

А. Ю. Колесов (Ярослав. ун-т, Россия),
Е. Ф. Мищенко (Мат. ин-т РАН, Москва, Россия),
Н. Х. Розов (Моск. ун-т, Россия)

ОБ ОДНОЙ БИФУРКАЦИИ В РЕЛАКСАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ*

Conditions are established under which, in three-dimensional relaxation systems of the form

$$\dot{x} = f(x, y, \mu), \quad \varepsilon \dot{y} = g(x, y), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad y \in \mathbb{R},$$

where $0 < \varepsilon \ll 1$, $|\mu| \ll 1$, $f, g \in C^\infty$, the so-called “blue sky catastrophe” is observed, i.e., a stable relaxation cycle appears whose period and length tend to zero as μ tends to some critical value $\mu_*(\varepsilon)$, $\mu_*(0) = 0$.

Встановлено умови, за яких у тривимірних релаксаційних системах вигляду

$$\dot{x} = f(x, y, \mu), \quad \varepsilon \dot{y} = g(x, y), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad y \in \mathbb{R},$$

де $0 < \varepsilon \ll 1$, $|\mu| \ll 1$, $f, g \in C^\infty$, спостерігається так звана „катастрофа блакитного неба” — з’являється стійкий релаксаційний цикл, період і довжина якого прямують до нескінченності при прямуванні μ до деякого критичного значення $\mu_*(\varepsilon)$, $\mu_*(0) = 0$.

0. Описание проблемы. В настоящей статье приведены результаты, касающиеся нелокальной бифуркации коразмерности один, которая в простейшем случае заключается в следующем. Рассмотрим гладкое однопараметрическое семейство векторных полей X_μ в \mathbb{R}^3 , и пусть при $\mu = 0$ поток X_μ имеет периодическую траекторию L_0 типа „простой седло-узел”. Далее, пусть \mathcal{U} — некоторая достаточно малая окрестность траектории L_0 , разделяемая двумерным сильно устойчивым многообразием $W^{ss}(L_0)$ на две области: „узловую” \mathcal{U}^+ , все траектории из которой стремятся к L_0 при $t \rightarrow +\infty$, и „седловую” \mathcal{U}^- , в которой лежит двумерное неустойчивое многообразие $W_{loc}^u(L_0)$ с краем L_0 . Будем предполагать, что все траектории системы X_0 с начальными условиями из $W_{loc}^u(L_0)$ с ростом t сначала выходят из окрестности \mathcal{U} , а затем снова возвращаются в нее, попадая в узловую область \mathcal{U}^+ . Ясно, что в таком случае каждая из упомянутых траекторий оказывается двоякоасимптотической к L_0 . Наконец, будем считать, что множество $W^u(L_0)$, получающееся из $W_{loc}^u(L_0)$ после продолжения по траекториям потока X_0 , не является топологическим многообразием. В трехмерном случае это означает, что оно не гомеоморфно двумерному тору.

При сформулированных (и при некоторых дополнительных) предположениях показано [1], что исчезновение в системе X_μ , $0 < \mu \ll 1$, седло-узловой цикла L_0 приводит к появлению устойчивой замкнутой траектории $L(\mu)$, причем при $\mu \rightarrow 0$ и ее период, и длина неограниченно увеличиваются, а она сама имеет своим верхним топологическим пределом множество $W^u(L_0) \cup L_0$. Описанная бифуркация получила название „катастрофы голубого неба”.

Реализуемость такой бифуркации была установлена [2, 3] в сингулярно возмущенных системах с одной медленной и m , $m \geq 2$, быстрыми переменными.

* Выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-01004) и целевой программы „Развитие научного потенциала высшей школы” (проект РНП 2.1.1.630).

Ниже приводятся условия, при которых „катастрофа голубого неба” имеет место в релаксационных системах с двумя медленными и одной быстрой переменными.

1. Постановка задачи. Рассмотрим трехмерную релаксационную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, y, \mu), \quad \varepsilon \dot{y} = g(x, y), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

с двумя малыми параметрами: $0 < \varepsilon \ll 1$, $|\mu| \ll 1$; функции f и g будем считать бесконечно дифференцируемыми по своим переменным.

Опишем предложения, при которых будет изучаться система (1) и которые гарантируют наличие в ней классических релаксационных колебаний. Как обычно [4], считаем, что уравнение $g(x, y) = 0$ определяет гладкую двумерную поверхность Γ , распадающуюся на непересекающиеся части

$$\Gamma_{1-} \cup \Gamma_{10} \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_{20} \cup \Gamma_{2-}.$$

По определению

$$(x, y) \in \Gamma_{1-} \cup \Gamma_{2-}, \text{ если } g'_y < 0; \quad (x, y) \in \Gamma_+, \text{ если } g'_y > 0;$$

$$(x, y) \in \Gamma_{10} \cup \Gamma_{20}, \text{ если } g'_y = 0.$$

Однако, в отличие от [4], будем предполагать, что Γ имеет форму не „полотенца”, а „кувшина” (рис. 1).

