УДК 512.544

Н. Н. Семко, М. М. Пискун (Нац. ун-т гос. налог. службы Украины, Ирпень)

О ПРИМЕНЕНИИ НЕКОТОРЫХ ПОНЯТИЙ ТЕОРИИ КОЛЕЦ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ВЛИЯНИЯ СИСТЕМ ПОДГРУПП ГРУППЫ

We study the groups, in which the family $L_{\text{non-nn}}(G)$ of all not nearly normal subgroups has the Krull dimension. A subgroup H of the group G is said to be nearly normal if H has finite index in its normal closure.

Вивчаються групи, у яких система $L_{\text{non-nn}}(G)$ всіх підгруп, що не є наближено нормальними, має вимірність Крулля. Підгрупа H групи G називається наближено нормальною, якщо H має скінченний індекс у своєму нормальному замиканні.

Группы с обширными системами подгрупп, в том или ином смысле близких к нормальным, являются достаточно давним объектом исследований в теории групп. Наличие большого числа нормальных и близких к ним подгрупп оказывает очень сильное влияние на структуру группы. Образно говоря, чем больше группа имеет нормальных и близких к ним подгрупп, тем ближе такая группа к абелевой. Развитие теории групп с условиями конечности привело к появлению многих естественных обобщений нормальных подгрупп. Одним из таких обобщений являются приближенно нормальные подгруппы. Подгруппа H группы G называется *приближенно нормальной* в G, если она имеет конечный индекс в своем нормальном замыкании H^G. Подгруппы такого вида начал рассматривать Б. Нейман [1]. Он показал, что если любая подгруппа группы является приближенно нормальной, то группа имеет конечный коммутант. В работе Л. А. Курдаченко, Н. Ф. Кузенного и Н. Н. Семко [2] рассмотрены группы, у которых система всех приближенно нормальных подгрупп является плотной. Позднее С. Франциози и Ф. де Жиованні [3] рассмотрели группы, у которых упорядоченная по включению система $L_{\text{non-nn}}(G)$ всех подгрупп группы G, не являющихся почти нормальными, удовлетворяет условию минимальности, а в работе А. Галоппо [4] рассмотрена двойственная ситуация, т. е. были рассмотрены группы, у которых система $L_{\text{non-nn}}(G)$ удовлетворяет условию максимальности. В данной статье будет рассмотрено условие конечности, являющееся очень широким обобщением как условия минимальности, так и условия максимальности. Это ограничение появилось впервые в теории колец и оказалось весьма эффективным. Цель этой статьи — попытаться использовать его для изучения влияния на строения групп важных ее естественных систем подгрупп, в частности, системы $L_{\text{nn}}(G)$ всех ее приближенно нормальных подгрупп и системы $L_{\text{non-nn}}(G)$. Теория колец была первой, где начали рассматривать различные естественные ограничения на системы левых (соответственно правых) идеалов. Теория артиновых колец (т. е. колец с условием минимальности) и теория нетеровых колец (т. е. колец с условием максимальности) являются одними из наиболее развитых. В теории колец возникло много естественных и интересных обобщений артиновых и нетеровых колец. Одним из таких обобщений являются кольца, имеющие размерность Крулля.

Пусть A — частично упорядоченное множество. Для элементов $a, b \in A$ определим *замкнутый интервал с концами* a, b как подмножество

$$[a, b] = \left\{ x \in A \,\middle|\, a \leq x \leq b \right\}.$$

Определим *отклонение* $\operatorname{dev}(A)$ *частично упорядоченного множества* A (см., например, [5], определение 6.1) по следующему правилу.

Если на A *задан тривиальный порядок, то полагаем* $\operatorname{dev}(A) = -\infty$.

Если порядок, заданный на A, *нетривиален, но* A *удовлетворяет условию минимальности, то полагаем* $\operatorname{dev}(A) = 0$.

Для порядкового числа α *определим* $\operatorname{dev}(A) = \alpha$ *в случае, если* $\operatorname{dev}(A) \neq \beta < \alpha$ *и для любой убывающей цепочки* $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$ *элементов множества* A *все интервалы* $[a_n, a_{n+1}]$, *за исключением конечного множества замкнутых интервалов, имеют отклонение, строго меньшее чем* α.

Будем говорить, что *частично упорядоченное множество* A *имеет отклонение, если найдется порядковое число* α, *для которого* $\operatorname{dev}(A) = \alpha$.

Образно говоря, отклонение частично упорядоченного множества показывает, насколько оно удалено от множеств с условием минимальности, в частности от вполне упорядоченных множеств. Однако, частично упорядоченные множества, имеющие отклонение, можно рассматривать и как обобщение частично упорядоченных множеств с условием максимальности (см, например, [5], определение 6.1.8).

Понятие отклонения нашло полезные применения в теории колец и модулей, и само его возникновение связано с этой теорией. Напомним, что *кольцо* R *имеет размерность Крулля*, если упорядоченное по включению семейство всех его левых идеалов имеет отклонение (см., например, [5], определение 6.2.2). Это отклонение и называется *размерностью Крулля кольца* R и обозначается символом $K(R)$.

Пусть теперь G — группа и S — некоторое семейство подгрупп G. Мы можем рассматривать S как частично упорядоченное множество относительно теоретико-множественного включения. Поскольку в теории групп $[a, b]$ обозначает коммутатор элементов a, b, то для замкнутого интервала упорядоченного семейства S подгрупп с концами A, B будем использовать обозначение $[[A, B]]$, т. е.

$$[[A, B]] = \{ C \mid C \in S \ \text{ и } \ A \leq C \leq B \}.$$

Если частично упорядоченное семейство S имеет отклонение, то в этом случае будем говорить, что *семейство* S *имеет размерность Крулля*; под этой размерностью будем понимать *отклонение частично упорядоченного семейства* S и использовать для него *обозначение* $K_S(G)$. Если ν — некоторое теоретико-групповое свойство и

$$S = \left\{ H \,\middle|\, H\text{— подгруппа группы } \ G, \ \ \text{имеющая свойство } \ \nu \right\},$$

то вместо $K_S(G)$ будем писать $K_\nu(G)$.

