УДК 517.95

В. І. Лагно (Полтав. ун-т),
С. В. Спічак (Ін-т математики НАН України, Київ)

ГРУПОВА КЛАСИФІКАЦІЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ. I. ІНВАРІАНТНІСТЬ ВІДНОСНО АЛГЕБР ЛІ З НЕТРИВІАЛЬНИМ РОЗКЛАДОМ ЛЕВІ

The problem of group classification of quasilinear elliptic-type equations in the two-dimensional space is considered. The list of all equations of this sort is obtained, which admit the semisimple Lie algebras of symmetry operators and the Lie algebras of symmetry operators with nontrivial Levi decomposition.

Рассматривается задача групповой классификации квазилинейных уравнений эллиптического типа в двумерном пространстве. Получены перечни всех уравнений этого класса, допускающих полупростые алгебры Ли операторов симметрии и алгебр Ли операторов симметрии с нетривиальным разложением Леви.

1. Вступ. Предметом розгляду даної роботи є квазілінійні двовимірні рівняння еліптичного типу

$$\Delta u = F(x, y, u, u_x, u_y). \tag{1.1}$$

В (1.1) і далі $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ є двовимірним оператором Лапласа, $u = u(x, y)$, F — довільна гладка функція в деякій області простору $W = R^2 \times V = \langle x, y \rangle \times \langle u, u_x, u_y \rangle$, яка є нелінійною хоча б за однією зі змінних u, u_x, u_y.

Рівняння вигляду (1.1) належать до фундаментальних рівнянь математичної фізики, які знайшли широкі застосування в різноманітних областях сучасного природознавства. Зокрема, вони використовуються в теорії тепло- та масообміну, для опису усталених течій ідеальної рідини, в теорії горіння та у фізиці плазми (див., наприклад, [1 – 5]).

Не останню роль у формуванні правильного розуміння якісних особливостей досліджуваного процесу відіграють точні розв'язки (у замкненому вигляді) рівняння, яке моделює цей процес. Тому спостерігається стійкий інтерес саме до знаходження розв'язків у замкненому вигляді різних модельних рівнянь з частинними похідними. Зокрема, точні розв'язки рівнянь вигляду (1.1) з експоненціальними та тригонометричними нелінійностями було знайдено в [6 – 9], з логарифмічними нелінійностями — в [4, 5], з гіперболічними нелінійностями — в [9, 10] (див. також [4, 5]). Зрозуміло, що одним із критеріїв під час відбору рівняння в якості математичної моделі деякого реального процесу є вимога, щоб це рівняння було досить простим для того, щоб його можна було успішно проаналізувати і розв'язати. Це, зокрема, має місце тоді, коли модельне рівняння допускає нетривіальну групу інваріантності. У такому випадку для дослідження й інтегрування модельного рівняння можна ефективно використовувати метод симетрійної редукції [11 – 16].

Як правило, більшість рівнянь прикладної та теоретичної фізики, хімії і біології містять параметри або функції, що знаходяться експериментально й тому не є строго фіксованими. Тому для відбору рівнянь зі згаданими вище властивостями актуальною є задача групової класифікації диференціального рівняння, яка для рівняння (1.1) формулюється так: описати усі специфікації функції F у рівнянні (1.1), при яких воно матиме найвищі симетрійні властивості. Слід зазначити, що задачею групової класифікації диференціальних рівнянь займався ще Софус Лі. Її сучасну постановку здійснив у 1959 р. Л. В. Овсянніков у класичній статті [17], де ним було запропоновано метод (Лі – Овсяннікова) для її розв'язування і проведено повну групову класифікацію нелінійного рівняння теплопровідності. Ця стаття поклала початок численним циклам робіт з групової класифікації диференціальних рівнянь (досить повний огляд робіт, присвячених розв'язуванню задачі групової класифікації диференціальних рівнянь, станом на початок 90-х років минулого століття можна знайти у [18]).

У даній роботі ми проводимо групову класифікацію нелінійних рівнянь вигляду (1.1). При цьому для опису представників нееквівалентних класів рівнянь ми використовуємо метод, запропонований в [19, 20] (див. також [21]), який є модифікацією методу Лі – Овсяннікова і дозволяє значно розширити класи рівнянь, для яких повне розв'язання задачі групової класифікації стає конструктивним. Також зауважимо, що розгляду підлягають рівняння, які замінами змінних не зводяться до рівняння Лапласа або інших лінійних рівнянь еліптичного типу. Так, як показано далі, дану умову не задовольняють, наприклад, нелінійні рівняння (2.6) та (2.7).

2. Попередні результати групової класифікації. Згідно з відомим алгоритмом Лі – Овсяннікова [14], інфінітезимальні оператори, які генерують локальні групи інваріантності рівнянь вигляду (1.1), шукаємо у класі операторів

$$\mathrm{v} = \tau\partial_x + \xi\partial_y + \eta\partial_u,$$

де $\tau = \tau(x, y, u)$, $\xi = \xi(x, y, u)$, $\eta = \eta(x, y, u)$ — двічі неперервно диференційовні функції в деякій області простору $R^2 \times V = \langle x, y\rangle \times \langle u\rangle$.

Виконуючи відповідні обчислення, приходимо до такого результату.

Твердження 2.1. *Група інваріантності рівняння* (1.1) *генерується інфінітезимальним оператором*

$$\mathrm{v} = a(x, y)\partial_x + b(x, y)\partial_y + c(x, y, u)\partial_u, \tag{2.1}$$

де функції a, b, c, F *задовольняють систему рівнянь*

$$\begin{gathered} a_y + b_x = 0, \qquad a_x - b_y = 0, \\ c_{xx} + c_{yy} + 2u_x c_{xu} + 2u_y c_{yu} + (u_x^2 + u_y^2)c_{uu} + (c_u - 2a_x)F = \\ = aF_x + bF_y + cF_u + [c_x + u_x(c_u - a_x) - u_y b_x]F_{u_x} + \\ + [c_y + u_y(c_u - b_y) - u_x a_y]F_{u_y}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Неважко побачити, що перші два рівняння є умовами Коші – Рімана, тобто функції a та b є гармонічними. Також безпосередня перевірка показує, що для довільних значень функції F оператор (2.1) є нульовим.

Групову класифікацію рівняння (1.1) проводимо з точністю до еквівалентності, яку визначають перетворення з групи еквівалентності рівняння (1.1) (далі позначаємо її $\mathscr{E}$). Групу $\mathscr{E}$ утворюють ті з перетворень

$$\bar{x} = \alpha(x, y, u), \qquad \bar{y} = \beta(x, y, u), \qquad v = \gamma(x, y, u), \qquad \frac{D(\bar{x}, \bar{y}, v)}{D(x, y, u)} \neq 0,$$

які зберігають диференціальну структуру рівняння (1.1), тобто трансформують його в рівняння вигляду

$$v_{\bar{x}\bar{x}} + v_{\bar{y}\bar{y}} = \Phi(\bar{x}, \bar{y}, v, v_{\bar{x}}, v_{\bar{y}}).$$

Безпосередні обчислення показали, що має місце таке твердження.

