right|^{1/\alpha_k - 1}}\frac{r(\Omega_{k,p}^{(2)}, \omega_{k,p}^{(2)})}{\alpha_k^{-1}\left|a_{k+1,p}\right|^{1/\alpha_k - 1}}. \tag{9}$$

В свою очередь, из (8) следуют равенства

$$\left|C_k(\varepsilon, D, A_{n,2})\right|^{-1} = \frac{8\pi}{\log\varepsilon^{-1}} + \left(\frac{8\pi}{\log\varepsilon^{-1}}\right)^2 M_k(D, A_{n,2}) +$$
$$+ o\left(\left(\frac{1}{\log\varepsilon^{-1}}\right)^2\right), \quad \varepsilon \to 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left| C_k(\varepsilon, D, A_{n,2}) \right|^{-1} = \frac{8\pi n}{\log \varepsilon^{-1}} + \left(\frac{8\pi}{\log \varepsilon^{-1}} \right)^2 \sum_{k=1}^{n} M_k(D, A_{n,2}) +$$

$$+ o\left(\left(\frac{1}{\log \varepsilon^{-1}} \right)^2 \right), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Отсюда получаем выражение, дающее асимптотику правой части неравенства (3):

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \left| C_k(\varepsilon, D, A_{n,2}) \right|^{-1} \right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{8\pi n} \log\frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{8\pi}{n \log \varepsilon^{-1}} \sum_{k=1}^{n} M_k(D, A_{n,2}) + o\left(\frac{1}{\log \varepsilon^{-1}} \right) \right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{8\pi n} \log\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} M_k(D, A_{n,2}) + o(1), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{10}$$

Из неравенства (3) с учетом (4) и (10) следует, что

$$\frac{1}{4\pi n} \log\frac{1}{\varepsilon} + M(D, A_{n,2}) + o(1) \le \frac{1}{4\pi n} \log\frac{1}{\varepsilon} + \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} M_k(D, A_{n,2}) + o(1).$$

Сокращая особенности в последнем неравенстве и устремляя ε к нулю, получаем неравенство для приведенных модулей

$$M(D, A_{n,2}) \le \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} M_k(D, A_{n,2}). \tag{11}$$

Выражения (5) и (11) приводят к неравенству

$$\frac{1}{8\pi n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{2} \log r(D, a_{k,p}) + \sum_{(k,p)\neq(q,s)} g_D(a_{k,p}, a_{q,s}) \right) \le$$

$$\le \frac{2}{n^2} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{p=1}^{2} \log \frac{r(\Omega_{k,p}^{(1)}, \omega_{k,p}^{(1)})}{\alpha_k^{-1} \left| a_{k,p} \right|^{1/\alpha_k - 1}} + \sum_{p=1}^{2} \log \frac{r(\Omega_{k,p}^{(2)}, \omega_{k,p}^{(2)})}{\alpha_k^{-1} \left| a_{k+1,p} \right|^{1/\alpha_k - 1}} \right).$$

Отсюда с учетом (7) получаем

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{2} r(D, a_{k,p}) \prod_{(k,p)\neq(q,s)} \exp g_D(a_{k,p}, a_{q,s}) \le$$

$$\le \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right)^2 \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{2} \frac{\left| a_{k,p} \right|}{\left(\left| a_{k,p} \right| \left| a_{k+1,p} \right| \right)^{1/2\alpha_k}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \left(\prod_{p=1}^{2} r(\Omega_{k,p}^{(1)}, \omega_{k,p}^{(1)}) \, r(\Omega_{k,p}^{(2)}, \omega_{k,p}^{(2)}) \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right)^2 \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{2} \frac{\left| a_{k,p} \right|^{1/\alpha_k} + \left| a_{k+1,p} \right|^{1/\alpha_k}}{\left(\left| a_{k,p} \right| \left| a_{k+1,p} \right| \right)^{1/2\alpha_k}} \left| a_{k,p} \right| \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{p=1}^{2}\frac{r(\Omega_{k,p}^{(1)},\omega_{k,p}^{(1)})\,r(\Omega_{k,p}^{(2)},\omega_{k,p}^{(2)})}{\left|\omega_{k,p}^{(1)}-\omega_{k,p}^{(2)}\right|^2}\right)^{1/2} =$$

