УДК 517.5

С. А. Стасюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩІ M-ЧЛЕННІ ОРТОГОНАЛЬНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Order estimates of the best M-term orthogonal trigonometric approximations of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of multivariable functions in the metric of the space L_q are obtained for the case $1 < q \le p < \infty$.

Получены порядковые оценки наилучших M-членных ортогональных тригонометрических приближений классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в метрике пространства L_q в случае $1 < q \le p < \infty$.

1. Вступ. У роботі розглядаються найкращі M-членні ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у метриці простору L_q. Результати даної роботи є продовженням досліджень, розпочатих автором у [1].

Наведемо необхідні позначення, які потрібні для означення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ та апарату їх наближення.

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \ge 1$, — евклідів простір з елементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$ і $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$; $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^{d} [-\pi; \pi]$, — простір 2π-періодичних за кожною змінною функцій $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ із скінченною нормою

$$\|f\|_{L_p(\pi_d)} = \|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Скрізь нижче будемо вважати, що для функцій $f \in L_p(\pi_d)$ виконується додаткова умова

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d}.$$

Нехай функція $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ задовольняє наступні умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1, d}$; $\Omega(t) = 0$, $\prod_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ зростає по кожній змінній;

3) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \le \left(\prod_{j=1}^{d} m_j \right)^l \Omega(t)$, $l, m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$;

4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \ge 0$, $j = \overline{1, d}$.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S), (S_l) [2], які називають умовами Барі – Стєчкіна. Це означає наступне.

Наслідуючи С. Н. Бернштейна [3], будемо називати функцію однієї змінної $\varphi(\tau)$ майже зростаючою (майже спадною) на $[a, b]$, якщо існує $C_1 > 0$ ($C_2 > 0$), яке не залежить від τ_1 і τ_2, таке, що $\varphi(\tau_1) \le C_1 \varphi(\tau_2)$ для $a \le \tau_1 \le \tau_2 \le b$ у випадку майже зростання і, відповідно, $\varphi(\tau_1) \ge C_2 \varphi(\tau_2)$ для $a \le \tau_1 \le \tau_2 \le b$ у випадку майже спадання.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \ge 0$, $\tau \in [0, 1]$, задовольняє умову (S), якщо при деякому $\alpha > 0$ $\varphi(\tau)/\tau^{\alpha}$ майже зростає на $(0, 1]$.

Функція $\varphi(\tau) \geq 0$, $\tau \in [0, 1]$, задовольняє умову (S_l), якщо при деякому γ $(0 < \gamma < l)$ $\varphi(\tau)/\tau^{\gamma}$ майже спадає на $(0, 1]$.

Будемо говорити, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови за кожною змінною t_j при фіксованих t_i, $i \neq j$.

Покладемо

$$\rho(s) = \left\{k = (k_1, \ldots, k_d)\colon 2^{s_j - 1} \leq \left|k_j\right| < 2^{s_j}, \ \ k_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \ \ s_j \in \mathbb{N}, \ \ j = \overline{1, d}\right\}$$

і

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k, x)},$$

де $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$.

Нехай функція $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ задовольняє сформульовані вище умови 1 – 4, а також умови (S) та (S_l). Тоді класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, розглянуті в роботі [4], визначаються таким чином:

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{f\colon f \in L_p(\pi_d), \ \ \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \leq 1\right\},$$

де

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left\{\sum_{s} \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^{\theta} \, \Omega(2^{-s})^{-\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leq \theta < \infty, \tag{1}$$

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \|f\|_{H^{\Omega}_p} = \sup_{s} \frac{\|\delta_s(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, \tag{2}$$

а $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \ldots, 2^{-s_d})$.

Зауважимо, що (2) раніше встановлено в роботі [5].

Якщо $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $r_j > 0$, то класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ збігаються з відомими класами Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$ (див., наприклад, [6], [7], гл. 4, § 4.3) і відповідні до (1) і (2) зображення встановлено у [8].