Напомним, что группа G удовлетворяет слабому условию минимальности для подгрупп семейства S, если для любой убывающей последовательности

$$H_1 \geq H_2 \geq \ldots \geq H_n \geq \ldots$$

подгрупп семейства S найдется такой номер m, что индексы $|H_n : H_{n+1}|$ конечны при $n \geq m$. В этом случае каждый замкнутый интервал $[[H_n, H_{n+1}]]$ конечен и, в частности, удовлетворяет условию минимальности. Таким образом, если группа G удовлетворяет слабому условию минимальности для подгрупп семейства S, то семейство S имеет размерность Крулля, более того, $K_S(G) \leq 1$. Следовательно, мы получаем обобщение не только обычного условия минимальности для S-подгрупп, но и слабого условия минимальности для S-подгрупп.

Теперь в качестве семейства S рассмотрим семейство $L_{\text{non-nn}}(G)$ всех подгрупп группы G, которые не являются приближенно нормальными, и будем изучать группы, у которых это семейство имеет размерность Крулля. Соответствующую размерность будем обозначать через $K_{\text{non-nn}}(G)$.

1. Некоторые предварительные результаты. Отметим сразу, что если в группе G семейство всех подгрупп, не являющихся приближенно нормальными, имеет размерность Крулля, то, очевидно, это же справедливо для любой подгруппы группы G и любой ее фактор-группы, а значит, и для любой ее секции. В дальнейшем будем пользоваться этим без всяких ссылок.

Пусть G — группа, H — ее подгруппа. Будем говорить, что H является *равномерным произведением подгрупп* H_λ, $\lambda \in \Lambda$, если выполняются следующие условия:

1) $H_\lambda H_\mu = H_\mu H_\lambda$ для любой пары индексов λ, $\mu \in \Lambda$;

2) $H_\lambda \cap \langle H_\mu \mid \mu \neq \lambda \rangle = \langle 1 \rangle$.

Если H — равномерное произведение подгрупп H_λ, $\lambda \in \Lambda$, то будем записывать это с помощью символа $H = \mathrm{Un}_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$.

Если M — подмножество Λ, то обозначим символом $H\llparenthesis M \rrparenthesis$ подгруппу $\langle H_\lambda \mid \lambda \in M \rangle = \mathrm{Un}_{\lambda\in M} H_\lambda$.

Также обозначим через $\Lambda_{\mathrm{Un}}(H)$ семейство $\big\{H\llparenthesis M \rrparenthesis \mid M \subseteq \Lambda\big\}$. Семейство $\Lambda_{\mathrm{Un}}(H)$ частично упорядочено по включению. Обозначим через $[[K, L]]_{\mathrm{Un}}$ замкнутый интервал упорядоченного по включению семейства $\Lambda_{\mathrm{Un}}(H)$.

1.1. Лемма. *Пусть G — группа и H — такая ее подгруппа, что $H = \mathrm{Un}_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$. Если семейство $\Lambda_{\mathrm{Un}}(H)$ имеет отклонение, то множество индексов Λ конечно.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть Λ бесконечно. Пусть, далее, α — порядковое число, для которого $\mathrm{dev}\,\big(\Lambda_{\mathrm{Un}}(H)\big) = \alpha$. Будем доказывать это утверждение, используя индукцию по числу α. Пусть сначала $\alpha = 0$. Из бесконечности множества Λ получаем существование бесконечной убывающей цепочки

$$\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \ldots \supset \Lambda_n \supset \ldots$$

бесконечных подмножеств Λ. Однако существование такой цепочки влечет за собой существование бесконечной цепочки подгрупп

$$H\llparenthesis \Lambda_1 \rrparenthesis > H\llparenthesis \Lambda_2 \rrparenthesis > \ldots > H\llparenthesis \Lambda_n \rrparenthesis > \ldots .$$

С другой стороны, равенство $\mathrm{dev}\,\big(\Lambda_{\mathrm{Un}}(H)\big) = 0$ означает, что упорядоченное по включению множество $\Lambda_{\mathrm{Un}}(H)$ удовлетворяет условию минимальности, и мы получаем противоречие, которое доказывает утверждение для случая $\mathrm{dev}\,\big(\Lambda_{\mathrm{Un}}(H)\big) = 0$.

Допустим теперь, что $\alpha > 0$ и утверждение доказано для всех порядковых чисел, строго меньших α. Использовав бесконечность множества Λ, найдем в нем бесконечную убывающую цепочку

$$\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \ldots \supset \Lambda_n \supset \ldots$$

таких подмножеств Λ, что разности $M_n = \Lambda_n \backslash \Lambda_{n+1}$ бесконечны при любом $n \in \mathbb{N}$. Снова получаем бесконечную цепочку подгрупп

$$H\langle\!\langle \Lambda_1 \rangle\!\rangle > H\langle\!\langle \Lambda_2 \rangle\!\rangle > \ldots > H\langle\!\langle \Lambda_n \rangle\!\rangle > \ldots .$$

Найдется такой номер $k \in \mathbb{N}$, что $\mathrm{dev}([[H\langle\!\langle \Lambda_n \rangle\!\rangle, H\langle\!\langle \Lambda_{n+1} \rangle\!\rangle]]_{\mathrm{Un}}) < \alpha$ для всех $n \geq$ $\geq k$. Однако $H\langle\!\langle \Lambda_n \rangle\!\rangle = H\langle\!\langle M_n \rangle\!\rangle H\langle\!\langle \Lambda_{n+1} \rangle\!\rangle$ и $H\langle\!\langle M_n \rangle\!\rangle \cap H\langle\!\langle \Lambda_{n+1} \rangle\!\rangle = \langle 1 \rangle$. Нетрудно показать, что упорядоченные по включению множества $[[H\langle\!\langle \Lambda_n \rangle\!\rangle, H\langle\!\langle \Lambda_{n+1} \rangle\!\rangle]]_{\mathrm{Un}}$ и $\Lambda_{\mathrm{Un}}(H\langle\!\langle M_n \rangle\!\rangle)$ изоморфны. Отсюда следует, что $\Lambda_{\mathrm{Un}}(H\langle\!\langle M_n \rangle\!\rangle)$ имеет отклонение и $\mathrm{dev}\big(\Lambda_{\mathrm{Un}}(H\langle\!\langle M_n \rangle\!\rangle)\big) < \alpha$. Вследствие индуктивного допущения это означает, что подмножество M_n должно быть конечным для $n \geq k$. Это последнее противоречие и доказывает лемму.