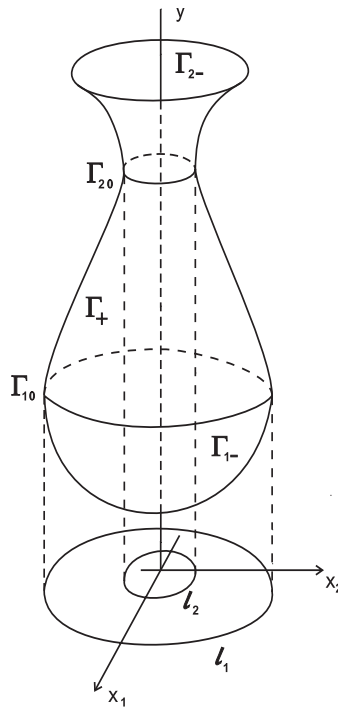


Рис. 1

Это означает [5], что:

поверхность Γ_{1-} задается уравнением $y = \Phi_{1-}(x)$, $\Phi_{1-} \in C^\infty(\Omega_1)$, где Ω_1 — внутренность простой замкнутой кривой $l_1 \in C^\infty$;

поверхность Γ_+ задается уравнением $y = \Phi_+(x)$, $\Phi_+ \in C^\infty(\Omega_2)$, где Ω_2 — кольцевая область, ограниченная кривой l_1 и простой замкнутой кривой $l_2 \subset \Omega_1$ класса C^∞ ;

поверхность Γ_{2-} задается уравнением $y = \Phi_{2-}(x)$, $\Phi_{2-} \in C^\infty(\Omega_3)$, где $\Omega_3 = \mathbb{R}^2 \setminus (\Omega_1 \setminus \Omega_2)$.

Кроме того, при $x \in l_1$ и $x \in l_2$ выполняются равенства $\Phi_{1-}(x) = \Phi_+(x)$ и $\Phi_{2-}(x) = \Phi_+(x)$ соответственно, а кривые l_1 и l_2 являются проекциями на плоскость $y = 0$ замкнутых кривых Γ_{10} и Γ_{20} .

Условие 1. Будем считать, что при $(x, y) \in \Gamma_{10} \cup \Gamma_{20}$

$$g''_{yy}(x, y) \neq 0, \quad (\text{grad}_x g(x, y), f(x, y, 0)) \neq 0, \quad (2)$$

где $(*, *)$ — евклидово скалярное произведение.

Неравенства (2) означают общность положения на линиях срыва Γ_{10} и Γ_{20} [4].

Напомним, что система

$$\dot{x} = f(x, y, \mu), \quad g(x, y) = 0 \quad (3)$$

называется вырожденной, а поведение ее траекторий на устойчивой поверхности медленных движений Γ_{1-} (которая задается равенством $y = \Phi_{1-}(x)$) сводится к рассмотрению двумерной системы

$$\dot{x} = f(x, \Phi_{1-}(x), \mu), \quad x \in \Omega_1 \cup l_1. \quad (4)$$

Условие 2. Предположим, что фазовый портрет системы (4) при $\mu = 0$ таков (рис. 2):

в области Ω_1 существует единственное состояние равновесия $x = \bar{x}$, являющееся экспоненциально неустойчивым узлом или фокусом, а единственный окружающий ее полуустойчивый цикл

$$L_0: x = x_0(\varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0, x_0(\varphi + 2\pi) \equiv x_0(\varphi), \quad \omega_0 > 0, \quad (5)$$

имеет тип „простой седло-узел”;

все траектории из кольцевой области, ограниченной кривыми l_1 и L_0 , за конечное время попадают на l_1 ;

кривая l_2 лежит в области, ограниченной циклом L_0 , но не содержит и не окружает точку $x = \bar{x}$.