Зазначимо, що в роботі будуть розглядатися класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначаються функцією $\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots t_d)$, де $\omega(\tau)$ — задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S) і (S_l).

Нехай $F \subset L_q(\pi_d)$ — деякий функціональний клас. Тоді величина

$$e^{\perp}_M(F)_q = \sup_{f \in F} \inf_{\{k^j\}_{j=1}^{M}} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^{M} \hat{f}(k^j) e^{i(k^j, \cdot)} \right\|_q \tag{3}$$

називається найкращим M-членним ортогональним тригонометричним наближенням функціонального класу F у просторі L_q.

Дослідження поведінки величин (3) для деяких класів функцій багатьох змінних проводились, зокрема, в роботах Е. С. Белінського [9] та А. С. Романюка [10 – 12].

Для зручності наведемо відомі твердження, які будемо використовувати при встановленні оцінок величин $e^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$.

Теорема A (Літтлвуда – Пелі [7], гл. 1, § 1.5). *Нехай задано* $1 < p < \infty$. *Існують додатні числа* C_3, C_4 *такі, що для кожної функції* $f \in L_p(\pi_d)$ *виконуються співвідношення*

$$C_3 \| f \|_p \leq \left\| \left\{ \sum_s |\delta_s(f, \cdot)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C_4 \| f \|_p. \tag{4}$$

Нехай

$$Q_n = \bigcup_{\|s\|_1 < n} \rho(s), \qquad \|s\|_1 = s_1 + \ldots + s_d.$$

Тоді величини

$$E_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q = \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \inf_{c_k} \left\| f(\cdot) - \sum_{k \in Q_n} c_k e^{i(k,\cdot)} \right\|_q,$$

$$\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q = \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \left\| f(\cdot) - \sum_{k \in Q_n} \hat{f}(k) e^{i(k,\cdot)} \right\|_q$$

називають відповідно найкращим наближенням та наближенням східчасто-гіперболічними сумами Фур'є класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Теорема B. *Нехай* $1 \leq \theta \leq \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > \max\left\{0; \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right\}$, *а також умову* (S_l). *Тоді мають місце порядкові рівності*

$$E_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{\theta}\right)_+}, \tag{5}$$

якщо $1 < p \leq q < \infty$, *та*

$$E_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)_+}, \tag{6}$$

якщо $1 < q < p < \infty$, $p \geq 2$ $(q_0 = \min\{q, 2\},\ a_+ = \max\{a, 0\})$.

Порядкові рівності (5) встановлено в роботі [4], а (6) — в [13].

2. Оцінки величин $e^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$ при $1 < q \leq p < \infty$. Результати, які стосуються оцінок величин $e^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$ при $1 < q \leq p < \infty$, сформулюємо у вигляді наступних теорем.

Теорема 1. *Нехай* $1 < q \leq p < \infty$, $p \geq 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > \max\left\{0; \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}\right\}$, *а також умову* (S_l). *Тоді має місце порядкова рівність*

$$e^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)},$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Теорема 2. *Нехай* $1 < q \leq p \leq 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > \max\left\{0; \frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}\right\}$, *а також умову* (S_l). *Тоді мають місце порядкові співвідношення*

$$\omega(2^{-n})n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)} \ll e_M^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \ll \omega(2^{-n})n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)},$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

***Доведення теорем* 1 *і* 2.** Оскільки при $p \geq 2$ має місце вкладення $B^{\Omega}_{p,\theta} \subset \subset B^{\Omega}_{2,\theta}$, то оцінка зверху в теоремі 1 випливає з оцінки зверху в теоремі 2 при $p = 2$. Оцінку зверху в теоремі 2 одержимо з теореми 1, скориставшись вкладенням $B^{\Omega}_{2,\theta} \subset B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 < p \leq 2$.

Встановимо спочатку оцінку зверху в теоремі 2 для випадку $1 \leq \theta < p$.