$$= 2^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2 L(A_{n,2})\prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{p=1}^{2}\frac{r(\Omega_{k,p}^{(1)},\omega_{k,p}^{(1)})\,r(\Omega_{k,p}^{(2)},\omega_{k,p}^{(2)})}{\left|\omega_{k,p}^{(1)}-\omega_{k,p}^{(2)}\right|^2}\right)^{1/2}.$$

Учитывая условие теоремы $L(A_{n,2}) = 1$, приходим к неравенству

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(D,a_{k,p})\prod_{(k,p)\neq(q,s)}\exp g_D(a_{k,p},a_{q,s}) \leq$$

$$\leq 2^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2\prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{p=1}^{2}\frac{r(\Omega_{k,p}^{(1)},\omega_{k,p}^{(1)})\,r(\Omega_{k,p}^{(2)},\omega_{k,p}^{(2)})}{\left|\omega_{k,p}^{(1)}-\omega_{k,p}^{(2)}\right|^2}\right)^{1/2}.$$

Отметим, что области $\Omega_{k,1}^{(1)}$, $\Omega_{k,1}^{(2)}$, $\Omega_{k,2}^{(1)}$, $\Omega_{k,2}^{(2)}$ взаимно не пересекаются.

Пусть $\Delta_{k,p}^{(s)} := T_k(\Omega_{k,p}^{(s)})$, $\zeta_k(\omega_{k,p}^{(s)}) := (-1)^s i\rho_k^{-(-1)^p\alpha_k^{-1}}$, $0 < \rho_k < 1$, $k = \overline{1,n}$, p, $s = 1, 2$ (где $T_k(z)$, $k = \overline{1,n}$, определены во введении к работе).

Используя инвариантность функционала относительно конформных автоморфизмов плоскости комплексных чисел

$$J = \frac{r(\Omega_{k,1}^{(1)},\omega_{k,1}^{(1)})\,r(\Omega_{k,1}^{(2)},\omega_{k,1}^{(2)})\,r(\Omega_{k,2}^{(1)},\omega_{k,2}^{(1)})\,r(\Omega_{k,2}^{(2)},\omega_{k,2}^{(2)})}{\left|\omega_{k,1}^{(1)}-\omega_{k,1}^{(2)}\right|^2\left|\omega_{k,2}^{(1)}-\omega_{k,2}^{(2)}\right|^2},$$

приходим к выводу, что

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(D,a_{k,p})\prod_{(k,p)\neq(q,s)}\exp g_D(a_{k,p},a_{q,s}) \leq$$

$$\leq 2^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{r(\Delta_{k,1}^{(1)},-i\rho_k^{1/\alpha_k})\,r(\Delta_{k,1}^{(2)},i\rho_k^{1/\alpha_k})}{4\rho_k^{2/\alpha_k}}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{r(\Delta_{k,2}^{(1)},-i\rho_k^{-1/\alpha_k})\,r(\Delta_{k,2}^{(2)},i\rho_k^{-1/\alpha_k})}{4\rho_k^{-2/\alpha_k}}\right)^{1/2}. \qquad (12)$$

Для дальнейших оценок используем следующий результат.

Лемма. *При* $k = \overline{1,n}$ *выполняется неравенство*

$$\frac{r(E_{k,1}^{(1)},-i\rho_k^{1/\alpha_k})\,r(E_{k,1}^{(2)},i\rho_k^{1/\alpha_k})}{4\rho_k^{2/\alpha_k}}\,\frac{r(E_{k,2}^{(1)},-i\rho_k^{-1/\alpha_k})\,r(E_{k,2}^{(2)},i\rho_k^{-1/\alpha_k})}{4\rho_k^{-2/\alpha_k}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1-\rho_k^{2/\alpha_k}}{1+\rho_k^{2/\alpha_k}}\right)^4,$$