1.2. Лемма. *Пусть G — группа, для которой $K_{\text{non-nn}}(G)$ существует. Предположим, что L, K, H — подгруппы G, удовлетворяющие следующим условиям*:

i) *L — нормальная подгруппа K*;

ii) $H \cap K \leq L$;

iii) *$K/L = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda / L$, где $K_\lambda \neq L$, K_λ — H-инвариантная подгруппа для всех $\lambda \in \Lambda$, в частности, подгруппы K и L H-инвариантны*;

iv) *множество индексов Λ бесконечно.*

Тогда подгруппа HL приближенно нормальна в G.

Доказательство. Бесконечность множества Λ влечет существование таких бесконечных подмножеств Δ, Σ из Λ, что $\Delta \cap \Sigma = \varnothing$, $\Delta \cup \Sigma = \Lambda$. Допустим, что подгруппа $HK\langle\!\langle M \rangle\!\rangle$ не является приближенно нормальной в G для любого бесконечного подмножества $M \subseteq \Delta$. Отсюда следует, что упорядоченное по включению семейство подгрупп $\big\{HK\langle\!\langle M \rangle\!\rangle \mid M \subseteq \Delta\big\}$ имеет отклонение. Нетрудно убедиться в том, что это упорядоченное множество изоморфно упорядоченному множеству $\Lambda_{\mathrm{Un}}\big(K\langle\!\langle \Delta \rangle\!\rangle / L\big)$ (отметим, что $K\langle\!\langle \Delta \rangle\!\rangle / L = \times_{\lambda \in \Delta} K_\lambda / L$, а прямое произведение является частным случаем равномерного произведения). Отсюда вытекает, что упорядоченное множество $\Lambda_{\mathrm{Un}}\big(K\langle\!\langle \Delta \rangle\!\rangle / L\big)$ имеет отклонение. В силу леммы 1.1 это влечет конечность подмножества Δ, и мы получаем противоречие с его выбором. Полученное противоречие показывает, что существует бесконечное подмножество $M \subseteq \Delta$, для которого $HK\langle\!\langle M \rangle\!\rangle$ приближенно нормальна в G. Аналогичные рассуждения показывают, что Σ включает в себя бесконечное подмножество Γ, для которого $HK\langle\!\langle \Gamma \rangle\!\rangle$ приближенно нормальна в G. Из выбора подмножеств Δ, Σ получаем равенство $HL = HK\langle\!\langle M \rangle\!\rangle \cap HK\langle\!\langle \Gamma \rangle\!\rangle$. Поскольку пересечение двух приближенно нормальных подгрупп является приближенно нормальной подгруппой [6] (лемма 1), HL приближенно нормальна в G.

1.3. *Следствие.* *Пусть G — группа, для которой $L_{non\text{-}nn}(G)$ существует. Предположим, что L, K, H — подгруппы G, удовлетворяющие следующим условиям*:

i) *L — нормальная подгруппа K*;

ii) *$K/L = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda / L$, где $K_\lambda \neq L$, K_λ — H-инвариантная подгруппа для всех $\lambda \in \Lambda$, в частности, подгруппы K, L H-инвариантны*;

iii) *подмножество $\Lambda \backslash \mathrm{Supp}\big(HL/L \cap K/L\big)$ бесконечно.*

Тогда подгруппа HL приближенно нормальна в G.

Доказательство. Положим $M = \Lambda\setminus \operatorname{Supp}\big(HL/L \cap K/L\big)$ и $T/L = \times_{\lambda\in M} K_\lambda/L$. Применяя теперь лемму 1.2 к подгруппам H, T, L, получаем требуемый результат.

1.4. ***Следствие.*** *Пусть G — группа, для которой $K_{\text{non-nn}}(G)$ существует. Предположим, что L, K, H — подгруппы G, удовлетворяющие следующим условиям*:

i) *L — нормальная подгруппа K;*

ii) *$K/L = \times_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda/L$, где $K_\lambda \neq L$, K_λ — H-инвариантная подгруппа для всех $\lambda\in\Lambda$, в частности, подгруппы K и L H-инвариантны*;

iii) *множество индексов Λ бесконечно.*

Тогда для любого элемента $h \in H$ подгруппа $\langle h\rangle L$ приближенно нормальна в G.

Доказательство. Поскольку K_λ H-инвариантна, то она и $\langle h\rangle$-инвариантна. Очевидно, подмножество $\operatorname{Supp}\big(\langle h\rangle L/L \cap K/L\big)$ конечно, а потому $M = \Lambda\setminus \operatorname{Supp}\big(\langle h\rangle L/L\cap K/L\big)$ будет бесконечным и можно применить следствие 1.3.

Следствие доказано.

Если G — группа, x — ее элемент, то через x^G обозначим класс элементов, сопряженных с x, т. е. подмножество $\{g^{-1}xg \mid g\in G\}$. Положим

$$FC(G) = \{x\in G \mid x^G \ \text{ конечно}\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что $FC(G)$ — характеристическая подгруппа группы G. Ее называют *FC-центром* группы G.

1.5. ***Следствие.*** *Пусть G — группа, для которой $K_{\text{non-nn}}(G)$ существует. Предположим, что K, H — подгруппы G, удовлетворяющие следующим условиям*:

i) *$K = \times_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$, где K_λ — неединичная H-инвариантная подгруппа для всех $\lambda\in\Lambda$;*

ii) *множество индексов Λ бесконечно.*

Тогда $H \leq FC(G)$.