Нехай $f(x)$ — довільна функція із класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ і задано достатньо велике число M. Для наближення $f(x)$ будемо використовувати поліном

$$S_M(f,x) = \sum_{\|s\|_1 < n} \delta_s(f,x) + Q(x), \qquad M \asymp 2^n n^{d-1}.$$

Опишемо процедуру побудови полінома $Q(x)$.

Нехай $l \in \mathbb{N}$ і $l \in [n, n_0)$, де $n_0 = n + (d-1)\log n$. Для $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ покладемо

$$\tilde{S}_l = \left(\sum_{\|s\|_1 = l} \|\delta_s(f,\cdot)\|_p^{\theta}\, \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{7}$$

і позначимо через $\alpha_i(f,l)$ числа $\|\delta_s(f,\cdot)\|_p$, впорядковані за спаданням. Зазначимо, що індекс i змінюється в межах від 1 до K_l, де K_l — кількість векторів s, що задовольняють умову $\|s\|_1 = l$. Виходячи з рівності (7), маємо

$$\sum_{\|s\|_1 = l} \|\delta_s(f,\cdot)\|_p^{\theta} = \omega^{\theta}(2^{-l})\tilde{S}_l^{\theta},$$

або

$$\sum_{i=1}^{K_l} \alpha_i^{\theta}(f,l) = \omega^{\theta}(2^{-l})\tilde{S}_l^{\theta}.$$

З останнього співвідношення, враховуючи, що із зростанням індексу i числа $\alpha_i(f,l)$ не зростають, знаходимо

$$\alpha_i(f,l) \leq i^{-1/\theta}\omega^{\theta}(2^{-l})\tilde{S}_l. \tag{8}$$

Далі, кожному числу $l \in [n, n_0)$, $l \in \mathbb{N}$, поставимо у відповідність число m_l:

$$m_l = [2^n n^{d-1} 2^{-l} \tilde{S}_l^{\theta}] + 1, \tag{9}$$

де $[a]$ — ціла частина числа a. Зазначимо, що оскільки для $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ величина $\tilde{S}_l$ не перевищує одиницю, то для будь-якого $l \in \mathbb{N}$, $l \in [n, n_0)$, маємо

$$m_l \leq 2^n n^{d-1} 2^{-l} + 1 \ll n^{d-1}.$$

Іншими словами, числа m_l не перевищують кількості векторів s, які задовольняють співвідношення $l = \|s\|_1$, $l \in \mathbb{N}$, $l \in [n, n_0)$.

Розглянемо поліном

$$R(x) = \sum_{l=n}^{[n_0]} \sum_{\|s\|_1 = l} \delta_s(f, x) \tag{10}$$

і для кожного l візьмемо з внутрішньої суми (10) m_l „блоків” $\delta_s(f, x)$ за тими s, яким відповідають найбільші значення норми $\|\delta_s(f,\cdot)\|_p$. Одержаний в результаті так вибраних „блоків” $\delta_s(f, x)$ поліном позначимо через $Q(x)$.

У роботі [1] показано, що при виконанні співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$ кількість гармонік, які містяться в $S_M(f, x)$, не перевищує за порядком M.

Далі, нехай D_f позначає множину тих векторів s, $n \le \|s\|_1 < n_0$, за якими „блоки” $\delta_s(f, x)$ не містяться в $Q(x)$. Тоді для $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ маємо

$$\|f(\cdot) - S_M(f,\cdot)\|_q = \left\| f(\cdot) - \sum_{\|s\|_1 < n_0} \delta_s(f,\cdot) + \sum_{s \in D_f} \delta_s(f,\cdot) \right\|_q \le$$

$$\le \left\| f(\cdot) - \sum_{\|s\|_1 < n_0} \delta_s(f,\cdot) \right\|_q + \left\| \sum_{s \in D_f} \delta_s(f,\cdot) \right\|_q = I_1 + I_2. \tag{11}$$

Оцінимо обидва з одержаних доданків (11).

