УДК 519.53 + 517.987

В. А. Романов (Кировоград. пед. ун-т)

СЛАБЫЕ БАЗИСЫ ВЕКТОРНЫХ МЕР

We solve a problem of the representation of measures with values in a Banach space as limits of weakly convergent sequences of vector measures for which a given nonnegative measure is a basis.

Розв'язано питання про зображення мір із значеннями в банаховому просторі як границь слабко збіжних послідовностей векторних мір, що мають своїм базисом дану невід'ємну міру.

1. Введение. Меру m назовем слабым базисом меры μ, если μ есть предел слабо сходящейся последовательности мер, имеющих m своим базисом. Такой обобщенный подход приводит к существованию мер, которые служат слабым базисом для всех других мер (и даже векторных) в данном полном сепарабельном метризуемом топологическом линейном пространстве. При классическом же подходе уже в гильбертовом пространстве никакая вероятностная (а потому и сигма-конечная) мера m не может служить базисом даже для семейства всех своих сдвигов, поскольку ее сдвиг на вектор, не принадлежащий образу некоторого оператора Гильберта – Шмидта, приводит к мере, взаимно сингулярной с m [1, с. 144]. Существование „универсального" слабого базиса может представлять интерес при исследовании дифференциальных уравнений для мер, когда становится возможным рассмотрение соответствующих уравнений для аппроксимирующих плотностей, т. е. для функций точки, а также при исследовании свойств мер в терминах аппроксимирующих плотностей.

2. Постановка задачи. Пусть X — полное сепарабельное метризуемое топологическое линейное пространство, Y — банахово пространство. Под Y-значной мерой в X понимаем сигма-аддитивную функцию множества конечной полной вариации, определенную на всех борелевских подмножествах пространства X и принимающую значения в Y. Напомним, что неотрицательная мера m называется базисом Y-значной меры μ, если μ представима как произведение интегрируемой по Бохнеру Y-значной функции на меру m.

Обозначим через $C_b(X)$ множество всех непрерывных на X ограниченных функций с числовыми значениями. Последовательность Y-значных мер μ_n называем слабо сходящейся к Y-значной мере μ, если для каждой функции f из $C_b(X)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f(x)\,d\mu_n(x) = \int_X f(x)\,d\mu(x). \tag{1}$$

Определение 1. *Неотрицательная мера m в пространстве X называется слабым базисом Y-значной меры μ в X, если существует слабо сходящаяся к μ последовательность Y-значных мер, имеющих m своим базисом.*

Цель данной работы состоит в том, чтобы дать описание всех таких неотрицательных мер m в пространстве X, что для каждой Y-значной меры в X мера m есть слабый базис. Затем результат о слабом базисе применяется к слабо сходящимся последовательностям дифференцируемых векторных мер. Основные понятия дифференцируемых векторных мер содержатся в [2] (гл. 4).

3. Формулировка результатов.

Теорема 1. *Пусть X — полное сепарабельное метризуемое топологическое линейное пространство, Y — банахово пространство. Для того чтобы неотрицательная мера m в пространстве X была слабым базисом всех Y-значных мер в X, необходимо и достаточно, чтобы ни на одном непустом открытом множестве она не принимала нулевого значения.*

Теорема 2. *Пусть* (x_k) *— произвольная последовательность с плотной линейной оболочкой* L *в полном сепарабельном метризуемом локально выпуклом пространстве* X. *Тогда каждая* Y*-значная мера* μ *в* X *есть предел слабо сходящейся последовательности бесконечно дифференцируемых по всем направлениям из* L Y*-значных мер, имеющих своим базисом одну и ту же неотрицательную меру* ν, *не зависящую от* μ.

4. Доказательства. ***Доказательство теоремы* 1.** Предположим, что для некоторого непустого открытого множества U $m(U) = 0$. Пусть f — функция из $C_b(X)$, принимающая значение 1 в некоторой точке a множества U и обращающаяся в нуль вне U, (μ_n) — последовательность Y-значных мер, имеющих m своим базисом, μ — дискретная Y-значная мера, сосредоточенная в точке a. Тогда левая часть формулы (1) равна нулю, а правая — нет. Отсюда следует *необходимость*.