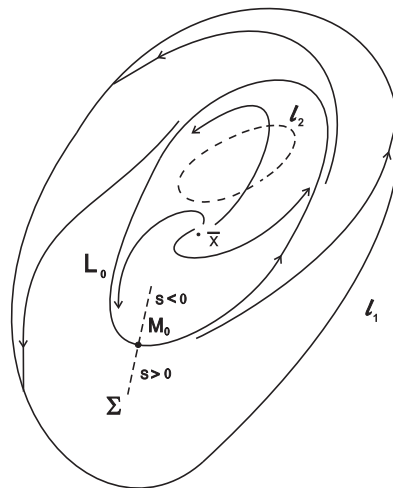


Рис. 2

Поясним фигурирующее в условии 2 требование простоты седло-узлового цикла (5). Зафиксируем произвольную точку $M_0 \in L_0$ и обозначим через Σ достаточно малый отрезок нормали к кривой L_0 в этой точке (рис. 2); за параметр s на секущей Σ возьмем расстояние от произвольной точки $M \in \Sigma$ до точки M_0 , взятое со знаком "+", если M лежит на внешней части нормали, и со знаком "-" в противном случае. Тогда на множестве $\{(s, \mu): |s| \leq s_0, |\mu| \leq \mu_0\}$, где $s_0, \mu_0 > 0$ достаточно малы, определено отображение последования Пуанкаре

$$s \rightarrow R(s, \mu), \quad R \in C^\infty([-s_0, s_0] \times [\mu_0, \mu_0]) \quad (6)$$

по траекториям системы (4), причем справедливо разложение

$$R(s, 0) = s + d_0 s^2 + O(s^3). \quad (7)$$

Простота седло-узлового цикла L_0 означает выполнение неравенства $d_0 > 0$.

Условие 3. Будем считать, что для функции $R(s, \mu)$ из (6)

$$\alpha_0 = R'_\mu(0, 0) > 0. \quad (8)$$

Из соотношений (7), (8) и $d_0 > 0$ вытекает, что при $\mu \in [-\mu_0, 0)$ отображение (6) имеет две неподвижные точки $s_\pm(\mu) = \pm\sqrt{-\alpha_0\mu/d_0} + O(\mu)$, которым в системе (4) соответствуют два цикла — устойчивый $L_-(\mu)$ и неустойчивый $L_+(\mu)$; $L_\pm(0) = L_0$. Следовательно, все траектории системы (4) с начальными условиями, лежащими на кривой l_2 , при $t \rightarrow +\infty$ стремятся к циклу $L_-(\mu)$. Если же $\mu \in (0, \mu_0]$, то циклов в этой системе нет, и любая ее траектория с начальным условием из l_2 сначала асимптотически долгое время (порядка $1/\sqrt{|\mu|}$) вращается в окрестности исчезнувшего цикла L_0 , а затем попадает на кривую l_1 .

Условие 4. Будем считать, что при $\mu = 0$ все траектории вырожденной системы (3) на поверхности медленных движений Γ_{2-} или, что то же самое, системы

$$\dot{x} = f(x, \Phi_{2-}(x), \mu), \quad x \in \Omega_3 \cup l_2, \quad (9)$$

с начальными условиями, принадлежащими кривой l_1 , за конечное время попадают на кривую l_2 .

При сформулированных предположениях можно дать качественное описание поведения любой траектории

$$(x(t, \varepsilon, \mu), y(t, \varepsilon, \mu)): \quad x(0, \varepsilon, \mu) = x_0, \quad y(0, \varepsilon, \mu) = y_0 \quad (10)$$

системы (1) с не зависящими от ε, μ начальными условиями x_0, y_0 . Пусть точка (x_0, y_0) расположена в некоторой достаточно малой окрестности многообразия Γ_{1-} и x_0 принадлежит кольцевой области, ограниченной кривыми L_0 и l_1 . Тогда сначала за асимптотически малое время (порядка $\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$) происходит „падение” фазовой точки (10) на поверхность Γ_{1-} примерно по прямой $x = x_0$, а затем движение продолжается в асимптотически малой по ε окрестности кривой $(x_1(t, \mu), y_1(t, \mu))$, где $y_1(t, \mu) = \Phi_{1-}(x_1(t, \mu))$, а $x_1(t, \mu)$ — решение системы (4) с начальным условием $x_1(0, \mu) = x_0$.

Далее, в силу условия 2 найдется такой первый момент времени $t_1 = t_1(\mu) > 0$, что $x_1(t_1, \mu) \in l_1$. А отсюда с учетом условия 1 следует [4], что при значениях t , асимптотически близких к t_1 , происходит „срыв” с многообразия Γ_{1-} и падение на устойчивое многообразие Γ_{2-} в точку

$$(x_2(\mu), y_2(\mu)): x_2(\mu) = x_1(t_1, \mu), \quad y_2(\mu) = \Phi_{2-}(x_1(t_1, \mu)).$$

После этого траектория (10) движется в асимптотически малой окрестности соответствующего решения

$$(x_2(t, \mu), y_2(t, \mu)): x_2(t_1, \mu) = x_2(\mu), \quad y_2(t_1, \mu) = y_2(\mu)$$

вырожденной системы (3) до очередного срыва и падения на Γ_{1-} , происходящих при $t \approx t_2(\mu) > t_1$. Здесь t_2 — момент времени (существующий в силу условия 4), когда первый раз $x_2(t_2, \mu) \in l_2$.