Твердження 2.2. *Групу* $\mathscr{E}$ *рівняння* (1.1) *складають перетворення*

$$\bar{x} = \alpha(x, y), \qquad \bar{y} = \beta(x, y), \qquad v = \gamma(x, y, u), \tag{2.3}$$

де

$$\alpha_x = \varepsilon\beta_y, \quad \alpha_y = -\varepsilon\beta_x \quad (\varepsilon = \pm 1), \quad \alpha_x^2 + \alpha_y^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 \neq 0, \quad \gamma_u \neq 0.$$

Оскільки в загальному випадку не існують локальні групи перетворень, які б допускалися рівнянням вигляду (1.1), природно розпочати групову класифікацію з опису тих рівнянь, які мають найнижчі симетрійні властивості, тобто допускають однопараметричні групи перетворень (або, що те саме, є інваріантними відносно одновимірних алгебр Лі операторів симетрії).

Лема 2.1. *Існують такі перетворення з групи* $\mathscr{E}$, *які зводять оператор* (2.1) *до одного з таких двох операторів*:

$$v = \partial_x, \quad v = \partial_u. \tag{2.4}$$

Доведення. В результаті заміни змінних (2.3) оператор (2.1) трансформується в оператор

$$v = (\alpha_x a + \alpha_y b)\partial_{\bar{x}} + (\beta_x a + \beta_y b)\partial_{\bar{y}} + (\gamma_x a + \gamma_y b + \gamma_u c)\partial_v. \tag{2.5}$$

Нехай в операторі (2.1) $a^2 + b^2 \neq 0$. Тоді, поклавши в (2.3) функцію γ рівною ненульовому розв'язку рівняння

$$\gamma_u c + \gamma_x a + \gamma_y b = 0,$$

будемо вимагати, щоб в операторі (2.5) мали місце співвідношення

$$\alpha_x a + \alpha_y b = 1, \quad \beta_x a + \beta_y b = 0.$$

Врахувавши, що $\alpha_x = \varepsilon\beta_y$, $\alpha_y = -\varepsilon\beta_x$, перепишемо дану систему так:

$$-\varepsilon b\beta_x + \varepsilon a\beta_y = 1, \quad a\beta_x + b\beta_y = 0.$$

Оскільки $a^2 + b^2 \neq 0$, то ця система є розв'язною відносно β_x і β_y, а тому оператор (2.5) можна записати у вигляді $v = \partial_{\bar{x}}$.

Нехай $a = b = 0$, $c \neq 0$. У цьому випадку оператор (2.5) має вигляд $v = \gamma_u c\partial_v$, а тому, поклавши функцію γ рівною розв'язку рівняння $\gamma_u c = 1$, можемо подати його у вигляді $v = \partial_v$.

Далі безпосередня перевірка показала, що не існують перетворення з групи $\mathscr{E}$, які зводили б оператор ∂_x до оператора ∂_v або оператор ∂_u до оператора $\partial_{\bar{x}}$. Тому, повернувшись до початкових позначень змінних, переконуємося в справедливості леми.

З доведеної леми випливає таке твердження.

Теорема 2.1. *З точністю до еквівалентності існують два класи квазілінійних рівнянь вигляду* (1.1), *які допускають однопараметричні групи локальних перетворень. Представники цих класів рівнянь та відповідні одновимірні алгебри інваріантності є такими*:

$$\Delta u = F(y, u, u_x, u_y) : A_1^1 = \langle \partial_x \rangle,$$

$$\Delta u = F(x, y, u_x, u_y) : A_1^2 = \langle \partial_u \rangle.$$

Доведення. Якщо квазілінійне рівняння вигляду (1.1) допускає ненульову групу інваріантності,то вона генерується інфінітезимальним оператором вигляду (2.1). Згідно з лемою 2.1, з точністю до еквівалентності такі оператори вичерпуються операторами ∂_x та ∂_u. Розв'язуючи для кожного з цих операторів відповідні визначальні рівняння (2.2), переконуємося в справедливості теореми.

Зауважимо, що, як показує безпосередня перевірка, вказані одновимірні алгебри Лі A_1^1 та A_1^2 операторів симетрії для довільних значень F у відповідних рівняннях є максимальними алгебрами інваріантності цих рівнянь.

У подальшій груповій класифікації рівняння (1.1) ми користуємося таким відомим фактом з групового аналізу диференціальних рівнянь [14]: якщо диференціальне рівняння допускає деяку скінченновимірну алгебру Лі операторів симетрії, то ця алгебра інваріантності є або розв'язною алгеброю Лі, або алгеброю Лі з нетривіальним розкладом Леві.

З опису рівнянь, які допускають алгебри Лі операторів симетрії з нетривіальним розкладом Леві, ми і продовжуємо групову класифікацію.

Але спочатку розглянемо два рівняння вигляду (1.1):

$$\Delta u = f(u)(u_x^2 + u_y^2), \quad f \neq 0, \tag{2.6}$$

$$\Delta u = \lambda e^{\gamma u}, \quad \lambda, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot \gamma \neq 0. \tag{2.7}$$

Безпосереднє використання алгоритму Лі – Овсяннікова показує, що ці рівняння інваріантні відносно нескінченнопараметричних груп локальних перетворень, які генеруються операторами вигляду (2.1). При цьому у випадку рівняння (2.6)

$$a_x = b_y, \quad a_y = -b_x, \quad c = \beta(x, y)\Phi(u) + p\Phi(u)\int^u \Phi^{-1}(\xi)d\xi,$$

$$\Phi(u) = \exp\left(\int^u f(\eta)d\eta\right), \quad \beta_{xx} + \beta_{yy} = 0, \quad p \in \mathbb{R},$$

а у випадку рівняння (2.7)

$$a_x = b_y = -\frac{1}{2}\gamma\beta, \quad a_y = -b_x, \quad \beta = \beta(x, y), \quad \beta_{xx} + \beta_{yy} = 0, \quad c = \beta.$$

Наявність таких високих симетрійних властивостей у цих рівнянь дозволяє зробити припущення, що існують перетворення, які зводять їх до лінійних рівнянь. Дійсно, рівняння (2.6) заміною

$$v = \int^u \Phi^{-1}(\xi)d\xi$$

зводиться до двовимірного рівняння Лапласа. Рівняння (2.7) зв'язане з рівнянням Лапласа перетворенням Беклунда (див., наприклад, [9]). Тому, згідно з постановкою задачі, ми у подальшому всі отримані рівняння, які еквівалентні рівнянням (2.6) та (2.7), із розгляду вилучаємо.

3. Інваріантність рівняння (1.1) відносно алгебр Лі операторів симетрії з нетривіальним розкладом Леві. В теорії абстрактних алгебр Лі відомо [22], що будь-яка алгебра Лі з нетривіальним розкладом Леві містить як підалгебру деяку просту (напівпросту) алгебру Лі. Тому насамперед опишемо рівняння, які інваріантні відносно простих (напівпростих) алгебр Лі операторів симетрії.