Действительно, из следствия 1.4 получаем, что подгруппа $\langle h\rangle$ приближенно нормальна в G для любого элемента $h\in H$. Остается отметить, что приближенно нормальная циклическая подгруппа группы содержится в ее FC-центре [1] (лемма 3.6).

1.6. ***Следствие.*** *Пусть G — группа, для которой $K_{\text{non-nn}}(G)$ существует. Если K — такая подгруппа группы G, что $K = \times_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$, где подгруппы K_λ неединичны для всех $\lambda\in\Lambda$ и множество индексов Λ бесконечно, то $K \leq FC(G)$.*

1.7. ***Следствие.*** *Пусть G — группа, для которой $K_{\text{non-nn}}(G)$ существует. Предположим, что L, K — подгруппы G, удовлетворяющие следующим условиям*:

i) *L — нормальная подгруппа K;*

ii) *$K/L = \times_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda/L$, где $K_\lambda \neq L$ для всех $\lambda\in\Lambda$;*

iii) *множество Λ бесконечно.*

Тогда подгруппы K, L приближенно нормальны в G.

Доказательство. Бесконечность множества Λ влечет существование таких бесконечных подмножеств Δ, Σ из Λ, что $\Delta\cap\Sigma = \varnothing$, $\Delta\cup\Sigma = \Lambda$. Положим $U = \times_{\lambda\in\Delta} K_\lambda/L$, $V = \times_{\lambda\in\Sigma} K_\lambda/L$, тогда, очевидно, $K = UV$ и $U\cap V = L$. Кроме того, имеем $K/U \cong \times_{\lambda\in\Sigma} K_\lambda/L$ и $K/V \cong \times_{\lambda\in\Delta} K_\lambda/L$. Из леммы 1.2 получаем, что подгруппы U, V приближенно нормальны. Поскольку пересечение двух приближенно нормальных подгрупп и подгруппа, порожденная ими, приближенно нормальны [6] (лемма 1), то требуемое утверждение вытекает из равенств $K = UV$ и $U \cap V = L$.

2. Абелевы секции групп, у которых семейство $K_{\text{non-nn}}(G)$ имеет размерность Крулля.

2.1. Лемма. *Пусть G — группа, для которой $K_{\text{non-nn}}(G)$ существует. Если подгруппа H не является приближенно нормальной в G, то фактор-группа $H/[H,H]$ будет минимаксной.*

Доказательство. Выберем в абелевой группе $H/[H,H]$ такую свободную абелеву подгруппу $F/[H,H]$, что фактор-группа H/F будет периодической. Из следствия 1.7 вытекает, что множество $\Pi(H/F)$ должно быть конечным. Пусть $F/[H,H] = \times_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$, где C_λ — бесконечная циклическая группа для любого $\lambda \in \Lambda$. Пусть теперь p — простое число, не принадлежащее множеству $\Pi(H/F)$. Имеем $D/[H,H] = \big(F/[H,H]\big)^p = \times_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda^p$. Если предположить теперь, что множество индексов Λ бесконечно, то фактор-группа F/D будет бесконечной элементарной абелевой p-группой. Из выбора простого числа p получаем, что F/D — силовская p-подгруппа H/D, так что $H/D = F/D \times Q/D$, где Q/D — силовская p'-подгруппа H/D. Тогда $H/Q \cong (H/D)/(Q/D) \cong F/D$ является бесконечной элементарной абелевой p-группой. Но в этом случае согласно следствию 1.7 подгруппа H должна быть приближенно нормальной. Полученное противоречие показывает, что множество индексов Λ конечно, а значит, фактор-группа $F/[H,H]$ будет конечнопорожденной.

Пусть $r \in \Pi(H/F)$ и R/F — силовская r-подгруппа H/F. Поскольку R/F изоморфна некоторой фактор-группе H, применяя снова следствие 1.7, получаем, что фактор-группа $(R/F)/(R/F)^p$ должна быть конечной. В свою очередь это означает, что $R/F = K/F \times C/F$, где подгруппа K/F конечна, а C/F делима (см. [7], лемму 3). Отсюда вытекает, что H имеет делимую r-фактор-группу, изоморфную C/F. Эта фактор-группа будет прямым произведением квазициклических r-групп (см., например, [8], теорему 23.1). Принимая во внимание следствие 1.7, получаем, что число этих квазициклических множителей должно быть конечным. Это означает, что подгруппа C/F будет черниковской. Из конечности K/F получаем, что и R/F черниковская. Поскольку это справедливо для любой силовской подгруппы H/F и, как мы видели выше, множество $\Pi(H/F)$ конечно, то и вся фактор-группа H/F будет черниковской. Таким образом, абелева группа $H/[H,H]$ является расширением конечнопорожденной подгруппы $F/[H,H]$ с помощью черниковской группы H/F. Это и означает, что $H/[H,H]$ минимаксна.

2.2. ***Следствие.*** *Пусть G — группа, для которой $K_{\text{non-nn}}(G)$ существует. Если абелева подгруппа H не является приближенно нормальной в G, то H минимаксна.*

Теперь напомним некоторые необходимые понятия теории модулей. Пусть R — коммутативное кольцо, A — R-модуль. Положим

$$t_R(A) = \{a \in A \mid \mathrm{Ann}_R(a) \neq \langle 0\rangle\}.$$

Если R — область целостности, то $t_R(A)$ будет подмодулем A. В этом случае подмодуль $t_R(A)$ называется *R-периодической частью модуля A*. Модуль A называется *R-периодическим, если $A = t_R(A)$*; будем говорить, что *A не имеет R-кручения, если подмодуль $t_R(A)$ нулевой.*

Пусть D — дедекиндова область. Положим

$$\mathrm{Spec}(D) = \big\{P \mid P \text{ — максимальный идеал } D\big\}.$$

Если I — идеал D, то положим

$$A_I = \big\{a \in A \mid aI^n = \langle 0\rangle \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}\big\}.$$

Легко видеть, что A_I — D-подмодуль A. A_I называют *I-компонентой* A. Если A совпадает со своей I-компонентой, то будем говорить, что A — *I-модуль над кольцом* D. Далее, пусть

$$\Omega_{I,n}(A) = \{a \in A \mid aI^n = \langle 0\rangle\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что $\Omega_{I,n}(A)$ — D-подмодуль и $\Omega_{I,n}(A) \le \Omega_{I,n+1}(A)$, $n \in \mathbb{N}$, так что $\cup_{n\in\mathbb{N}}\Omega_{I,n}(A) = A_I$.