При $t > t_2$ характер поведения траектории (10) существенно зависит от знака μ . Предположим сначала, что этот параметр фиксирован и положителен. Тогда система (4) не имеет циклов, а любое ее решение с начальным условием на кривой l_2 за конечное (хотя и достаточно большое — порядка $1/\sqrt{\mu}$) время попадает на кривую l_1 . Это означает существование такого момента времени $t = t_3 > t_2$, что при $t \approx t_3$ траектория (10) „срывается” с Γ_{1-} и „падает” на Γ_{2-} . Ясно, что в рассматриваемом случае описанный процесс „срывов” и „падений” продолжается до бесконечности, т. е. в системе (1) реализуются незатухающие классические релаксационные колебания.

Предположим далее, что параметр μ фиксирован и отрицателен. Тогда [6] циклам $L_{\pm}(\mu)$ системы (4) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ соответствуют устойчивый и неустойчивый циклы $\tilde{L}_-(\varepsilon, \mu)$ и $\tilde{L}_+(\varepsilon, \mu)$ исходной системы (1), причем

$$\tilde{L}_{\pm}(0, \mu) = \{(x, y): y = \Phi_{1-}(x), x \in L_{\pm}(\mu)\}.$$

Кроме того, в силу условия 2 интересующая нас траектория (10) при $t > t_2$ заведомо попадает в область притяжения цикла $\tilde{L}_-(\varepsilon, \mu)$. Таким образом, в данном случае релаксационных колебаний в системе (1) нет.

Из приведенных качественных соображений можно сделать эвристическое заключение о существовании критического значения $\mu_*(\varepsilon)$, $\mu_*(0) = 0$, параметра μ , при котором в системе (1) происходит переход от гладких автоколебаний — устойчивого цикла $\tilde{L}_-(\varepsilon, \mu)$ — к релаксационным. Точнее говоря, случай $\mu = \mu_*(\varepsilon)$ соответствует „седло-узловой” бифуркации, приводящей к слиянию и исчезновению циклов $\tilde{L}_{\pm}(\varepsilon, \mu)$.

Что же касается „катастрофы голубого неба”, то, как оказывается, она наблюдается (при одном дополнительном условии) в системе (1) при

$$\mu = \mu_*(\varepsilon) + \nu, \quad 0 < \nu \ll 1. \tag{11}$$

2. Технические результаты. Для доказательства основного результата о „катастрофе голубого неба” требуются достаточно непростые вспомогательные технические результаты и конструкции, строгое обоснование которых слишком громоздко. Поэтому мы ограничимся здесь лишь разъяснениями и некоторыми формулировками; исчерпывающие формальные и довольно громоздкие доказательства будут опубликованы отдельно.

Прежде всего следует убедиться, что фигурирующее в (11) критическое значение $\mu_*(\varepsilon)$ параметра μ действительно существует. Зафиксируем произвольное достаточно малое $\delta_0 > 0$ и на плоскости (x_1, x_2) рассмотрим окрестность цикла (5)

$$\mathcal{U} = \bigcup_{\tilde{x} \in L_0} O(\tilde{x}, \delta_0), \tag{12}$$

где $O(\tilde{x}, \delta_0)$ — открытый шар радиуса δ_0 с центром в точке \tilde{x} . Используя результаты из [7], можно утверждать: для любого натурального k найдутся

такие достаточно малые $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k) > 0$, $\mu_0 = \mu_0(k) > 0$, что при $(x, \varepsilon, \mu) \in \mathcal{U} \times [0, \varepsilon_0] \times [-\mu_0, \mu_0]$ система (1) имеет экспоненциально орбитально устойчивое (с показателем экспоненты порядка ε^{-1}) инвариантное многообразие медленных движений

$$y = H(x, \varepsilon, \mu) : H \in C^k(\mathcal{U} \times [0, \varepsilon_0] \times [-\mu_0, \mu_0]), \quad H(x, 0, \mu) = \Phi_{1-}(x). \quad (13)$$

Рассмотрим теперь двумерную систему на многообразии (13):

$$\dot{x} = f(x, H(x, \varepsilon, \mu), \mu), \quad x \in \mathcal{U}, \quad (14)$$

и введем отображение последования

$$s \rightarrow R(s, \varepsilon, \mu), \quad R(s, \varepsilon, \mu) \in C^k([-s_0, s_0] \times [0, \varepsilon_0] \times [-\mu_0, \mu_0]) \quad (15)$$

по траекториям системы (14), действующее на секущей Σ (см. рис. 2) и являющееся C^k -гладким продолжением по ε отображения (6).