Використовуючи для оцінки I_1 теорему B при $1 \le \theta < p$ і враховуючи значення n_0 та ту обставину, що $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > \max\left\{0; \frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}\right\} = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}$, одержуємо

$$I_1 \ll \omega(2^{-n_0}) = \frac{\omega(2^{-n_0})}{2^{-\alpha n_0}} 2^{-\alpha n_0} \ll \omega(2^{-n}) 2^{-\alpha(n_0 - n)} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) n^{-\alpha(d-1)} \ll \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)}. \tag{12}$$

Оцінимо доданок I_2, використавши теорему A та нерівність [14, с. 43]

$$\left(\sum_k a_k^{\nu_2} \right)^{1/\nu_2} \le \left(\sum_k a_k^{\nu_1} \right)^{1/\nu_1}, \quad \nu_2 \ge \nu_1 > 0.$$

Врахувавши означення множини D_f і чисел $\alpha_i(f, l)$, одержимо

$$I_2 \le \left\| \sum_{s \in D_f} \delta_s(f,\cdot) \right\|_p \ll \left\| \left(\sum_{s \in D_f} |\delta_s(f,\cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \le$$

$$\le \left(\sum_{s \in D_f} \|\delta_s(f,\cdot)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left\{ \sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{i > m_l} \alpha_i^{\theta}(f, l)\, \alpha_i^{p-\theta}(f, l) \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{13}$$

Далі, використавши для оцінки $\alpha_i^{p-\theta}(f, l)$ співвідношення (8) і підставивши замість m_l його значення (9), з (13) отримаємо

$$I_2 \ll \left\{ \sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{i > m_l} \alpha_i^{\theta}(f, l) \left(i^{-\frac{1}{\theta}} \omega(2^{-l}) \tilde{S}_l \right)^{p-\theta} \right\}^{\frac{1}{p}} \ll$$

$$\ll \left\{ \sum_{l=n}^{[n_0]+1} m_l^{-\frac{p-\theta}{\theta}} \omega^{p-\theta}(2^{-l}) \tilde{S}_l^{p-\theta} \sum_{\|s\|_1=l} \|\delta_s(f,\cdot)\|_p^\theta \right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{ \sum_{l=n}^{[n_0]+1} m_l^{-\frac{p-\theta}{\theta}} \omega^p(2^{-l}) \tilde{S}_l^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq (2^n n^{d-1})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} \left(\frac{\omega(2^{-l})}{2^{-\alpha l}} 2^{-\alpha l} \right)^p 2^{lq\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}\right)} \tilde{S}_l^\theta \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (14)$$

Взявши до уваги, що $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > \max\left\{0; \frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}\right\} = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}$, а також формулу (7), продовжимо оцінку (14):

$$I_2 \ll (2^n n^{d-1})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} 2^{-lp\left(\alpha - \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}\right)\right)} \tilde{S}_l^\theta \right)^{\frac{1}{p}} \ll$$

$$\ll (2^n n^{d-1})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-n\left(\alpha - \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}\right)\right)} \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} \tilde{S}_l^\theta \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)} \|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}}^{\frac{\theta}{p}} \leq \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}. \qquad (15)$$

Нарешті, повертаючись до співвідношення (11) і враховуючи одержані оцінки (12), (15), приходимо до потрібної оцінки зверху для випадку $1 \leq \theta < p$:

$$e_M^\perp(B^\Omega_{p,\theta})_q \ll \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Перейдемо до встановлення оцінки зверху для випадку $p \leq \theta \leq \infty$. Зазначимо, що при $p \leq \theta \leq \infty$ умова $\alpha > \max\left\{0; \frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}\right\}$ рівносильна умові $\alpha > 0$. Оцінка зверху одержується з теореми B і реалізується при розгляді наближення функцій з класів $B^\Omega_{p,\theta}$ їх сумами Фур'є з „номерами" гармонік із „східчастогіперболічного хреста" $Q_n = \bigcup_{\|s\|_1 < n} \rho(s)$.