Положим $\mathrm{Ass}_D(A) = \big\{P \in \mathrm{Spec}(D) \mid A_P \ne \langle 0\rangle\big\}$. Тогда $t_D(A) = \oplus_{P\in\pi}A_P$, где $\pi = \mathrm{Ass}_D(A)$ (см., например, [9], следствие 6.25).

Пусть D — дедекиндова область, C — простой D-модуль, тогда $C \cong D/P$ для некоторого $P \in \mathrm{Spec}(D)$. Обозначим D-инъективную оболочку C через C_{P^∞}. Модуль C_{P^∞} называется *прюферовым P-модулем*. Как и в теории абелевых групп, можно показать, что

$$C_{P^\infty} \cong \lim\mathrm{inj}\,\big\{D/P^n \mid n \in \mathbb{N}\big\}.$$

По построению C_{P^∞} — P-модуль, причем $\Omega_{P,k}(C_{P^\infty}) \cong D/P^k$ и

$$\Omega_{P,k+1}(C_{P^\infty})/\Omega_{P,k}(C_{P^\infty}) \cong (D/P^{k+1})/(P/P^{k+1}) \cong D/P$$

для любого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, если E — собственный D-подмодуль C_{P^∞}, то найдется такое число $k \in \mathbb{N}$, что $E = \Omega_{P,k}(C_{P^\infty})$. Действительно, если $b \notin \Omega_{P,k}(C_{P^\infty})\backslash\Omega_{P,k-1}(C_{P^\infty})$, то $C = bD$. Отметим также, что прюферов P-модуль C_{P^∞} монолитичен и его монолит совпадает с $\Omega_{P,1}(C_{P^\infty})$.

Если D — дедекиндова область, A — артинов D-модуль, то A является D-периодическим, так что $A = \oplus_{P\in\pi}A_P$, где множество $\pi = \mathrm{Ass}_D(A)$ конечно. Далее, $A_P = C_1 \oplus \ldots \oplus C_k \oplus E_1 \oplus \ldots \oplus E_d$, где C_j, $1 \le j \le k$, — циклический P-модуль, E_j, $1 \le j \le d$, — прюферов P-модуль (см., например, [10], теорему 5.7).

2.3. Лемма. *Пусть G — группа, для которой $K_{\text{non-nn}}(G)$ существует. Если g — элемент группы G, для которого существует $\langle g\rangle$-инвариантная бесконечная элементарная абелева p-подгруппа A, то A включает в себя $\langle g\rangle$-инвариантную подгруппу B, любая подгруппа которой $\langle g\rangle$-инвариантна.*

Доказательство. Пусть $J = F_p\langle x\rangle$ — групповое кольцо бесконечной циклической группы $\langle x\rangle$ над простым полем F_p. Действие элемента x на A определим по правилу $ax = g^{-1}ag$, $a \in A$. Это действие можно расширить естественным образом до действия на A всего кольца J. Таким образом, A становится модулем над J. Отметим, что групповое кольцо J является областью главных идеалов, в частности, оно является дедекиндовой областью. Предположим сначала, что A не является J-периодическим. Тогда найдется такой элемент $a \in A$, что $\mathrm{Ann}_J(a) = \langle 0\rangle$. В этом случае имеем $S = \langle a\rangle^{\langle g\rangle} = aJ \cong J$. Положим $K = F_p\langle x^p\rangle$, тогда

$$J = K \oplus Kx \oplus Kx^2 \oplus \ldots \oplus Kx^{p-1}.$$

Пусть $C = aK$, тогда C имеет бесконечный индекс в A и $CJ = S$ или, в мультипликативных обозначениях, $C^{\langle g \rangle} = S$. Из следствия 1.7 вытекает, что любая подгруппа A приближенно нормальна в G. В частности, подгруппа C приближенно нормальна в $\langle A, g \rangle$. Это означает, что индекс $|C^{\langle g \rangle} : C| = |S : C|$ должен быть конечным. Полученное противоречие показывает, что модуль A будет J-периодическим.

Пусть $\pi = \mathrm{Ass}_D(A)$, тогда $A = \oplus_{P \in \pi} A_P$, где A_P — P-компонента A. Положим $\sigma = \pi \backslash \{(x-1)J \cup \ldots \cup (x-p+1)J\}$, $E = \oplus_{P \in \sigma} \Omega_{P,1}(A)$. Тогда $E = \oplus_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$, где C_λ — простой J-подмодуль для любого $\lambda \in \Lambda$. Кроме того, $C_\lambda \cong J/P_\lambda$, где P_λ — простой идеал кольца J и $P_\lambda \neq (x-k)J$, $1 \leq k \leq p-1$, $\lambda \in \Lambda$. Отсюда следует, что C_λ конечен и $|C_\lambda| > p$. Допустим, что множество Λ бесконечно. Выберем в каждом C_λ неединичный элемент c_λ и положим $U = \langle c_\lambda | \lambda \in \Lambda \rangle$. Вследствие такого выбора U имеет бесконечный индекс в E и $UJ = E$ или, в мультипликативных обозначениях, $U^{\langle g \rangle} = E$. Как уже отмечалось выше, любая подгруппа A приближенно нормальна в G. В частности, подгруппа U приближенно нормальна в $\langle A, g \rangle$. Это означает, что индекс $|U^{\langle g \rangle} : U| = |E : U|$ должен быть конечным. Полученное противоречие показывает, что множество индексов Λ конечно. Это влечет за собой тот факт, что E — артинов J-модуль (см., например, [10], лемму 5.6). Тогда либо E конечен, либо E включает в себя прюферов P-модуль V для некоторого $P \in \sigma$. Во втором случае из того факта, что аддитивная группа V — бесконечная элементарная абелева, получаем существование в V такой бесконечной подгруппы W, что и индекс $|V : W|$ бесконечен. В то же время любой собственный J-подмодуль V будет конечным, а потому $WJ = V$ или, в мультипликативных обозначениях, $W^{\langle g \rangle} = V$. Как уже отмечалось выше, W приближенно нормальна в $\langle A, g \rangle$. Это означает, что индекс $|W^{\langle g \rangle} : W| = |V : W|$ должен быть конечным. Полученное противоречие доказывает, что E конечна.