Можно установить (используя теорему о неявной функции) существование такой единственной функции $\mu = \mu_*(\varepsilon)$, $\mu_*(0) = 0$, что при $\mu = \mu_*(\varepsilon)$ отображение (15) имеет неподвижную точку $s = s_*(\varepsilon)$, $s_*(0) = 0$, типа „простой седло-узел“. Этой точке в системе (14) соответствует полуустойчивый цикл, являющийся C^k -гладким продолжением по ε седло-узловой цикла (5):

$$\begin{aligned} L_*(\varepsilon) : x &= x_*(\varphi, \varepsilon), \quad x_*(\varphi + 2\pi, \varepsilon) \equiv x_*(\varphi, \varepsilon), \\ \dot{\varphi} &= \omega_*(\varepsilon), \quad x_*(\varphi, 0) = x_0(\varphi), \quad \omega_*(0) = \omega_0. \end{aligned} \quad (16)$$

Если теперь добавить еще и компоненту $y = y_*(\varphi, \varepsilon)$, где

$$\begin{aligned} y_*(\varphi, \varepsilon) &= H(x_*(\varphi, \varepsilon), \varepsilon, \mu_*(\varepsilon)), \quad y_*(\varphi, 0) = \Phi_{1-}(x_0(\varphi)), \\ y_*(\varphi + 2\pi, \varepsilon) &\equiv y_*(\varphi, \varepsilon), \end{aligned}$$

то получится полуустойчивый цикл

$$\tilde{L}_*(\varepsilon) : x = x_*(\varphi, \varepsilon), \quad y = y_*(\varphi, \varepsilon), \quad \dot{\varphi} = \omega_*(\varepsilon) \quad (17)$$

типа „простой седло-узел“ системы (1).

В силу условий 1 – 4 каждая траектория системы (1) при $\mu = \mu_*(\varepsilon)$, принадлежащая неустойчивому многообразию $W_{\text{loc}}^u(\tilde{L}_*(\varepsilon))$ цикла (17), при $t \rightarrow +\infty$ снова стремится к $\tilde{L}_*(\varepsilon)$, попадая в узловую область этого цикла. Следовательно, $\mu_*(\varepsilon)$ действительно является критическим значением, соответствующим „катастрофе голубого неба“.

Дальнейшие рассуждения относятся к системе

$$\dot{x} = F_*(x, \varepsilon, v), \quad (18)$$

получающейся после подстановки в (14) равенства (11). Введем в области (12) „радиальную“ и „циклическую“ координаты

$$(s, \varphi) : |s| \leq s_0, \quad s_0 = \text{const} > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi(\text{mod } 2\pi),$$

связанные с циклом (16): в качестве φ возьмем угловую координату из (16), а через s обозначим уже упоминавшийся параметр на отрезке нормали $\Sigma(\varphi, \varepsilon)$ к кривой $L_*(\varepsilon)$, проведенном через точку $x_*(\varphi, \varepsilon)$. Необходимый теперь технический результат касается преобразования системы (18) к возможно более простому виду. Если предположить, что в этой системе $v > 0$, то можно доказать существование такого C^k -гладкого перехода от координат (s, φ) к координатам (r, ψ) („поперек“ и „вдоль“ цикла (17)), в которых система (18) „расщепляется в главных членах“.

Теперь вернемся в исходное трехмерное пространство и рассмотрим две двумерные цилиндрические поверхности S_{\pm} , задающиеся в переменных (r, ψ, z) , $z = y - H(x, \varepsilon, \mu)$ равенствами

$$S_{\pm} = \{(r, \psi, z): r = \pm r_0, 0 \leq \psi \leq 2\pi(\text{mod } 2\pi), |z| \leq z_0\}, \quad (19)$$

где постоянные $r_0 > 0$, $z_0 > 0$ фиксированы и достаточно малы. Оказывается, что при условии (11) поверхности (19) не имеют контакта с траекториями системы (1). Кроме того, из описанного выше характера поведения решений (10) следует, что корректно определяются оператор соответствия $\Pi_{+,-}(\varepsilon, \nu): S_+ \rightarrow S_-$ по траекториям системы (1) и аналогичный оператор $\Pi_{+,-}(0, 0)$ по траекториям вырожденной системы (3) при $\mu = 0$. Важным обстоятельством является тот факт, что второй из этих операторов допускает представление

$$\Pi_{+,-}(0, 0): (\psi, z) \rightarrow (\gamma(\psi), 0), \quad (20)$$

где $\gamma(\psi) \in C^{\infty}$ — 2π -периодическая функция.