Оцінки зверху встановлено.

Перейдемо до встановлення оцінок знизу. При цьому будемо використовувати співвідношення

$$\|f(\cdot) - S_M(f,\cdot)\|_q = \sup_{\|g\|_{q'} \leq 1} \int_{\pi_d} (f(x) - S_M(f,x)) g(x)\,dx, \qquad (16)$$

де $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Далі, за заданим M підберемо $m \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб $2^m m^{d-1} \asymp M$, $2^m m^{d-1} \geq 2M$, і покладемо

$$F(x) = \sum_{\|s\|_1 = m} \prod_{j=1}^d R_{s_j}(x_j),$$

де

$$R_k(t) = \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \varepsilon_j e^{ijt}, \quad \varepsilon_j = \pm 1,$$

— поліноми Рудіна – Шапіро (див., наприклад, [15, с. 155]), які мають властивість

$$\| R_k \|_\infty \ll 2^{k/2}. \tag{17}$$

Нехай $1 \le \theta < \infty$. Тоді, використовуючи послідовно (1), нерівність Мінковського та співвідношення (17), отримуємо

$$\| F \|_{B^\Omega_{p,\theta}} = \omega^{-1}(2^{-m}) \left(\sum_{\|s\|_1 = m} \left\| \prod_{j=1}^d R_{s_j}(x_j) \right\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le \omega^{-1}(2^{-m}) \left(\sum_{\|s\|_1 = m} \prod_{j=1}^d \left\| R_{s_j}(x_j) \right\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \omega^{-1}(2^{-m}) 2^{m/2} \left(\sum_{\|s\|_1 = m} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp \omega^{-1}(2^{-m}) 2^{m/2} m^{(d-1)/\theta}.$$

Якщо ж $\theta = \infty$, то

$$\| F \|_{B^\Omega_{p,\infty}} = \sup_{\|s\|_1 = m} \frac{\| \delta_s(F, \cdot) \|_p}{\omega(2^{-\|s\|_1})} = \omega^{-1}(2^{-m}) \sup_{\|s\|_1 = m} \left\| \prod_{j=1}^d R_{s_j}(x_j) \right\|_p \ll$$

$$\ll \omega^{-1}(2^{-m}) \sup_{\|s\|_1 = m} 2^{\|s\|_1/2} = \omega^{-1}(2^{-m}) 2^{m/2}.$$

Отже, функції

$$f_1(x) = C_5 \omega(2^{-m}) 2^{-m/2} m^{-(d-1)/\theta} F(x), \quad C_5 > 0,$$

та

$$f_2(x) = C_6 \omega(2^{-m}) 2^{-m/2} F(x), \quad C_6 > 0,$$

належать до класів $B^\Omega_{p,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, та $B^\Omega_{p,\infty}$ відповідно.

Покажемо, що функція

$$g(x) = C_7 2^{-m/2} m^{-(d-1)/2} F(x)$$

з відповідною сталою $C_7 > 0$ задовольняє умову $\| g \|_{q'} \le 1$.

Дійсно, внаслідок теореми А, нерівності Мінковського і співвідношення (17)

$$\| F \|_{q'} \asymp \left\| \left(\sum_{\|s\|_1 = m} | \delta_s(F, \cdot) |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{q'} \le \left(\sum_{\|s\|_1 = m} \| \delta_s(F, \cdot) \|_{q'}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\sum_{\|s\|_1 = m} \prod_{j=1}^d \left\| R_{s_j}(x_j) \right\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll \left(\sum_{\|s\|_1 = m} 2^{\|s\|_1} \right)^{\frac{1}{2}} \asymp 2^{m/2} m^{(d-1)/2}.$$