Выберем теперь простой идеал P из множества $\pi \backslash \sigma$ и допустим, что фактор-модуль $\Omega_{P,2}(A)/\Omega_{P,1}(A)$ бесконечен. Поскольку аддитивная группа $\Omega_{P,2}(A)$ является элементарной абелевой, то $\Omega_{P,2}(A) = \Omega_{P,1}(A) \oplus Y$ для некоторой подгруппы Y. В частности, Y бесконечна, имеет бесконечный индекс в $\Omega_{P,2}(A)$ и $YJ = \Omega_{P,2}(A)$ или, в мультипликативных обозначениях, $Y^{\langle g \rangle} = \Omega_{P,2}(A)$. Как и выше, индекс $|Y^{\langle g \rangle} : Y| = |\Omega_{P,2}(A) : Y|$ должен быть конечным, и снова получаем противоречие, которое доказывает конечность $\Omega_{P,2}(A)/\Omega_{P,1}(A)$. Если допустить теперь, что $A_P/\Omega_{P,1}(A)$ бесконечна, то, используя рассуждения, приводимые выше, получаем, что $A_P/\Omega_{P,1}(A)$ включает в себя прюферов P-подмодуль. Снова приходим к противоречию. Таким образом, конечность $A_P/\Omega_{P,1}(A)$ доказана. В частности, $\mathrm{Ann}_J(A_P) \neq \langle 0 \rangle$. В этом случае имеем разложение $A_P = \oplus_{\mu \in M} L_\mu$, где L_μ — циклический J-подмодуль для любого $\lambda \in \Lambda$ (см., например, [11], теорему 6.14). Положим $M_P = \{\mu \in M \,\big|\, |L_\mu| > p\}$. Из конечности $A_P/\Omega_{P,1}(A)$ вытекает теперь конечность подмножества M_P. Но тогда $A_P = X_P \oplus Z_P$, где X_P, Z_P — J-подмодули (т. е. они будут $\langle g \rangle$-инвариантными), X_P конечен, а Z_P — однородный полупростой J-подмодуль, любой простой подмодуль которого имеет простой порядок p. Положим теперь $B = \oplus_{P \in \pi \backslash \sigma} Z_P$. Вследствие такого выбора B будет $\langle g \rangle$-инвариантной подгруппой, имеющей в A конечный индекс, и любая подгруппа B, очевидно, является $\langle g \rangle$-инвариантной.

2.4. *Следствие.* *Пусть G — группа, для которой $K_{\text{non-nn}}(G)$ существует. Если H — подгруппа группы G, для которой существует H-инвариантная бесконечная элементарная абелева p-подгруппа A, то $H \leq FC(G)$.*

Доказательство. Пусть h — произвольный элемент подгруппы H. Поскольку A H-инвариантна, то она будет и $\langle h \rangle$-инвариантной. Из леммы 2.3 следует, что A включает в себя $\langle h \rangle$-инвариантную подгруппу B конечного индекса, любая подгруппа которой также $\langle h \rangle$-инвариантна. В частности, B — бесконечная элементарная абелева подгруппа. Из следствия 1.5 получаем включение $h \in FC(G)$. Так как оно имеет место для любого элемента $h \in H$, то $H \leq FC(G)$.

2.5. *Следствие.* *Пусть G — группа, для которой $K_{\text{non-nn}}(G)$ существует. Если G включает в себя бесконечную нормальную элементарную абелеву p-подгруппу, то G — FC-группа.*

2.6. Лемма. *Пусть G — группа, H — ее подгруппа. Предположим, что G включает в себя H-инвариантную абелеву подгруппу A без кручения. Если B — сервантная приближенно нормальная в G подгруппа A, то B H-инвариантна.*

Доказательство. Пусть $D = B^H$. Поскольку A H-инвариантна, то $D \leq A$. Будучи приближенно нормальной в G, подгруппа B приближенно нормальна и в $\langle A, H \rangle$. Отсюда следует, что фактор-группа D/B конечна. С другой стороны, поскольку B сервантна в A, то фактор-группа A/B не имеет кручения. Это и доказывает равенство $D = B$, которое показывает, что B — H-инвариантная подгруппа.

2.7. Лемма. *Пусть G — группа, для которой $K_{\text{non-nn}}(G)$ существует. Если H — подгруппа группы G, для которой существует H-инвариантная свободная абелева подгруппа F бесконечного ранга, то $H \leq FC(G)$.*

Доказательство. Имеем $F = \times_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$, где C_λ — бесконечная циклическая группа для любого $\lambda \in \Lambda$. Из следствия 1.7 вытекает, что каждая из подгрупп C_λ приближенно нормальна в G. Каждая из этих подгрупп также будет сервантной в F. Из леммы 2.6 получаем, что C_λ H-инвариантна для любого $\lambda \in \Lambda$. Применив теперь следствие 1.5, получим включение $H \leq FC(G)$.