Эта функция играет существенную роль в формулировке окончательного результата, и поэтому остановимся подробнее на ее определении. На плоскости (x_1, x_2) в переменных (r, ψ) зададим две замкнутые кривые $L_{(\pm)}$:

$$L_{(\pm)} = \{(r, \psi): r = \pm r_0, 0 \leq \psi \leq 2\pi(\text{mod } 2\pi)\}$$

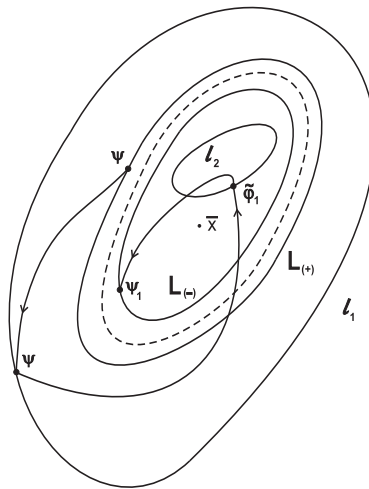


Рис. 3

(на рис. 3 штрихами изображен цикл L_0 , расположенный между $L_{(-)}$ и $L_{(+)}$). Зафиксируем далее на $L_{(+)}$ произвольную точку, которой соответствует угол ψ , и выпустим из нее решение системы (4) при $\mu = 0$. В силу условий 1 и 2 по траекториям этой системы устанавливается взаимно однозначное соответствие между кривыми $L_{(+)}$ и l_1 . Поэтому будем считать, что кривая l_1 параметризована с помощью той же самой координаты ψ , что и кривая $L_{(+)}$ (точнее, точкам из $L_{(+)}$ и l_1 , лежащим на одной и той же траектории, соответствуют одинаковые значения ψ).

Обратимся теперь к точке на кривой l_1 с координатой ψ и выпустим из нее траекторию системы (9) при $\mu = 0$ (см. рис. 3). Согласно условию 4 через конечное время эта траектория попадет в некоторую точку кривой l_2 с координатой $\tilde{\varphi}_1 = \gamma_1(\psi)$, $\gamma_1(\psi + 2\pi) \equiv \gamma_1(\psi) + 2\pi$. (Считаем, что кривая l_2 C^{∞} -гладко параметризована циклической переменной $0 \leq \tilde{\varphi} \leq 2\pi(\text{mod } 2\pi)$ и имеет ту же

ориентацию, что и l_1 .) Добавим еще, что (см. условие 1) при $\mu = 0$ траектории системы (9) не образуют контакта с кривой l_2 , а значит, $\gamma_1(\psi) \in C^\infty$.

Для завершения построения функции $\gamma(\psi)$ возьмем полученную на предыдущем шаге точку на l_2 и рассмотрим траекторию системы (4) при $\mu = 0$ с начальным условием в этой точке (рис. 3). В силу условия 2 убеждаемся, что при увеличении t такая траектория с необходимостью пересечет общим образом кривую $L_{(-)}$ в некоторой точке с координатой $\psi_1 = \gamma_2(\tilde{\varphi}_1)$, где $\gamma_2(\tilde{\varphi}) \in C^\infty$, $\gamma_2(\tilde{\varphi} + 2\pi) \equiv \gamma_2(\tilde{\varphi})$. Остается заметить, что интересующая нас функция $\gamma(\psi)$ определяется равенством $\gamma(\psi) = \gamma_2(\gamma_1(\psi))$.

Заключительный этап исследования поведения решений системы (1) при условии (11) связан с изучением оператора соответствия $\Pi_{-,+}(\varepsilon, \nu)$ по ее траекториям, действующего из S_- в S_+ . Прежде всего, можно убедиться, что при любом $0 < \nu \ll 1$ этот оператор действительно существует. И самое главное, удастся получить эффективные представления для образа точки (ψ, z) после воздействия на нее этого оператора.

3. Основные результаты. Определим оператор последования Пуанкаре

$$\Pi(\varepsilon, \nu) = \Pi_{-,+}(\varepsilon, \nu) \circ \Pi_{+,-}(\varepsilon, \nu): S_+ \rightarrow S_+ \quad (21)$$

по траекториям системы (1) при условии (11). С помощью результатов из [8] и упомянутых эффективных представлений для оператора $\Pi_{-,+}(\varepsilon, \nu)$ устанавливаются утверждения, являющиеся основными в данной статье.