Таким чином, згідно з співвідношеннями (16) для наведених вище функцій $f_1(x)$ та $g(x)$ будемо мати

$$e_M^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \;\geq\; e_M^{\perp}(f_1)_q \;=\; \inf_{S_M}\sup_{\|g\|_{q'}\leq 1}\int_{\pi_d}\big(f_1(x)-S_M(f_1,x)\big)g(x)\,dx \;\geq$$

$$\geq\; \inf_{S_M}\left|\int_{\pi_d}\big(f_1(x)-S_M(f_1,x)\big)g(x)\,dx\right| \;=$$

$$=\; C_5C_7\,\omega(2^{-m})2^{-m}m^{-(d-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\theta}\right)}\inf_{S_M}\left|\int_{\pi_d}\big(F(x)-S_M(F,x)\big)F(x)\,dx\right| \;>>$$

$$>>\; \omega(2^{-m})2^{-m}m^{-(d-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\theta}\right)}\inf_{S_M}\Big(\big|\,\|F\|_2^2-\|S_M(F,\cdot)\|_2^2\big|\Big) \;>>$$

$$>>\; \omega(2^{-m})2^{-m}m^{-(d-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\theta}\right)}\Big(2^m m^{d-1}-M\Big) \;>>\; \omega(2^{-m})m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}. \qquad (18)$$

Аналогічно, підставивши $f_2(x)$ та $g(x)$ в (16) і провівши такі ж оцінки, як у (18), одержимо

$$e_M^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\infty})_q \;>>\; \omega(2^{-m})m^{\frac{d-1}{2}}.$$

Оцінку знизу в теоремі 1 доведено і, таким чином, теореми 1 і 2 доведено.

Зазначимо, що в теоремі 2 у випадку $q = p$ вдалося встановити точний порядок величин $e_M^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\theta})_p$.

Теорема 2′. *Нехай* $1 < q = p < 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > \max\left\{0; \frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}\right\}$, *а також умову* (S_l). *Тоді має місце порядкова рівність*

$$e_M^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \;\asymp\; \omega(2^{-n})n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}, \qquad M \asymp 2^n n^{d-1}. \qquad (19)$$

Доведення. Оскільки оцінку зверху в (19) було встановлено при доведенні теореми 2, перейдемо до встановлення відповідної оцінки знизу.

За заданим числом M підберемо $n \in \mathbb{N}$ так, щоб $M \asymp 2^n n^{d-1}$ і кількість точок у множині

$$F_n = \bigcup_{\|s\|_1 = n}\rho(s)$$

була б більшою ніж $4M$. Розглянемо функції

$$f_3(x) \;=\; C_8\,\omega(2^{-n})2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)}n^{-\frac{d-1}{\theta}}\sum_{k\in F_n}e^{i(k,x)}, \quad C_8 > 0,$$

та

$$f_4(x) \;=\; C_9\,\omega(2^{-n})2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)}\sum_{k\in F_n}e^{i(k,x)}, \quad C_9 > 0.$$

Неважко переконатись, що ці функції належать до класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \leq \theta < \infty$, та $B^{\Omega}_{p,\infty}$ відповідно. Дійсно, оскільки

$$\left\| \sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,\cdot)} \right\|_p \asymp 2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \quad 1 < p < \infty,$$

то

$$\| f_3 \|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = C_8 \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\|s\|_1=n} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \left\| \sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,\cdot)} \right\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \omega^{-1}(2^{-n}) \left(\sum_{\|s\|_1=n} 2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} \left(\sum_{\|s\|_1=n} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} = 1.$$

Відповідно для функції $f_4(x)$ будемо мати

$$\| f_4 \|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_s \frac{\| \delta_s(f_4,\cdot) \|_p}{\Omega(2^{-s})} \ll \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} \sup_{\|s\|_1=n} \frac{\left\| \sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,\cdot)} \right\|_p}{\omega(2^{-\|s\|_1})} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} \omega^{-1}(2^{-n}) \sup_{\|s\|_1=n} 2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} = 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} 2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} = 1.$$