3.1. Інваріантність відносно напівпростих алгебр Лі операторів симетрії. Опис квазілінійних рівнянь вигляду (1.1), які допускають напівпрості алгебри Лі операторів симетрії, розпочинаємо з класифікації тих рівнянь, алгебри інваріантності яких ізоморфні найнижчим простим класичним алгебрам Лі: $so(3)$ та $sl(2, \mathbb{R})$.

Теорема 3.1. *З точністю до еквівалентності існують два класи квазілінійних рівнянь вигляду* (1.1), *які допускають алгебри Лі операторів симетрії, ізоморфні алгебрі* $so(3)$. *Представники цих класів рівнянь та відповідні алгебри інваріантності є такими*:

I. $\Delta u = \mathrm{ch}^{-2} y\tilde{F}(u, \omega), \quad \omega = (u_x^2 + u_y^2)\mathrm{ch}^2 y$:

$$so^1(3) = \langle \partial_x,\ \operatorname{sh} y \cos x \partial_x - \operatorname{ch} y \sin x \partial_y,\ -\operatorname{sh} y \sin x \partial_x - \operatorname{ch} y \cos x \partial_y \rangle;$$

II. $\Delta u = \operatorname{ch}^{-2} y \tilde{F}(\xi \operatorname{ch} y, \eta \operatorname{ch} y)$,

$$\xi = (u_x - \operatorname{th} y)\sin u + u_y \cos u, \qquad \eta = (u_x - \operatorname{th} y)\cos u - u_y \sin u:$$

$$so^2(3) = \langle \partial_x,\ \operatorname{sh} y \cos x \partial_x - \operatorname{ch} y \sin x \partial_y + \operatorname{ch} y \cos x \partial_u,$$
$$-\operatorname{sh} y \sin x \partial_x - \operatorname{ch} y \cos x \partial_y - \operatorname{ch} y \sin x \partial_u \rangle.$$

Доведення. Алгебра Лі $so(3) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ визначається такими комутаційними співвідношеннями [22]:

$$[e_1, e_2] = e_3, \qquad [e_2, e_3] = e_1, \qquad [e_3, e_1] = e_2. \tag{3.1}$$

Насамперед з точністю до еквівалентності, яку визначають перетворення (2.3) з групи $\mathscr{E}$, проведемо опис реалізацій алгебри $so(3)$ в класі операторів (2.1). Згідно з лемою 2.1, один з операторів (наприклад, e_1) ми можемо відразу покласти рівним ∂_x або ∂_u.

Нехай $e_1 = \partial_x$, а оператор e_2 має вигляд (2.1). Тоді, перевіряючи виконання комутаційних співвідношень (3.1), отримуємо

$$e_3 = a_x \partial_x + b_x \partial_y + c_x \partial_u,$$

де функції a, b, c задовольняють таку систему диференціальних рівнянь:

A. $a_{xx} + a = 0, \qquad b_{xx} + b = 0,$

$$a a_{xx} + b a_{xy} - a_x^2 - b_x a_y = 1, \qquad a b_{xx} + b b_{xy} - a_x b_x - b_x b_y = 0; \tag{3.2}$$

B. $c_{xx} + c = 0, \qquad a c_{xx} + b c_{xy} + c c_{xu} - a_x c_x - b_x c_y - c_x c_u = 0.$

Доповнивши групу A рівнянь (3.2) першими двома рівняннями системи (2.2) та скориставшись замінами змінних з групи $\mathscr{E}$ вигляду

$$\bar{x} = x + k_1, \quad \bar{y} = \varepsilon y + k_2, \quad v = \gamma(y, u), \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \gamma_u \neq 0, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

які залишають вигляд оператора $e_1 = \partial_x$ незмінним, отримаємо розв'язок групи A рівнянь (3.2):

$$a = \operatorname{sh} y \cos x, \qquad b = -\operatorname{ch} y \sin x.$$

Група B рівнянь (3.2) має очевидний тривіальний розв'язок $c = 0$. Вимога $c \neq 0$ з урахуванням отриманих значень a, b та замін змінних (3.3) привела до ще одного розв'язку

$$c = \operatorname{ch} y \cos x.$$

Отже, випадок $e_1 = \partial_x$ приводить до таких двох нееквівалентних реалізацій алгебри $so(3)$:

$$so^1(3) = \langle \partial_x,\ \operatorname{sh} y \cos x \partial_x - \operatorname{ch} y \sin x \partial_y,\ -\operatorname{sh} y \sin x \partial_x - \operatorname{ch} y \cos x \partial_y \rangle,$$

$$so^2(3) = \langle \partial_x,\ \operatorname{sh} y \cos x \partial_x - \operatorname{ch} y \sin x \partial_y + \operatorname{ch} y \cos x \partial_u,$$
$$-\operatorname{sh} y \sin x \partial_x - \operatorname{ch} y \cos x \partial_y - \operatorname{ch} y \sin x \partial_u \rangle.$$

Нехай тепер $e_1 = \partial_u$, а e_2 має вигляд (2.1). Тоді з виконання комутаційних співвідношень (3.1) випливає, що $a = b = 0$, а функція c повинна задовольняти рівняння $c^2 + c_u^2 = -1$, яке в дійсній області розв'язків не має.

Отже, з точністю до еквівалентності в класі операторів (2.1) існують дві нееквівалентні реалізації алгебри $so(3)$. Перевіримо, чи можуть бути отримані реалізації алгебрами інваріантності квазілінійних рівнянь вигляду (1.1).

У випадку реалізації $so^1(3)$ з третього рівняння (2.2) випливає така система рівнянь для визначення вигляду функції $F = F(y, u, u_x, u_y)$:

$$u_y F_{u_x} - u_x F_{u_y} = 0,$$
$$(2F - u_x F_{u_x} - u_y F_{u_y}) \operatorname{sh} y + \operatorname{ch} y F_y = 0.$$

Вона легко інтегрується, і її загальний розв'язок має вигляд

$$F = \operatorname{ch}^{-2} y \tilde{F}(u, \omega), \qquad \omega = (u_x^2 + u_y^2) \operatorname{ch}^2 y.$$

За умови, що функція $\tilde{F}$ є нелінійною хоча б за однією із змінних u або ω, отримане значення функції F задовольняє умови сформульованої задачі.

Аналогічно, у випадку реалізації $so^2(3)$ отримуємо, що у відповідному інваріантному рівнянні

$$F = \operatorname{ch}^{-2} y \tilde{F}(\xi \operatorname{ch} y, \eta \operatorname{ch} y),$$
$$\xi = (u_x - \operatorname{th} y) \sin u + u_y \cos u, \qquad \eta = (u_x - \operatorname{th} y) \cos u - u_y \sin u,$$

і за умови нелінійності функції $\tilde{F}$ хоча б за однією із змінних υ або ω теж виконуються умови сформульованої задачі.

Подальша безпосередня перевірка показала, що для довільних значень функцій $\tilde{F}$ в отриманих рівняннях відповідні реалізації алгебри $so(3)$ є максимальними алгебрами інваріантності цих рівнянь.

Теорему доведено.