Теорема 1. *Для любого натурального k найдутся такие достаточно малые $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k) > 0$ и $\nu_0 = \nu_0(k) > 0$, что при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 \leq \nu \leq \nu_0$ оператор (21) имеет вид*

$$\begin{aligned} \Pi(\varepsilon, \nu): \quad & \psi \rightarrow c_*(\varepsilon, \nu)/\sqrt{\nu} + \gamma(\psi) + \Lambda_1(\psi, z, \varepsilon, \nu) \pmod{2\pi}, \\ & z \rightarrow \Lambda_2(\psi, z, \varepsilon, \nu) \exp\left(-\frac{c_{**}}{\varepsilon\sqrt{\nu}}\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $\gamma(\psi)$ — функция из (20); непрерывная по совокупности переменных функция $c_*(\varepsilon, \nu)$ такова, что $c_*(0, 0) > 0$; $c_{**} = \text{const} > 0$, а 2π -периодические по ψ функции Λ_j , $j = 1, 2$, и их производные по (ψ, z) до порядка k включительно непрерывны по совокупности переменных на множестве $[0, 2\pi] \times [-z_0, z_0] \times [0, \varepsilon_0] \times [0, \nu_0]$. Кроме того, выполняется равенство

$$\Lambda_1(\psi, z, 0, 0) \equiv 0.$$

Из представления (22) легко заключить, что $\Pi(\varepsilon, \nu)S_+ \subset S_+$, а потому отображение (21) имеет максимальный аттрактор

$$A_{\max} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Pi^n(\varepsilon, \nu)S_+. \quad (23)$$

Ясно также, что в первом приближении за структуру множества (23) отвечает одномерное отображение

$$\Pi_\kappa: \psi \rightarrow \bar{\psi} = \kappa + \gamma(\psi), \quad (24)$$

где $\kappa = c_*(\varepsilon, \nu)/\sqrt{\nu}$, получающееся из (22) после отбрасывания асимптотически малых по ε, ν слагаемых. Будем рассматривать это отображение, считая κ независимым параметром, пробегающим всю числовую ось \mathbb{R} .

В дополнение к условиям 1 – 4 сделаем новое предположение. Именно, будем считать, что

$$|\gamma'(\psi)| < 1 \quad \forall \psi \in [0, 2\pi]. \quad (25)$$

Тогда, как нетрудно видеть, отображение (24) имеет единственную непрерывно зависящую от κ неподвижную точку

$$\psi = \psi_0(\kappa), \quad \psi_0(\kappa + 2\pi) \equiv \psi_0(\kappa) + 2\pi. \quad (26)$$

Что же касается исходного отображения (22), то при условии (25) оно очевидным образом является сжимающим. Тем самым приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. Пусть кроме условий 1 – 4 выполнены предположения (11) и (25). Тогда аттрактор (23) состоит из единственной экспоненциально устойчивой неподвижной точки $(\psi, z) = (\psi(\varepsilon, \nu), z(\varepsilon, \nu))$, для компонент которой при $\nu \rightarrow 0$ справедливы равномерные по ε асимптотические представления

$$\psi(\varepsilon, \nu) = (1 + o(1))\psi_0(\kappa)|_{\kappa=c_*(\varepsilon, \nu)/\sqrt{\nu}}, \quad z(\varepsilon, \nu) = O\left(\exp\left(-\frac{c_{**}}{\varepsilon\sqrt{\nu}}\right)\right), \quad (27)$$

где $c_{**} > 0$ — постоянная из (22), а $\psi_0 = \psi_0(\kappa)$ — функция (26).

Поясним, почему последняя теорема гарантирует реализуемость в системе (1) при сделанных предположениях интересующей нас бифуркации типа „катастрофа голубого неба”. Действительно, неподвижной точке (27) оператора последования (21) соответствует релаксационный цикл $\tilde{L}(\varepsilon, \nu)$ этой системы, период и длина которого равномерно по ε стремятся к бесконечности при $\nu \rightarrow 0$. Кроме того, в силу первого равенства из (27) множество всех частичных пределов компоненты $\psi(\varepsilon, \nu)$ при $\nu \rightarrow 0$, взятое по модулю 2π , совпадает с отрезком $[0, 2\pi]$. А это значит, что верхний топологический предел кривой $\tilde{L}(\varepsilon, \nu)$ при $\nu \rightarrow 0$ равен $W^u(\tilde{L}_*(\varepsilon)) \cup \tilde{L}_*(\varepsilon)$, где $\tilde{L}_*(\varepsilon)$ — „седло-узловой цикл” (17), а W^u — его неустойчивое многообразие, продолженное по траекториям системы (1) при $\mu = \mu_*(\varepsilon)$ и состоящее из двоякоасимптотических к $\tilde{L}_*(\varepsilon)$ решений.