Далі, нехай Θ_M — довільний набір із M векторів $k^1,\ldots,k^M$, $k^j = (k_1^j,\ldots,k_d^j)$, з цілочисловими координатами. Для кожного вектора $s = (s_1,\ldots,s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, що задовольняє умову $\|s\|_1 = n$, розглянемо множину $\Theta_M \cap \rho(s)$. Внаслідок того, що $|F_n| > 4M$, множина

$$S = \left\{ s \in \mathbb{N}^d : \|s\|_1 = n, \quad |\Theta_M \cap \rho(s)| \le \frac{1}{2}|\rho(s)| \right\}$$

буде містити, принаймні, половину всіх s таких, що $\|s\|_1 = n$, а тому $|S| \asymp \asymp n^{d-1}$.

Далі нам знадобиться допоміжне твердження, яке сформулюємо у вигляді леми.

Лема А [16, с. 28]. *Нехай* $1 < p < q \le \infty$ *і* $f \in L_p(\pi_d)$. *Тоді*

$$\| f \|_p \gg \left(\sum_s \| \delta_s(f,\cdot) \|_q^p \, 2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)p} \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{20}$$

Нехай $t_M(x)$ — довільний поліном із „номерами” гармонік з Θ_M. Тоді для $f_3(x)$ згідно з (20) знаходимо

$$\| f_3(\cdot) - t_M(\cdot) \|_p \gg \left(\sum_{\|s\|_1=n} \| \delta_s(f_3 - t_M,\cdot) \|_2^p \, 2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)p} \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{s\in S} \| \delta_s(f_3 - t_M,\cdot) \|_2^p \right)^{\frac{1}{p}} 2^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \gg \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^{\frac{n}{2}} \left(\sum_{s\in S} 1 \right)^{\frac{1}{p}} 2^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} =$$

$$= \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} |S|^{\frac{1}{p}} \asymp \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{\frac{d-1}{p}} = \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Аналогічно, для функції $f_4(x)$ одержимо

$$\| f_4(\cdot) - t_M(\cdot) \|_p >> \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{p}} .$$

Оцінку знизу встановлено.

Теорему $2'$ доведено.

Сформулюємо два зауваження до одержаних результатів.

Зауваження. **1.** Поклавши в теоремах 1, 2 і $2'$ $\theta = \infty$ і взявши до уваги, що $\frac{1}{\theta} = 0$, будемо мати відповідні результати для класів H_p^Ω.

2. У випадку, коли $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, відповідні оцінки для величин $e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^r)_q$ встановив А. С. Романюк [12].

1. *Стасюк С. А.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів періодичних функцій багатьох змінних $B_{p,\theta}^\Omega$ // Теорія наближення функцій та суміжні питання. Математика та її застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **35**. – С. 195 – 208.
2. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
3. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. Т. II. Конструктивная теория функций (1931 – 1953). – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – 628 с.
4. *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1997. – **219**. – С. 356 – 377.
5. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. math. – 1994. – **20**, № 1. – P. 35 – 48.
6. *Бесов О. В.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // Докл. АН СССР. – 1959. – **126**, № 6. – С. 1163 – 1165.
7. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
8. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
9. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей” системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследование по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Ярослав. ун-т, 1988. – С. 16 – 33.
10. *Романюк А. С.* О приближении классов Бесова функций многих переменных частными суммами с заданным числом гармоник // Оптимизация методов приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 112 – 118.
11. *Романюк А. С.* Приближение классов функций многих переменных их ортогональными проекциями на подпространства тригонометрических полиномов // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 1. – С. 80 – 89.
12. *Романюк А. С.* Приближение классов периодических функций многих переменных // Мат. заметки. – 2002. – **71**, № 1. – С. 109 – 121.
13. *Стасюк С. А.* Найкращі наближення, колмогоровські та тригонометричні поперечники класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 11. – С. 1557 – 1568.
14. *Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
15. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 495 с.
16. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – 112 с.

Одержано 28.04.05,
після доопрацювання — 10.05.07