Теорема 3.2. *З точністю до еквівалентності існують два класи квазілінійних рівнянь вигляду* (1.1), *які допускають алгебри Лі операторів симетрії, ізоморфні алгебрі* $sl(2, \mathbb{R})$. *Представники цих класів рівнянь та відповідні алгебри інваріантності є такими*:

I. $\Delta u = y^{-2} \tilde{F}(u, \omega), \quad \omega = y^2(u_x^2 + u_y^2)$:

$$sl^1(2, \mathbb{R}) = \langle 2x\partial_x + 2y\partial_y, -(x^2 - y^2)\partial_x - 2xy\partial_y, \partial_x \rangle;$$

II. $\Delta u = y^{-2} \tilde{F}(\upsilon, \omega)$,

$$\upsilon = (1 - 2yu_x) \cos 2u + 2yu_y \sin 2u, \qquad \omega = 2yu_y \cos 2u - (1 - 2yu_x) \sin 2u:$$

$$sl^2(2, \mathbb{R}) = \langle 2x\partial_x + 2y\partial_y, -(x^2 - y^2)\partial_x - 2xy\partial_y + y\partial_u, \partial_x \rangle.$$

Доведення теореми 3.2 проводится аналогічно доведенню теореми 3.1, тому ми його не наводимо. Зауважимо лише, що алгебра Лі $sl(2, \mathbb{R}) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ визначається комутаційними співвідношеннями

$$[e_1, e_2] = 2e_2, \qquad [e_1, e_3] = -2e_3, \qquad [e_2, e_3] = e_1. \tag{3.4}$$

Згідно з лемою 2.1, один з операторів (тут e_3) ми відразу покладаємо рівним ∂_x або ∂_u.

За відомою теоремою Картана [22] будь-яку напівпросту дійсну алгебру Лі можна розкласти у пряму суму попарно ортогональних простих алгебр Лі і цей розклад є єдиним (з точністю до ізоморфізму). Також відомо (див., наприклад, [22]), що в теорії абстрактних алгебр Лі над полем $\mathbb{R}$ розрізняють чотири типи класичних простих алгебр Лі:

1) тип A_{n-1}, $n > 1$, містить чотири дійсні форми алгебри $sl(n, C)$: $su(n)$, $sl(n, \mathbb{R})$, $su(p, q)$, $p + q = n$, $p \geq q$, $su^*(2n)$;

2) тип D_n, $n > 1$, містить три дійсні форми алгебри $so(2n, C)$: $so(2n)$, $so(p, q)$, $p + q = 2n$, $p \geq q$, $so^*(2n)$;

3) тип B_n, $n > 1$, містить дві дійсні форми алгебри $so(2n + 1, C)$: $so(2n + 1)$, $so(p, q)$, $p + q = 2n + 1$, $p > q$;

4) тип C_n, $n > 1$, містить три дійсні форми алгебри $sp(n, C)$: $sp(n)$, $sp(n, \mathbb{R})$, $sp(p, q)$, $p + q = n$, $p \geq q$.

Тому наступну розмірність 6 мають чотири напівпрості алгебри Лі: $so(4)$, $so(3, 1)$, $so^*(4)$ та $so(2, 2)$, при цьому $so(4) \sim so(3) \oplus so(3)$, $so^*(4) \sim so(3) \oplus sl(2, \mathbb{R})$, $so(2, 2) \sim sl(2, \mathbb{R}) \oplus sl(2, \mathbb{R})$, а $so(3, 1)$ містить як підалгебри алгебри Лі $so(3)$ та $so(2, 1)$ [22]. Це дає можливість для опису рівнянь, алгебри інваріантності яких ізоморфні цим алгебрам Лі, використовувати теореми 3.1 та 3.2.

Нехай $so(4) = \langle e_i \,|\, i = 1, 2, 3 \rangle \oplus \langle \bar{e}_i \,|\, i = 1, 2, 3 \rangle$. Тоді, згідно з теоремою 3.1, оператори e_i, $i = 1, 2, 3$, складають базис реалізацій $so^1(3)$ або $so^2(3)$. Безпосередні обчислення показують, що в такому випадку оператори $\bar{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, належать до класу операторів $c(u)\partial_u$, а як було встановлено при доведенні теореми 3.1, в цьому класі операторів не існують реалізації алгебри $so(3)$. Отже, не існують і нелінійні рівняння вигляду (1.1), алгебри інваріантності яких ізоморфні алгебрі $so(4)$.

Аналогічний розгляд реалізацій алгебри $so^*(4)$ показав, що у цьому випадку повинні існувати в класі операторів $c(u)\partial_u$ реалізації алгебри $sl(2, \mathbb{R})$, що суперечить теоремі 3.2.

Досліджуючи наявність $SO(3, 1)$-інваріантних рівнянь вигляду (1.1), скористаємося розкладом Картана: $so(3, 1) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \dotplus \langle N_1, N_2, N_3 \rangle$, де $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle \doteq so(3)$, $[e_i, N_j] = \varepsilon_{ijl} N_l$, $[N_i, N_j] = -\varepsilon_{ijl} e_l$, $i, j, l = 1, 2, 3$; ε_{ijl}— антисиметричний тензор третього рангу, $\varepsilon_{123} = 1$. Якщо оператори e_i, $i = 1, 2, 3$, складають базис реалізації $so^1(3)$, то, провівши хоча й громіздкі, але стандартні обчислення, переконуємося, що з точністю до еквівалентності можна покласти

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \varepsilon_1 \partial_y + \varepsilon_1 \operatorname{th} y \partial_u, \\
N_2 &= \varepsilon_1 (\operatorname{ch} y \sin x \partial_x + \operatorname{sh} y \cos x \partial_y) - \varepsilon_2 \operatorname{ch}^{-1} y \cos x \partial_u, \\
N_3 &= \varepsilon_1 (\operatorname{ch} y \cos x \partial_x - \operatorname{sh} y \sin x \partial_y) + \varepsilon_2 \operatorname{ch}^{-1} y \sin x \partial_u,
\end{aligned}
$$

де $\varepsilon_1 \neq \pm 1$, а $\varepsilon_2 = 0$ або $\varepsilon_2 = 1$.

Якщо $\varepsilon_2 = 0$, то інваріантне відносно отриманої реалізації алгебри $o(3, 1)$ рівняння має вигляд (2.6). Якщо $\varepsilon_2 = 1$, то заміна змінних з групи $\mathcal{E}$

$$
\bar{x} = x, \quad \bar{y} = \varepsilon_1 y, \quad v = u - \varepsilon_1 \ln \operatorname{ch} y
$$

дозволяє замість отриманої реалізації алгебри $so(3, 1)$ взяти таку (в початкових позначеннях змінних):

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \partial_x, \quad N_1 = \partial_y, \\
e_2 &= \varepsilon_1 (\operatorname{sh} y \cos x \partial_x - \operatorname{ch} y \sin x \partial_y) + \operatorname{sh} y \sin x \partial_u,
\end{aligned}
$$

$$e_3 = -\varepsilon_1(\operatorname{sh} y \sin x\partial_x + \operatorname{ch} y \cos x\partial_y) + \operatorname{sh} y \cos x\partial_u,$$
$$N_2 = \varepsilon_1(\operatorname{ch} y \sin x\partial_x + \operatorname{sh} y \cos x\partial_y) - \operatorname{ch} y \cos x\partial_u,$$
$$N_3 = \varepsilon_1(\operatorname{sh} y \cos x\partial_x - \operatorname{sh} y \sin x\partial_y) + \operatorname{ch} y \sin x.$$

Відповідне їй інваріантне рівняння

$$\Delta u = \lambda e^{2\varepsilon_1 u}, \quad \lambda \in R, \quad \lambda \neq 0,$$

є частинним випадком рівняння (2.7).