знак равенства в котором достигается тогда и только тогда, когда $E_{k,p}^{(s)}$, s, $p = 1, 2$, *при каждом* $k = \overline{1,n}$ *являются круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q_k(w)\,dw^2 = \frac{(1-w^2)^2}{(w^2+\rho_k^2)^2(1+\rho_k^2w^2)^2}\,dw^2.$$

В односвязном случае эта лемма получена в работе Е. Г. Емельянова [12], для произвольных многосвязных областей этот результат доказан в работе В. Н. Дубинина [9].

Учитывая лемму и неравенство (12), приходим к соотношению

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(D, a_{k,p}) \le$$

$$\le 2^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\rho_k^{2/\alpha_k}}{1+\rho_k^{2/\alpha_k}}\right)^2\prod_{(k,p)\ne(q,s)}\exp\left\{-g_D(a_{k,p}, a_{q,s})\right\}.$$

Утверждение о знаке равенства в неравенстве (1) проверяется непосредственно.

Теорема доказана.

Из теоремы непосредственно вытекают некоторые следствия.

***Следствие* 1.** *Пусть* $n \ge 3$, $n \in \mathbb{N}$, $\rho \in (0, 1)$. *Тогда для любой* $(n, 2)$-*лучевой системы точек* $A_{n,2} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$, *такой, что* $L(A_{n,2}) = 1$, $R^0(A_{n,2}) = \rho$, *и для любого открытого множества* D, $A_{n,2} \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющего обобщенному условию неналегания относительно заданной системы точек* $A_{n,2}$, *выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(D, a_{k,p}) \le 2^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2\left(\frac{1-\rho^n}{1+\rho^n}\right)^{2n}\prod_{(k,p)\ne(q,s)}\exp\left\{-g_D(a_{k,p}, a_{q,s})\right\}.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда точки $a_{k,p}$ *и множество* D *являются соответственно полюсами и объединением круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(w)\,dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n+1)^2}{(w^n-\rho^n)^2(1-\rho^n w^n)^2}\,dw^2.$$

***Следствие* 2.** *Пусть* $n \ge 3$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < \rho < R$. *Тогда для любой* $(n, 2)$-*лучевой системы точек* $A_{n,2} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$, *такой, что* $L(A_{n,2}) = R^{2n}$, $R^0((1/R)A_{n,2}) = \rho/R$, *и для любого открытого множества* D, $A_{n,2} \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющего обобщенному условию неналегания относительно системы точек* $A_{n,2}$, *выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(D, a_{k,p}) \le (2R)^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2\left(\frac{R^n-\rho^n}{R^n+\rho^n}\right)^{2n}\prod_{(k,p)\ne(q,s)}\exp\left\{-g_D(a_{k,p}, a_{q,s})\right\}.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда точки $a_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$, *и множество* D *являются соответственно полюсами и объединением круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(w)\,dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n+R^n)^2}{(w^n-\rho^n)^2(R^{2n}-\rho^n w^n)^2}\,dw^2.$$

Произвольной $(n, 2)$-лучевой системе точек $A_{n,2} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$, сопоставим „круговую” $(n, 2)$-лучевую систему $A_{n,2}(\lambda) = \{b_{k,p}(\lambda)\}$ по следующему правилу: $b_{k,p}(\lambda) = \dfrac{a_{k,p}}{|a_{k,p}|}\lambda_p$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$, где $\lambda_1 = [L_1(A_{n,2})]^{1/n}$, $\lambda_2 = R^2/\lambda_1$, $L(A_{n,2}) = R^{2n}$.