Докажем *достаточность*. Пусть m — фиксированная неотрицательная мера в X с положительными значениями непустых открытых множеств, а μ — произвольная Y-значная мера конечной полной вариации. В полном сепарабельном метризуемом пространстве вариация $v(\mu)$ меры μ, как и любая другая конечная неотрицательная мера, должна быть мерой Радона [2, с. 19], а поэтому в X найдется последовательность непересекающихся компактов K_n, для которых

$$v(\mu)\left[X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n} K_j\right)\right] < \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Компакт K_1 покроем конечным числом дизъюнктных измеримых множеств $A_{1,i,n}$ диаметра меньше $\frac{1}{n}$, внутренности которых пересекаются с K_1. Пусть $T_{1,n}$ — объединение этих множеств.

Множество $K_2 \setminus T_{1,n}$ покроем конечным числом непересекающихся между собой и с $T_{1,n}$ измеримых множеств $A_{2,i,n}$ диаметра меньше $\frac{1}{n}$, внутренности которых пересекаются с K_2. Пусть $T_{2,n}$ — объединение этих множеств.

Продолжим этот процесс далее. На j-м шаге множество $K_j \setminus \left(\bigcup_{p=1}^{j-1} T_{p,n}\right)$ покроем конечным числом непересекающихся между собой и с $T_{p,n}$ (при $p < j$) измеримых множеств $A_{j,i,n}$ диаметра меньше $\frac{1}{n}$, внутренности которых пересекаются с K_j. Здесь индекс i может изменяться от 1 до некоторого натурального $N(j, n)$, зависящего от j и n. Пусть $T_{j,n}$ — объединение этих множеств. Заметим, что

$$\bigcup_{p=1}^{j} K_p \subset \bigcup_{p=1}^{j} T_{p,n}, \tag{3}$$

причем множества в правой части включения (3) дизъюнктны.

Процесс таких построений завершим для числа $j = n$ включительно. Обозначим

$$F_{n_0,n} = \bigcup_{j=1}^{n_0} T_{j,n} = \bigcup_{j=1}^{n_0} \bigcup_{i=1}^{N(j,n)} A_{j,i,n}, \tag{4}$$

где n_0 может быть произвольным натуральным числом, не превышающим n.

Поскольку каждое из множеств $A_{j,i,n}$ имеет непустую внутренность, мера m принимает на нем положительное значение. Пусть $m_{j,i,n}$ — вероятностная мера, получающаяся нормировкой произведения индикатора этого множества на меру m; $y_{j,i,n}$ — значение Y-значной меры μ на указанном множестве.

Рассмотрим последовательность Y-значных мер, задаваемых формулами

$$\mu_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N(j,n)} y_{j,i,n} \cdot m_{j,i,n}. \tag{5}$$

Ясно, что для каждой из μ_n мера m есть базис. Из построения μ_n также следует, что ее вариация не превышает вариацию μ.

Теперь зафиксируем произвольную функцию f из $C_b(X)$ и число $\varepsilon > 0$. Пусть $\mathrm{M} = \sup\{|f(x)|: x \in X\} \neq 0$.

Из условия (2) следует, что найдется такое натуральное n_0, что

$$v(\mu)\left[X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n_0} K_j\right)\right] < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Тогда из формул (3) – (5) следует, при $n > n_0$

$$v(\mu_n)\left(X \setminus F_{n_0,n}\right) \leq v(\mu)\left(X \setminus F_{n_0,n}\right) < \frac{\varepsilon}{M}. \tag{6}$$

Число n_0 далее считаем фиксированным. Рассмотрим модуль непрерывности функции f на множестве $\bigcup_{j=1}^{n_0} K_j$:

$$\omega_{n_0}(\delta) = \sup\left\{|f(z) - f(x)|: \rho(z,x) < \delta, z \in \bigcup_{j=1}^{n_0} K_j, x \in X\right\}.$$