Якщо ж оператори e_i, $i = 1, 2, 3$, складають базис реалізації $so^2(3)$, то її розширення приводить до такої реалізації алгебри $so(3, 1)$:

$$e_1 = \partial_x,$$
$$e_2 = \operatorname{sh} y \cos x\partial_x - \operatorname{ch} y \sin x\partial_y + \operatorname{ch} y \cos x\partial_u,$$
$$e_3 = -\operatorname{sh} y \sin x\partial_x - \operatorname{ch} y \cos x\partial_y - \operatorname{ch} y \sin x\partial_u,$$
$$N_1 = \varepsilon\partial_y,$$
$$N_2 = \varepsilon[\operatorname{ch} y \sin x\partial_x + \operatorname{sh} y \cos x\partial_y + \operatorname{sh} y \sin x\partial_u],$$
$$N_2 = \varepsilon[\operatorname{ch} y \cos x\partial_x - \operatorname{sh} y \sin x\partial_y + \operatorname{sh} y \cos x\partial_u], \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Але безпосередня перевірка показує, що ця реалізація не може бути алгеброю інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (1.1). Отже, в рамках сформульованої задачі не існують $SO(3, 1)$-інваріантні рівняння вигляду (1.1).

Наступну після 6 розмірність 8 мають такі три алгебри Лі: $sl(3, \mathbb{R})$, $su(3)$, $su(2, 1)$. Провівши для кожної з них аналогічні дослідження, переконуємося, що в рамках сформульованої задачі не існують й $sl(3, \mathbb{R})$-, $su(3)$- та $su(2, 1)$-інваріантні рівняння вигляду (1.1).

Подальші прості міркування показують, що має місце таке твердження.

Теорема 3.3. *В рамках сформульованої задачі отриманими в теоремах* 3.1 *і* 3.2 $SO(3)$*- та* $SL(2, \mathbb{R})$*-інваріантними рівняннями вичерпуються рівняння вигляду* (1.1), *які допускають напівпрості групи локальних перетворень.*

Доведення. Оскільки $su^*(4) \sim so(5, 1)$, а алгебра $so(5, 1)$ містить як підалгебру алгебру $so(4)$, то в класі операторів (2.1) не мають реалізацій, відмінних від отриманих в теоремах 3.1 і 3.2, алгебри типів A_n та D_n, $n > 1$.

Не матимуть інших реалізацій і алгебри типів B_n та C_n, $n > 1$. Справді, вже для $n = 2$ алгебри типу B_n містять як підалгебри алгебри $so(4)$ та $so(3, 1)$. Також мають місце такі співвідношення: $sp(2, \mathbb{R}) \sim so(3, 2)$ (підалгеброю $so(3, 2)$ є $so(3, 1)$), $sp(1, 1) \sim so(4, 1)$ (підалгеброю $so(4, 1)$ є $so(4)$), $sp(2) \sim so(5)$ (підалгеброю $so(5)$ є $so(4)$).

Залишається розглянути випадки виняткових напівпростих дійсних алгебр Лі, які належать до одного з таких п'яти типів [22]: G_2, F_4, E_6, E_7, E_8. Оскільки їх розгляд проводиться аналогічно, детально розглянемо лише перший тип цих алгебр, розмірність яких є найнижчою і дорівнює 14. Тип G_2 містить одну компактну дійсну форму g_2 та одну некомпактну форму g_2'. Оскільки $g_2 \cap g_2' \sim su(2) \oplus su(2) \sim so(4)$, а алгебра $so(4)$ не має реалізацій в заданому класі операторів, то в цьому класі операторів не матимуть реалізацій і алгебри g_2 та g_2'.

Теорему доведено.

***3.2.* Інваріантність відносно алгебр Лі операторів симетрії з нетривіальним розкладом Леві.** Оскільки, як показано в теоремі 3.3, отриманими в теоремах 3.1 і 3.2 рівняннями вичерпуються ті, що допускають напівпрості алгебри Лі операторів симетрії, то для опису рівнянь, алгебри інваріантності яких мають нетривіальний розклад Леві, потрібно дослідити можливості розширення симетрійних властивостей цих рівнянь.

У подальшому будемо використовувати відому класифікацію неізоморфних розв'язних алгебр Лі $A_{k,i} = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ [23, 24] над полем $\mathbb{R}$, згідно з якою для значень $k = 2, 3, 4$ мають місце такі співвідношення:

двовимірні алгебри $A_{2,i} = \langle e_1, e_2 \rangle$:

$$A_{2,1} : [e_1, e_2] = 0,$$

$$A_{2,2} : [e_1, e_2] = e_2;$$

тривимірні алгебри $A_{3,i} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$:

$$A_{3,1} : [e_j, e_l] = 0, \quad j, \ l = 1, 2, 3,$$

$$A_{3,2} : [e_1, e_2] = e_2, \quad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0,$$

$$A_{3,3} : [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_2] = [e_1, e_3] = 0,$$

$$A_{3,4} : [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_1 + e_2, \quad [e_1, e_2] = 0,$$

$$A_{3,5} : [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_2, \quad [e_1, e_2] = 0,$$

$$A_{3,6} : [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = -e_2, \quad [e_1, e_2] = 0,$$

$$A_{3,7} : [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = q e_2, \quad 0 < |q| < 1, \quad [e_1, e_2] = 0,$$

$$A_{3,8} : [e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_2] = 0,$$

$$A_{3,9} : [e_1, e_3] = q e_1 - e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1 + q e_2, \quad q > 0, \quad [e_1, e_2] = 0;$$

чотиривимірні алгебри $A_{4,i} = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$:

10 розкладних розв'язних алгебр Лі:

$$A_{2,2} \oplus A_{2,2} = 2A_{2,2}, \quad A_{3,i} \oplus A_1, \quad i = 1, 2, \dots, 9;$$