4. Пример. Рассмотрим в качестве примера систему вида

$$\dot{x} = f_1(x, \mu)v_1(y) + f_2(x)v_2(y), \quad \varepsilon\dot{y} = x_1^2 + x_2^2 - g(y). \quad (28)$$

Будем считать, что функция $g(y) \in C^\infty(\mathbb{R})$ гладко зависит от четырех положительных параметров a_1, a_2, b_1, b_2 и обладает следующими свойствами (рис. 4):

$$\begin{aligned} g(0) &= 0, \quad g(y) > 0 \quad \text{при } y > 0; \\ g'(y) &> 0 \quad \text{при } y \in [0, a_1], \quad g'(a_1) = 0; \\ g(a_1) &= b_1, \quad g''(a_1) < 0; \\ g'(y) &< 0 \quad \text{при } y \in (a_1, a_2), \quad g'(a_2) = 0; \\ g(a_2) &= b_2, \quad g''(a_2) > 0; \\ g'(y) &> 0 \quad \text{при } y > a_2, \quad g(y) \rightarrow +\infty \quad \text{при } y \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Предположим далее, что $v_1(y), v_2(y) \in C^\infty(\mathbb{R})$ и

$$\begin{aligned} v_1(y) &\equiv 1, \quad v_2(y) \equiv 0 \quad \text{при } 0 \leq y \leq a_1, \\ v_1(y) &\equiv 0, \quad v_2(y) \equiv 1 \quad \text{при } y \geq a_2. \end{aligned}$$

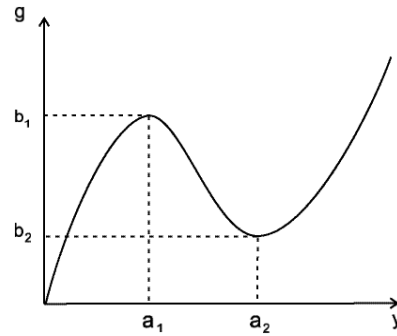


Рис. 4

Наконец, сделаем следующие допущения относительно вектор-функций f_1 , f_2 : они бесконечно дифференцируемы по совокупности переменных и таковы, что система

$$\dot{x} = f_1(x, \mu) \quad (29)$$

удовлетворяет условиям 2 и 3, а система $\dot{x} = f_2(x)$ имеет вид

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_2.$$

Кроме того, предположим, что при $\mu = 0$ траектории системы (29) не образуют контакта с окружностью $x_1^2 + x_2^2 = b_1$ (это требование эквивалентно выполнению второго неравенства из (2)).

Описанная система (28) заведомо удовлетворяет условиям 1 – 4. В данном случае несложно придать условиям теоремы 2 более обозримый характер и, в частности, убедиться в их принципиальной реализуемости. Действительно, предположим, что $b_2 \rightarrow 0$ при фиксированных прочих параметрах. Тогда кривая $l_2 = \{(x_1, x_2): x_1^2 + x_2^2 = b_2\}$ стягивается в точку и вследствие этого функция $\gamma(\psi)$ из (20) стремится (в метрике $C^1[0, 2\pi]$) к некоторой константе. Таким образом, при малых b_2 неравенство (25) выполняется.

В заключение добавим, что описанная ситуация реализуется в системе (28) при подходящем выборе параметров, если система (29) в полярных координатах

$$x_1 = x_1^0 + \rho \cos \varphi, \quad x_2 = x_2^0 + \rho \sin \varphi, \quad (x_1^0, x_2^0) \neq (0, 0),$$

имеет вид

$$\dot{\rho} = \left[\mu + (\rho^2 - \rho_0^2)^2 \right] \rho, \quad \dot{\varphi} = 1, \quad \rho_0 = \text{const} > 0.$$

1. Тураев Д. В., Шильников Л. П. Докл. АН РАН. – 1995 – **342**, № 5. – С. 596 – 599.
2. Shilnikov A., Shilnikov L., Turaev D. Blue sky catastrophe in singularly-perturbed systems. – Berlin, 2003. – Preprint WIAS, № 841.
3. Shilnikov A., Shilnikov L., Turaev D. Moscow Math. J. – 2005. – **5**, № 1. – P. 269 – 282.
4. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. – М.: Наука, 1975.
5. Колесов А. Ю. Мат. заметки. – 1994. – **56**, вып. 6. – С. 40 – 47.
6. Аносов Д. В. Мат. сб. – 1960. – **50**, № 3. – С. 299 – 334.
7. Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973.
8. Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. – М.: Наука, 1995.

Получено 15.10.07