2.8. *Следствие.* *Пусть G — группа, для которой $K_{\text{non-nn}}(G)$ существует. Если G включает в себя нормальную свободную абелеву подгруппу бесконечного ранга, то G — FC-группа.*

3. Строение групп, у которых семейство $K_{\text{non-nn}}(G)$ имеет размерность Крулля.

3.1. Лемма. *Пусть G — группа, для которой $K_{\text{non-nn}}(G)$ существует. Если G — FC-группа, то G имеет конечный коммутант.*

Доказательство. Пусть A — произвольная абелева подгруппа G. Если A не является минимаксной, то из следствия 2.2 вытекает, что A приближенно нормальна в G. Допустим теперь, что A — минимаксная подгруппа. Положим $B = A \cap \zeta(G)$. В силу теоремы Р. Бэра (см., например, [12], теорему 1.4), фактор-группа $G/\zeta(G)$ будет периодической. Это означает, что A/B — черниковская группа. Обозначим через D/B максимальную делимую подгруппу A/B. Так как G — FC-группа, то ее центр включает в себя любую делимую подгруппу (см., например, [12], теорему 1.9), так что $D/B \leq \zeta(G/B)$. Подгруппа D/B имеет в A/B конечный индекс, поэтому существует конечная подгруппа K/B, для которой $A/B = (D/B)(K/B)$. Так как G — FC-группа, то $L/B = (K/B)^{G/B}$ конечна.

Включение $D/B \leq \zeta(G/B)$ показывает, что $(D/B)(L/B)$ — нормальная подгруппа G/B. Теперь имеем

$$|L : A| = |LD : KD| = |LD/B : KD/B| =$$

$$= \big|(LD/B)(KD/B) : (KD/B)\big| = \big|(L/B) : (L/B) \cap (KD/B)\big| =$$

$$= \big|(L/B) : (K/B)(L/B \cap D/B)\big| \leq |L/B : K/B|.$$

Последний индекс конечен, а это влечет конечность индекса $|A^G : A|$. Таким образом, любая абелева подгруппа приближенно нормальна в G. В этом случае группа G имеет конечный коммутант [12] (теорема 7.17).

3.2. Лемма. *Пусть G — группа, для которой $K_{\text{non-nn}}(G)$ существует. Если G включает в себя бесконечную элементарную абелеву p-подгруппу для некоторого простого числа p, то G имеет конечный коммутант.*

Доказательство. Пусть A — бесконечная элементарная абелева p-подгруппа G. Из следствия 2.2 вытекает, что A приближенно нормальна в G. Обозначим через K нормальное замыкание в G подгруппы A, тогда индекс $|K : A|$ будет конечным. В этом случае подгруппа A включает нормальную в K подгруппу B конечного индекса. В частности, B — бесконечная элементарная абелева p-подгруппа. Выберем в подгруппе K конечную подгруппу F со свойством $K = FA$. Очевидно, подгруппа B является F-инвариантной, поэтому из следствия 2.4 получаем включение $F \leq FC(G)$. В силу леммы Дицмана (см., например, [12], лемму 1.3), подгруппа $E = F^G$ будет конечной. В фактор-группе G/E нормальная подгруппа $K/E = FA/E = EA/E \cong A/(A \cap E)$ является бесконечной элементарной абелевой и следствие 2.5 показывает, что G/E — FC-группа, а применение леммы 3.1 доказывает конечность коммутанта группы G/E. Из того факта, что подгруппа E конечна, получаем конечность коммутанта всей группы G.

3.3. *Следствие.* *Пусть G — группа, для которой $K_{\text{non-nn}}(G)$ существует. Если G включает в себя периодическую абелеву подгруппу, не являющуюся черниковской, то G имеет конечный коммутант.*

Доказательство. Пусть A — периодическая абелева подгруппа, не являющаяся черниковской. Предположим, что для некоторого простого числа p силовская p-подгруппа P подгруппы A также не является черниковской. Такая ситуация обязательно возникает, когда множество $\Pi(A)$ конечно. В этом случае нижний слой S подгруппы P бесконечен, т. е. S — бесконечная элементарная абелева p-подгруппа G. Из леммы 3.2 получаем теперь, что G имеет конечный коммутант.

Предположим теперь, что для любого простого числа p силовская p-подгруппа A будет черниковской. Согласно условиям леммы, это влечет бесконечность множества $\Pi(A)$. В этом случае A включает в себя подгруппу $B = \times_{p\in\Pi(A)} B_p$, где B_p — конечная неединичная p-подгруппа, $p \in \Pi(A)$. Поскольку B не является минимаксной, из следствия 2.2 вытекает, что B приближенно нормальна в G. Обозначим через K нормальное замыкание в G подгруппы B, тогда индекс $|K : B|$ будет конечным. В этом случае подгруппа B включает нормальную в K подгруппу C конечного индекса. Пусть $|K : C| = d$, $D = K^d$. Так как силовские подгруппы K конечны, то фактор-группа K/D конечна. Подгруппа D, являясь характеристической в K, нормальна в G. Из конечности K/D вытекает бесконечность множества

$\Pi(D)$. Из следствия 1.5 получаем, что G — FC-группа, а применение леммы 3.1 доказывает конечность коммутанта группы G.

3.4. Лемма. *Пусть G — группа, для которой $K_{\text{non-nn}}(G)$ существует. Если G включает в себя свободную абелеву подгруппу бесконечного ранга, то G имеет конечный коммутант.*

Доказательство. Пусть F — свободная абелева подгруппа бесконечного ранга. Из следствия 2.2 вытекает, что F приближенно нормальна в G. Обозначим через K нормальное замыкание в G подгруппы F, тогда индекс $|K : F|$ будет конечным. В этом случае подгруппа B включает нормальную в K подгруппу C конечного индекса. Пусть $|K : C| = d$, $D = K^d$. Порядки элементов фактор-группы K/D являются делителями числа d; в частности, эта фактор-группа будет периодической. Это означает, что подгруппа D неединична и потому свободная абелева (см., например, [8], теорему 14.5). Снова принимая во внимание тот факт, что K/D периодическая, получаем бесконечность ранга подгруппы D. Подгруппа D, будучи характеристической в K, нормальна в G. Из следствия 2.8 получаем, что G — FC-группа, а применение леммы 3.1 доказывает конечность коммутанта группы G.