10 нерозкладних розв'язних алгебр Лі (наведено лише ненульові комутаційні співвідношення):

$$A_{4,1} : [e_2, e_4] = e_1, \quad [e_3, e_4] = e_2,$$

$$A_{4,2} : [e_1, e_4] = q e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = e_2 + e_3, \quad q \neq 0,$$

$$A_{4,3} : [e_1, e_4] = e_1, \quad [e_3, e_4] = e_2,$$

$$A_{4,4} : [e_1, e_4] = e_1, \quad [e_2, e_4] = e_1 + e_2, \quad [e_3, e_4] = e_2 + e_3,$$

$$A_{4,5} : [e_1, e_4] = e_1, \quad [e_2, e_4] = q e_2, \quad [e_3, e_4] = p e_3, \quad -1 \leq p \leq q \leq 1, \ pq \neq 0,$$

$$A_{4,6} : [e_1, e_4] = q e_1, \quad [e_2, e_4] = p e_2 - e_3, \quad [e_3, e_4] = e_2 + p e_3, \quad q \neq 0, \ p \geq 0,$$

$$A_{4,7} : [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = 2e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = e_2 + e_3,$$

$$A_{4,8} : [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = (1+q) e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = q e_3, \quad |q| \leq 1,$$

$$A_{4,9} : [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = 2q e_1, \quad [e_2, e_4] = q e_2 - e_3, \quad [e_3, e_4] = e_2 + q e_3, \quad q \geq 0,$$

$$A_{4,10} : [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_2, \quad [e_1, e_4] = -e_2, \quad [e_2, e_4] = e_1.$$

Алгебри Лі, які мають нетривіальний розклад Леві, можна умовно розбити на два такі класи:

1) алгебри, які є прямою сумою напівпростої S та розв'язної N алгебр Лі (розкладні алгебри);

2) алгебри, які не розкладаються в пряму суму напівпростої та розв'язної алгебр Лі (нерозкладні алгебри).

3.2.1. Інваріантність відносно розкладних алгебр. Дослідимо існування рівнянь вигляду (1.1), алгебри інваріантності яких мають структуру $S \oplus N$, тобто задовольняють співвідношення

$$[S, S] \subset S, \quad [N, N] \subset N, \quad [S, N] = 0. \tag{3.5}$$

Можливі реалізації напівпростих алгебр S (фактора Леві) знайдено в теоремах 3.1 і 3.2. Тому з огляду на умову (3.5) залишається описати в класі операторів (2.1) всеможливі реалізації розв'язних алгебр N, які б задовольняли умови сформульованої задачі.

Оскільки випадки всіх реалізацій алгебри S вивчаються аналогічно, розглянемо детально випадок, коли S збігається з реалізацією $so^1(3)$. Перевірка третьої умови (3.5) показує, що оператори, які можуть складати базис алгебр N, належать до класу операторів

$$\mathrm{v} = c(u)\partial_u, \quad c \neq 0. \tag{3.6}$$

Але тоді, використовуючи перетворення

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y, \quad v = U(u), \quad U = \int^u c^{-1}(\xi) d\xi,$$

які належать до групи $\mathscr{E}$ і зберігають вигляд базисних операторів реалізації $so^1(3)$ незмінним, бачимо, що оператор (3.6) є еквівалентним оператору (в початкових позначеннях змінних)

$$\tilde{\mathrm{v}} = \partial_u.$$

Рівняння, інваріантне відносно алгебри $so^1(3) \oplus \langle \partial_u \rangle$, як показує безпосередня перевірка, має вигляд

$$\Delta u = \mathrm{ch}^{-2} y \tilde{F}(\omega), \quad \omega = (u_x^2 + u_y^2)\mathrm{ch}^2 y \tag{3.7}$$

і містить довільну функцію вже однієї змінної. Тому для подальшого дослідження рівняння (3.7) використовуємо стандартний метод Лі – Овсяннікова.

Підстановка правої частини рівняння (3.7) у визначальні рівняння (2.2) приводить до рівностей

$$\begin{gathered} a_y + b_x = 0, \quad a_x - b_y = 0, \quad c_{xu} = c_x \tilde{F}_\omega, \quad c_{yu} = c_y \tilde{F}_\omega, \\ (c_{xx} + c_{yy})\mathrm{ch}^2 y + \omega c_{uu} + [c_u - 2a_x + 2b\,\mathrm{th}\,y]\tilde{F} = 2\omega[b\,\mathrm{th}\,y + c_u - a_x]\tilde{F}_\omega. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Із (3.8), зокрема, випливає, що у випадку довільних значень функції $\tilde{F}$ алгебра $so^1(3) \oplus \langle \partial_u \rangle$ є максимальною алгеброю інваріантності рівняння (3.7). Також із (3.8) видно, що можливі розширення симетрії рівняння (3.7) можуть мати місце, коли функція $\tilde{F}$ задовольняє звичайне диференціальне рівняння першого порядку:

$$\lambda_1 \omega \tilde{F}_\omega = \lambda_2 \tilde{F} + \lambda_3 \omega, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \quad |\lambda_1| + |\lambda_2| \neq 0.$$

Подальший аналіз можливих значень функції $\tilde{F}$ ($\tilde{F} \neq 0$) показав таке.

Якщо $\tilde{F} = \lambda\omega + \beta$, $\lambda \neq 0$, $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, то відповідне рівняння вигляду (1.1)

$$\Delta u = \lambda(u_x^2 + u_y^2) + \beta \operatorname{ch}^{-2} y$$

заміною $v = \pm e^{-\lambda u}$, $v = v(x, y)$, зводиться до лінійного рівняння

$$\Delta v = -\lambda\beta v \operatorname{ch}^{-2} y,$$

і згідно з умовами сформульованої задачі з подальшого розгляду вилучається.

Тому з точністю до еквівалентності в рамках сформульованої задачі існує єдина можливість розширення симетрійних властивостей рівняння (3.7), якщо

$$\tilde{F} = \lambda |\omega|^{1/2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0.$$

При цьому максимальною алгеброю інваріантності відповідного рівняння вигляду (1.1) є така п'ятивимірна алгебра Лі операторів симетрії: $so^1(3) \oplus \langle \partial_u, u\partial_u \rangle$. Зауважимо, що $\langle \partial_u, u\partial_u \rangle \sim A_{2,2}$.

Проводячи аналогічний розгляд решти реалізацій $so^2(3)$, $sl^1(2, \mathbb{R})$, $sl^2(2, \mathbb{R})$, приходимо до такого результату.

В рамках сформульованої задачі з точністю до еквівалентності існують шість класів нелінійних рівнянь вигляду (1.1) , максимальні алгебри інваріантності яких є алгебрами Лі операторів симетрії з нетривіальним розкладом Леві, що розкладаються в пряму суму фактора Леві та розв'язної алгебри Лі. Представники цих класів рівнянь та їх максимальні алгебри інваріантності є такими:

1) $\Delta u = \operatorname{ch}^{-2} y \tilde{F}(\omega), \quad \omega = (u_x^2 + u_y^2)\operatorname{ch}^2 y : so^1(3) \oplus \langle \partial_u \rangle$;

2) $\Delta u = \operatorname{ch}^{-2} y \tilde{F}(\omega), \quad \omega = (u_x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y)^2 + u_y^2 \operatorname{ch}^2 y : so^2(3) \oplus \langle \partial_u \rangle$;

3) $\Delta u = y^{-2} \tilde{F}(\omega), \quad \omega = (u_x^2 + u_y^2) y^2 : sl^1(2, \mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u \rangle$;

4) $\Delta u = y^{-2} \tilde{F}(\omega), \quad \omega = 4y^2 u_y^2 + (1 - 2yu_x)^2 : sl^2(2, \mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u \rangle$;

5) $\Delta u = \lambda \operatorname{ch}^{-1} y \sqrt{u_x^2 + u_y^2}, \quad \lambda \neq 0 : so^1(3) \oplus \langle \partial_u, u\partial_u \rangle$;

6) $\Delta u = \lambda y^{-1} \sqrt{u_x^2 + u_y^2}, \quad \lambda \neq 0 : sl^1(2, \mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u, u\partial_u \rangle$.