Поскольку объединение конечного числа компактов снова есть компакт, то при $\delta \to 0$ этот модуль непрерывности имеет нулевой предел, а поэтому найдется такое $n_1 > n_0$, что при $n > n_1$

$$\omega_{n_0}\left(\frac{1}{n}\right) < \varepsilon. \tag{7}$$

В каждом из множеств $A_{j,i,n}$ найдется точка $z_{j,i,n}$, принадлежащая компакту K_j. Поскольку на указанном множестве меры μ_n и μ принимают одинаковые значения, то с учетом (7) при $n > n_1$ и при $j \leq n_0$

$$\left\| \int_{A_{j,i,n}} f(x) d(\mu_n - \mu)(x) \right\| = \left\| \int_{A_{j,i,n}} \left[f(x) - f(z_{j,i,n})\right] d(\mu_n - \mu)(x) \right\| \leq$$

$$\leq 2\varepsilon\, v(\mu)\left[A_{j,i,n}\right],$$

а поэтому с учетом (4) при $n > n_1$

$$\left\| \int\limits_{F_{n_0,n}} f(x)\,d(\mu_n - \mu)(x) \right\| \leq 2\varepsilon\, v(\mu)\left[F_{n_0,n}\right] \leq 2\varepsilon \operatorname{Var}\mu .$$

Отсюда и из (6) вытекает, что при $n > n_1$

$$\left\| \int\limits_X f(x)\,d(\mu_n - \mu)(x) \right\| \leq 2\varepsilon(1 + \operatorname{Var}\mu).$$

Следовательно, построенная последовательность Y-значных мер μ_n слабо сходится к μ.

Теорема доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Без уменьшения общности можно считать, что элементы x_k линейно независимы. Из результатов [3, с. 63 – 68] и [4] (предложение 4) следует существование такого включающего L линейного подпространства H пространства X и такого скалярного произведения на H, что H становится сепарабельным гильбертовым пространством с компактным каноническим вложением в X, а L — всюду плотным в H. Пусть m есть гауссова мера в H, образ квадратного корня из корреляционного оператора которой включает L. Тогда m дифференцируема, а тем более непрерывна по всем направлениям из L [5] (теорема 5.3.1). Но тогда L-непрерывны и абсолютно непрерывные относительно m меры [6] (теорема 1), в том числе меры $m_{j,i,n}$, построенные в ходе доказательства предыдущей теоремы. Следовательно, произведения этих неотрицательных мер на интегрируемые по Бохнеру Y-значные функции L-непрерывны в топологии сходимости по вариации [7] (предложение 2). Но тогда вариационно L-непрерывны и суммы конечного числа таких произведений, в том числе Y-значные меры μ_n, задаваемые формулами (5). Следовательно [8] (теорема 2), найдутся такие бесконечно дифференцируемые по всем направлениям из L Y-значные меры λ_n, для которых

$$\operatorname{Var}(\mu_n - \lambda_n) < \frac{1}{n}.$$

Но для каждой функции f из $C_b(X)$

$$\left\| \int\limits_X f(x)\,d(\lambda_n - \mu)(x) \right\| \leq \frac{1}{n}\sup_{x\in X}|f(x)| + \left\| \int\limits_X f(x)\,d(\mu_n - \mu)(x) \right\|.$$

Отсюда и из слабой сходимости μ_n к μ следует, что последовательность λ_n также слабо сходится к μ.

При этом из построенной в [8] конструкции следует, что значения векторных мер λ_n задаются формулами

$$\lambda_n(E) = \int\limits_H \mu_n(E + A(h))\,dm_n(h),$$

где $m_n(E) = m(nE)$, причем оператор A с ядерным квадратом можно выбрать зависящим от меры m, служащей общим базисом для векторных мер μ_n, а потому векторные меры λ_n имеют общим базисом меру ν, задаваемую формулой

$$\nu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_H m(E + A(h))\, dm_n(h).$$

Теорема доказана.

1. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1975. – 232 с.
2. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
3. *Го Х.* Гауссовские меры в банаховых пространствах. – М.: Мир, 1979. – 176 с.
4. *Богачев В. И.* Пренебрежимые множества в локально выпуклых пространствах // Мат. заметки. – 1984. – **36**, № 1. – С. 51 – 64.
5. *Авербух В. И., Смолянов О. Г., Фомин С. В.* Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. 1 Дифференцируемые меры // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1987. – **24**. – С. 133 – 174.
6. *Романов В. А.* Об H-непрерывных мерах в гильбертовом пространстве // Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех. – 1977. – **32**, № 1. – С. 81 – 85.
7. *Романов В. А.* Векторные меры различных классов гладкости и их пределы // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 4. – С. 512 – 516.
8. *Романов В. А.* Пределы аналитических векторных мер // Там же. – 1992. – **44**, № 8. – С. 1133 –1135.

Получено 19.09.2005