Группу G назовем *обобщенно радикальной*, если она имеет возрастающий ряд нормальных подгрупп, факторы которого либо локально нильпотентны, либо локально конечны.

3.5. Теорема. *Пусть G — обобщенно радикальная группа. Если система ее подгрупп, не являющихся приближенно нормальными, имеет размерность Крулля, то либо группа G имеет конечный коммутант, либо G — почти разрешимая A_3-группа.*

Доказательство. Предположим, что коммутант группы G бесконечен. Пусть A — произвольная абелева подгруппа G и T — максимальная периодическая подгруппа A. Если T не является черниковской, то из следствия 3.3 получаем, что G имеет конечный коммутант. Полученное противоречие показывает, что T — черниковская подгруппа. Допустим, что $r_0(A)$ бесконечен. В этом случае A включает в себя свободную абелеву подгруппу бесконечного ранга. Из леммы 3.4 снова вытекает конечность коммутанта группы G, и получаем противоречие. Это противоречие показывает, что $r_0(A)$ конечен. В свою очередь, это означает, что A — абелева A_3-группа.

Пусть R — максимальная нормальная радикальная подгруппа G. Из основного результата работы В. С. Чарина [13] получаем, что R — разрешимая A_3-группа. Пусть L/R — максимальная нормальная локально конечная подгруппа G/R. Если L/R включает в себя абелеву подгруппу, не являющуюся черниковской, то из следствия 3.3 получаем, что G/R имеет конечный коммутант D/R. Его централизатор $C_{G/R}(D/R)$ имеет конечный индекс в G/R. Если допустить, что G/R бесконечна, то, принимая во внимание включение $D/R \cap C_{G/R}(D/R) \leq \zeta(C_{G/R}(D/R))$, получаем, что $C_{G/R}(D/R)$ — неединичная нильпотентная нормальная подгруппа G/R. Однако это противоречит выбору подгруппы R. Таким образом, в этом случае G/R должна быть конечной, и все доказано. Поэтому рассмотрим случай, когда все абелевы подгруппы L/R будут черниковскими. В этом случае L/R также является черниковской [14] (теорема 5.8). Опять вследствие выбора подгрупп L и R L/R конечна. Предположим, что G/R бесконечна и обозначим через U/L

локально нильпотентный радикал G/L. Это означает, что U/L — локально нильпотентная подгруппа без кручения. Конечность L/R влечет конечность индекса $(G/R)/C_{G/R}(L/R)$. Отсюда следует, что $(U/R) \cap C_{G/R}(L/R) = V/R \neq \langle 1 \rangle$. Поскольку G/R не включает в себя нормальных локально нильпотентных подгрупп, то $(L/R) \cap C_{G/R}(L/R) = \langle 1 \rangle$. Однако в этом случае

$$V/R \cong (V/R)/\left(V/R \cap L/R\right) \cong (V/R)(L/R)/(L/R) \cong VL/L \leq U/L.$$

Это показывает, что V/R — неединичная нормальная локально нильпотентная подгруппа G/R, что противоречит выбору подгруппы R. Полученное противоречие доказывает конечность G/R, а с этим и теорему.

Случай почти разрешимой A_3-группы требует отдельного рассмотрения.

3.6. *Следствие.* *Пусть G — обобщенно радикальная группа. Если G удовлетворяет слабому условию минимальности для подгрупп, не являющихся приближенно нормальными, то либо группа G имеет конечный коммутант, либо G — почти разрешимая A_3-группа.*

Действительно, в начале работы было отмечено, что в группе G, удовлетворяющей слабому условию минимальности для подгрупп, не являющихся приближенно нормальными, семейство этих подгрупп имеет размерность Крулля, не превышающую 1.

1. *Neumann B. H.* Groups with finite classes of conjugate subgroups // Math. Z. – 1955. – **63**, № 1. – S. 76 – 96.
2. *Курдаченко Л. А., Кузенний М. Ф., Семко М. М.* Групи з щільною системою нескінченних підгруп // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1985. – № 3. – С. 7 – 9.
3. *Franciosi S., de Giovanni F.* Groups satisfying the minimal condition on certain non-normal subgroups // "Groups-Korea 94". – Berlin: Walter de Gruyter, 1995. – P. 107 – 118.
4. *Galoppo A.* Groups satisfying the maximal condition on non-nearly normal subgroups // Ric. mat. – 2000. – **49**, № 2. – P. 213 – 220.
5. *McConnel J. C., Robson J. C.* Noncommutative Noetherian rings. – New York: Wiley, 1987. – 597 p.
6. *Musella C.* Isomorphisms between lattices of nearly normal subgroups // Note Mat. – 2000/2001. – **20**, № 1. – P. 43 – 52.
7. *Курдаченко Л. А.* Непериодические FC-группы и связанные с ними классы локально нормальных групп и абелевых групп без кручения // Сиб. мат. журн. – 1986. – **27**, № 2. – С. 104 – 116.
8. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы: В 2 т. – М.: Мир, 1974. – Т. 1. – 336 с.
9. *Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya.* Artinian modules over group rings. – Basel: Birkhäuser, 2007. – 245 p.
10. *Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya.* Groups with prescribed quotient groups and associated module theory. – New Jersey: World Sci., 2002. – 227 p.
11. *Sharpe D. W., Vamos P.* Injective modules. – Cambridge: Cambridge Univ., 1972. – 190 p.
12. *Tomkinson M. J.* FC-groups. – Boston: Pitman, 1984. – 171 p.
13. *Чарин В. С.* О разрешимых группах типа A_3 // Мат. сб. – 1961. – **54**, № 3. – С. 489 – 499.
14. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups. – Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1973. – 210 p.

Получено 13.03.07,
после доработки — 23.10.07