Зауважимо, що у наведених вище рівняннях функції $\tilde{F} = \tilde{F}(\omega)$ набувають довільних значень і при цьому $\tilde{F}_{\omega\omega} \neq 0$.

3.2.2. Інваріантність відносно нерозкладних алгебр. Тут ми досліджуємо існування рівнянь вигляду (1.1), алгебри інваріантності яких мають структуру $S \Subset N$, тобто задовольняють співвідношення

$$[S, S] \subset S, \quad [N, N] \subset N, \quad [S, N] \subset N. \tag{3.9}$$

У своїх дослідженнях ми використовуємо результати роботи [25], в якій здійснено класифікацію алгебр Лі, розмірності яких не перевищують 8 і фактор Леві яких збігається з алгебрами $so(3)$ та $sl(2, \mathbb{R})$.

Оскільки випадки всіх наявних факторів Леві розглядаються аналогічно, детально розглянемо лише випадок, коли $S = sl^1(2, \mathbb{R})$.

Згідно з класифікацією [25], серед алгебр (3.9), де $S = sl(2, \mathbb{R}) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ найнижчу розмірність 5 має алгебра $sl(2, \mathbb{R}) \Subset A_{2,1}$, де $A_{2,1} = \langle e_4, e_5 \rangle$, і виконуються комутаційні співвідношення, які зв'язують базисні елементи алгебр $sl(2, \mathbb{R})$ і $A_{2,1}$:

$$[e_1, e_4] = e_4, \quad [e_2, e_5] = e_4, \quad [e_3, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = -e_5. \quad (3.10)$$

Але безпосередня перевірка комутаційних співвідношень (3.10) для базисних операторів реалізації $sl^1(2, \mathbb{R})$ і операторів e_4, e_5 вигляду (2.1) показує, що в рамках сформульованої задачі не існують реалізації алгебри $sl(2, \mathbb{R}) \Subset A_{2,1}$.

Наступну розмірність 6 мають три алгебри: $sl(2, \mathbb{R}) \Subset A_{3,3}$, $sl(2, \mathbb{R}) \Subset A_{3,5}$, $sl(2, \mathbb{R}) \Subset A_{3,1}$, при цьому виконуються такі співвідношення: $A_{3,3} = \langle e_6, e_4, e_5 \rangle$, $A_{3,5} = \langle e_4, e_5, e_6 \rangle$, $A_{3,1} = \langle e_4, e_5, e_6 \rangle$.

Оскільки ненульові комутаційні співвідношення, які зв'язують базисні елементи алгебр $sl(2, \mathbb{R})$ і $A_{3,3}$, $sl(2, \mathbb{R})$ і $A_{3,5}$, збігаються зі співвідношеннями (3.10), то, згідно з отриманим вище результатом, можна зробити висновок, що в рамках сформульованої задачі для реалізації $sl^1(2, \mathbb{R})$ не існують розширення до реалізацій алгебр $sl(2, \mathbb{R}) \Subset A_{3,3}$, $sl(2, \mathbb{R}) \Subset A_{3,5}$.

Для алгебри $sl(2, \mathbb{R}) \Subset A_{3,1}$ відповідні комутаційні співвідношення мають вигляд

$$[e_1, e_4] = 2e_4, \quad [e_2, e_5] = 2e_4, \quad [e_3, e_4] = e_5,$$
$$[e_1, e_6] = -2e_6, \quad [e_2, e_6] = e_5, \quad [e_3, e_5] = 2e_6.$$

Безпосередні обчислення показали, що для реалізації $sl^1(2, \mathbb{R})$ існує розширення до реалізації алгебри $sl(2, \mathbb{R}) \Subset A_{3,1}$, де базисні елементи алгебри $A_{3,1}$ з точністю до еквівалентності збігаються з операторами

$$e_4 = y^{-1}(x^2 + y^2)\partial_u, \quad e_5 = 2xy^{-1}\partial_u, \quad e_6 = y^{-1}\partial_u,$$

але відповідне інваріантне рівняння вигляду (1.1)

$$\Delta u = 2y^{-2}u + \lambda y^{-2}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

є лінійним, а тому не задовольняє умови сформульованої задачі.

Розгляд алгебр Лі розмірності 7: $sl(2, \mathbb{R}) \Subset A_{4,5}$, $q = 1$, $sl(2, \mathbb{R}) \Subset A_{4,8}$, $q = 1$, $sl(2, \mathbb{R}) \Subset A_{4,5}$, $p = q = 1$, $sl(2, \mathbb{R}) \Subset 4A_1$ привів до аналогічного результату.

Відповідні дослідження для алгебр $sl(2, \mathbb{R}) \Subset N$ розмірностей 5, 6 і 7 у випадку, коли $sl(2, \mathbb{R})$ збігається з реалізацією $sl^2(2, \mathbb{R})$, показали таке. Виконання комутаційних співвідношень (3.10) приводить до існування (з точністю до еквівалентності) операторів

$$e_4 = \left(x|y|^{-1/2}\cos u - y|y|^{-1/2}\sin u\right)\partial_u, \quad e_5 = |y|^{-1/2}\cos u\,\partial_u,$$

але тоді, якщо існує відповідне інваріантне рівняння вигляду (1.1), то воно буде інваріантним і відносно оператора

$$\tilde{v} = [e_4, e_5] = \varepsilon\partial_u,$$

де $\varepsilon = 1$ для $y > 0$ і $\varepsilon = -1$ для $y < 0$. Звідси випливає, що в інваріантному рівнянні

$$F = y^{-2}\tilde{F}(\omega), \quad \omega = 4y^2u_y^2 + (1 - 2yu_x)^2.$$

Але подальша вимога інваріантності цього рівняння, наприклад, відносно оператора e_5 приводить до несумісних умов для визначення можливих значень функції $\tilde{F}$. Також безпосередні обчислення показали, що з точністю до еквівалентності існує реалізація

$$sl(2,\mathbb{R}) \Subset \langle (x^2+y^2)\partial_u,\, 2x\partial_u,\, \partial_u \rangle$$

алгебри $sl(2,\mathbb{R}) \Subset A_{3,1}$, яка теж не може бути алгеброю інваріантності вигляду (1.1).

В інших випадках реалізації алгебр $sl(2,\mathbb{R}) \Subset N$ розмірностей 6 і 7, де $sl(2,\mathbb{R})$ збігається з реалізацією $sl^2(2,\mathbb{R})$, не існують.

Для алгебр $so(3) \Subset N$ ми провели дослідження до розмірності 8 включно і отримали аналогічний результат: не існують нелінійні рівняння вигляду (1.1), алгебри інваріантності яких ізоморфні алгебрам Лі операторів симетрії такої структури.