Аналогично, для n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ введем „круговую" систему $A_n(\lambda) = \{b_k(\lambda)\}_{k=1}^n$: $b_k(\lambda) = \dfrac{a_k}{|a_k|}\lambda$, $k = \overline{1,n}$, где $\lambda = L^{1/n}(A_n)$. Если $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \subset U_R$ и $\lambda = L^{1/n}(A_n) < R$, $R > 0$, то $A_n(\lambda) \subset U_R$. Для n-лучевых систем точек $A_n \subset U_R$, $L^{1/n}(A_n) < R$, положим $t_0(A_n) := t_0(\hat{A}_{n,2})$, где $\hat{A}_{n,2} = \{a_{k,p}\}$, $a_{k,1} := a_k$, $a_{k,2} := R^2/\bar{a}_k$, $k = \overline{1,n}$.

***Следствие* 3.** *Пусть* $n \ge 3$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < \lambda < R$. *Тогда для произвольной* $(n, 2)$*-лучевой системы точек* $A_{n,2} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$, *такой, что* $L(A_{n,2}) = R^{2n}$, $L_1(A_{n,2}) = \lambda^n$, $t_0(A_{n,2}) = t_0(A_{n,2}(\lambda))$, *и для любого открытого множества* D, $A_{n,2} \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющего обобщенному условию неналегания, выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(D, a_{k,p}) \le \left(\frac{4R}{n}\cdot\frac{R^n - \lambda^n}{R^n + \lambda^n}\right)^{2n} \prod_{(k,p)\ne(q,s)} \exp\{-g_D(a_{k,p}, a_{q,s})\}.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда точки $a_{k,p}$ *и множество* D *являются соответственно полюсами и объединением круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n + R^n)^2}{(w^n - \lambda^n)^2(R^{2n} - \lambda^n w^n)^2}dw^2.$$

***Следствие* 4.** *Пусть* $n \ge 3$, λ *и* R — *положительные действительные числа,* $\lambda < R$. *Тогда для любой* n*-лучевой системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *такой, что* $L(A_n) = \lambda^n$, $t_0(A_n) = t_0(A_n(\lambda))$, *и для любого открытого множества* D *такого, что* $A_n \subset D \subset U_R$, *удовлетворяющего обобщенному условию неналегания относительно системы точек* A_n, *выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(D, a_k) \le \left(\frac{4\lambda}{n}\right)^n \left[\frac{R^n - \lambda^n}{R^n + \lambda^n}\right]^n \prod_{k\ne p} \exp\{-g_D(a_k, a_p)\}.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда точки a_k *и множество* D *являются соответственно принадлежащими кругу* U_R *полюсами и объединением круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n + R^n)}{(w^n - \lambda^n)^2(R^{2n} - \lambda^n w^n)^2}dw^2.$$

Следствие 4 обобщает один результат В. Н. Дубинина из работы [11].

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159 – 245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.

4. *Лебедев Н. А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
5. *Тамразов П. М.* Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – **32**, № 5. – С. 1033 – 1043.
6. *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.
7. *Кузьмина Г. В.* Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы. – Л.: Наука, 1980. – 241 с.
8. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1 (295). – С. 3 – 76.
9. *Дубинин В. Н.* Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1997. – **237**. – С. 56 – 73.
10. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов в геометрической теории функций: Уч. пособие. – Владивосток: Изд. Дальневосточ. ун-та, 2003. – 116 с.
11. *Дубинин В. Н.* О произведении внутренних радиусов „частично неналегающих” областей // Вопросы метрической теории отображений и ее применение. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 24 – 31.
12. *Емельянов Е. Г.* О связи двух задач об экстремальном разбиении // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1987. – **160**. – С. 91 – 98.
13. *Бахтин А. К.* Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на двух окружностях // Доп. НАН України. – 2005. – № 7. – С. 12 – 16.
14. *Бахтин А. К.* Приведенные модули открытых множеств и экстремальные задачи со свободными полюсами // Там же. – 2006. – № 5. – С. 7 – 13.
15. *Бахтин А. К.* Неравенства для внутренних радиусов ненелегающих областей и открытых множеств // Там же. – № 10. – С. 7 – 13.
16. *Бахтин А. К., Вьюн В. Е.* Разделяющее преобразование и неравенства для открытых множеств // Там же. – 2007. – № 4. – С. 7 – 11.

Получено 21.06.2007