4. Обговорення результатів. Згідно з результатами третього пункту роботи, серед рівнянь вигляду (1.1) в рамках сформульованої задачі, існують шість нееквівалентних рівнянь, чотири з яких допускають чотиривимірні максимальні алгебри інваріантності, а два — п'ятивимірні алгебри інваріантності. Виникає природне запитання: чи можна стверджувати, що нелінійні рівняння досліджуваного вигляду, алгебри інваріантності яких ізоморфні алгебрам Лі з нетривіальним розкладом Леві, вичерпуються саме цими рівняннями? Поки що ствердну відповідь ми можемо дати щодо рівнянь, алгебри інваріантності яких розкладаються в пряму суму фактора Леві та розв'язної алгебри Лі. Щодо інваріантності відносно нерозкладних алгебр Лі операторів симетрії ми отримаємо повну відповідь після того, як проведемо групову класифікацію рівнянь, алгебри інваріантності яких є розв'язними алгебрами Лі операторів симетрії. Цю задачу ми розглянемо в другій частині роботи.

Зупинимося також на питанні використання отриманих результатів групової класифікації рівняння (1.1) для побудови нових, ще не відомих, квазілінійних рівнянь гіперболічного типу з високими симетрійними властивостями. Відомо (див., наприклад, [14]), що з точки зору локальної аналітичної теорії у випадку аналітичних функцій, які входять в рівняння, еліптична нормальна форма еквівалентна гіперболічній. Відповідне перетворення еквівалентності здійснюється шляхом виходу в область комплексних значень незалежних змінних за формулами

$$\bar{x} = x+iy, \qquad \bar{y} = x-iy, \qquad i^2 = -1.$$

В результаті цього перетворення рівняння (1.1) переходить у рівняння

$$4u_{\bar{x}\bar{y}} = \tilde{F}(\bar{x}, \bar{y}, u, u_{\bar{x}}, u_{\bar{y}}), \tag{4.1}$$

яке є рівнянням гіперболічного типу.

Групова класифікація квазілінійних рівнянь гіперболічного типу (в дійсній області) була предметом дослідження багатьох робіт (див., наприклад, [26 – 28] та наведену там бібліографію). Але навіть найбільш загальне рівняння, що досліджувалося в статті [28], є еквівалентним рівнянню (4.1), в якому $\tilde{F}_{\bar{x}} = 0$. Тому результати групової класифікації рівняння (1.1) можна використати і для побудови нових квазілінійних рівнянь гіперболічного типу з високими симетрійними властивостями. Наприклад, перетворене $sl^1(2,\mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u \rangle$-інваріантне рівняння (див. пп. 3.2.1) має вигляд

$$4u_{\bar{x}\bar{y}} = (\bar{x}-\bar{y})^{-2}\tilde{F}(\omega), \qquad \omega = (\bar{x}-\bar{y})^{-2}u_{\bar{x}}u_{\bar{y}},$$

й інваріантне відносно алгебри $sl(2,\mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u \rangle$, де

$$sl(2, \mathbb{R}) = \langle 2\bar{x}\partial_{\bar{x}} + 2\bar{y}\partial_{\bar{y}}, -\bar{x}^2\partial_{\bar{x}} - \bar{y}^2\partial_{\bar{y}}, \partial_{\bar{x}} + \partial_{\bar{y}} \rangle.$$

1. *Маслов В. П., Данилов В. Г., Волосов К. А.* Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
2. *Франк-Каменецкий Д. А.* Диффузия и теплопередача в химической технологии. – М.: Наука, 1987. – 502 с.
3. *Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А.* Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. – Новосибирск: Наука, 1994. – 319 с.
4. *Shercliff J. A.* Simple rotational flows // J. Fluid Mech. – 1977. – **82**, № 4. – P. 687 – 703.
5. *Rosen G.* Dilatation covariance and exact solutions in local relativistic field theories // Phys. Rev. – 1969. – **183**. – P. 1186 – 1191.
6. *Аристов С. Н.* Периодические и локализованные точные решения уравнения $h_t = \Delta \ln h$ // Прикл. механика и техн. физика. – 1999. – **40**, № 1. – С. 22 – 26.
7. *Векуа И. Н.* Замечания о свойствах решений уравнения $\Delta u = -ke^{2u}$ // Сиб. мат. журн. – 1960. – **1**, вып. 3. – С. 331 – 342.
8. *Сабитов И. Х.* О решениях уравнения $\Delta u = f(x, y)e^{cu}$ в некоторых специальных случаях // Мат. сб. – 2001. – **192**, № 6. – С. 89 – 104.
9. *Буллаф Р., Кодри Ф.* Солитоны. – М.: Мир, 1983. – 408 с.
10. *Ting A. S., Cheb H. H., Lee Y. C.* Exact solutions of a nonlinear boundary value problem: the vortices of the two-dimensional sinh-Poisson equation // Physica D. – 1987. – **14**. – P. 37 – 66.
11. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения. – М.: Междунар. программа образования, 1996. – 496 с.
12. *Полянин А. Д., Вязьмин А. В., Журов А. И., Казенин Д. А.* Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса. – М.: Факториал, 1998. – 368 с.
13. *Полянин А. Д., Зайцев В. Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.
14. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
15. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 639 с.
16. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 336 с.
17. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. – 1959. – **125**, № 3. – С.492 – 495.
18. *CRC handbook* of Lie group analysis of differential equations. Vol. 1 / Ed. N. H. Ibragimov. – Boca Raton: CRC Press, 1994. – 429 p.
19. *Zhdanov R. Z., Lahno V. I.* Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1999. – **32**. – P. 7405 – 7418.
20. *Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R.* The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // Acta Appl. Math. – 2001. – **69**, № 1. – P. 43 – 94.
21. *Лагно В. И., Спичак С. В., Стогний В. И.* Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа. – Москва; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2004. – 392 с.
22. *Барут А., Рончка Р.* Теория представлений групп и ее приложения: В 2 т. – М.: Мир, 1980. – Т. 1. – 456 с.
23. *Мубарякзанов Г. М.* О разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов. Математика. – 1963. – № 1(32). – С. 114 – 123.
24. *Patera J., Winternitz P.* Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras // J. Math. Phys. – 1977. – **18**, № 7. – P. 1449 – 1455.
25. *Turkowski P.* Low-dimensional real Lie algebras // Ibid. – 1988. – **29**. – P. 2139 – 2144.
26. *Лагно В., Магда О., Жданов Р.* Про інваріантність квазілінійних рівнянь гіперболічного типу відносно тривимірних алгебр Лі // Пр. Ін-ту математики НАН України: Групові та аналітичні методи в математичній фізиці. – 2001. – **36**, вип. 3. – С. 136 – 158.
27. *Магда О. В.* Чотиривимірні алгебри Лі та точні розв'язки квазілінійних рівнянь гіперболічного типу // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2002. – № 4. – С. 89 – 101.
28. *Lahno V., Zhdanov R.* Group classification of nonlinear wave equations // J. Math. Phys. – 2005. – **46**, № 5. – P. 1 – 37.

Одержано 22.03.06,
після доопрацювання — 17.07.06