УДК 517.5

Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КРИТЕРИЙ ВЫПУКЛОСТИ ОБЛАСТИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

An exterior criterion is established for the convexity of a domain of the Euclidean space.

Встановлено зовнішній критерій опуклості області евклідового простору.

Цель работы — установление критерия, который по некоторым внешним характеристикам области дает заключение о ее выпуклости. При этом будем использовать понятия, введенные в работе [1], и топологические термины [2]. Обозначим через $G'(n, n-2)$ грассманово многообразие всех $(n-2)$-мерных плоскостей евклидова пространства R^n.

Рассмотрим некоторое подмножество $E \subset R^n$. Пусть точка $x \in R^n \setminus E$. Обозначим через $\Gamma(x)$ множество $(n-2)$-мерных плоскостей многообразия $G'(n, n-2)$, которые проходят через точку x, но не пересекают E. Используем эту характеристику для описания выпуклых областей.

Определение 1. *Будем говорить, что множество* $E \subset R^n$ $(n-2)$*-выпукло, если для произвольной точки* $x \in R^n \setminus E$ *существует плоскость* $L \in G'(n, n-2)$ *такая, что* $x \in L$ *и* $L \bigcap E = \varnothing$.

Легко убедиться, что все выпуклые области и компакты будут $(n-2)$-выпуклыми.

Определение 2. *Будем говорить, что множество* $E \subset R^n$ *слабо* $(n-2)$*-выпукло, если для произвольной точки границы этого множества* $x \in \partial E$ *существует плоскость* $L \in G'(n, n-2)$ *такая, что* $x \in L$ *и* $L \bigcap \operatorname{int} E = \varnothing$.

Определение 3. *Сопряженным подмножеством* E^* *множества* $E \subset R^n$ *назовем подмножество* $(n-2)$*-плоскостей многообразия* $G'(n, n-2)$, *которые не пересекают множество* E.

Определение 4. *Оболочкой* E^{**} *множества* E (*или сопряженным* E_1^* *к подмножеству* $E_1 = E^*$ *грассманова многообразия*) *назовем объединение множества* E *со всеми точками пространства* R^n, *каждая* $(n-2)$*-плоскость через которые пересекает множество* E.

Определение 5. *Будем говорить, что замкнутое* (*открытое*) *подмножество* E *грассманова многообразия* $G'(n, n-2)$ *выпуклое, если оно является сопряженным множеством к некоторому открытому* (*замкнутому*) *выпуклому множеству в евклидовом пространстве* R^n.

В [1] доказаны следующие утверждения.

Предложение 1. *Для проекции* $\pi_M : E \to \gamma$ *произвольного множества на* 2*-мерную плоскость* γ *множество* $\gamma \setminus \pi_M(E)$ *— дополнение к образу проекции — гомеоморфно некоторому сечению* $l \bigcap E^*$ *сопряженного множества соответственной* 2*-мерной плоскостью* l.

Предложение 2. *Если* G *— ограниченное компактное множество, то точка* y *принадлежит ограниченной части границы* ∂G^* *тогда и только тогда, когда* $(n-2)$*-плоскость* $l(y)$ *проходит через какую-нибудь точку границы* ∂G, *но не пересекает множество* $\operatorname{int} G$.

Предложение 3. *Для проекции* $\pi_\mu : E \to \gamma$ *произвольного множества на*

2-мерную плоскость множество $\pi_\mu(E)$ *гомеоморфно множеству* $l \setminus l \cap E^*$ *— дополнению к сечению сопряженного множества некоторой 2-мерной плоскостью* l.

Пусть некоторое сечение D 2-плоскостью несвязно.

Теорема. *Ограниченная область* $D \subset R^n$ *выпукла тогда и только тогда, когда множества* $\Gamma(x)$ *непустые и связны для всех точек* ∂D.

Доказательство. Из непустоты множества $\Gamma(x)$ для всех $x \in \partial D$ непосредственно следует слабая $(n-2)$-выпуклость области D.

Покажем, что все сечения области D двумерными плоскостями односвязны. Если существует неодносвязное сечение области D некоторой двумерной плоскостью $\wp$, то точкам x_1, x_2, которые принадлежат различным компонентам множества $\partial(D \cap \wp)$, соответствуют $(n-2)$-плоскости $l(x_1)$, $l(x_2)$, $l(x_i) \cap \cap D = \varnothing$, $i = 1, 2$, которые обязательно лежат в разных компонентах сопряженного множества D^*. Очевидно, что $l(x_1)$ нельзя перевести в $l(x_2)$ изотопией, которая бы не пересекала D. Поэтому множество D^* несвязно.

Согласно предложению 2 (которое здесь справедливо, поскольку замыкание $\overline{D}$ является компактом) множества $\Gamma(x)$ — это множества пересечения сопряженного множества D^* с плоскостями, касательными к нему. Но из несвязности D^* следует, что существует $(n-2)$-плоскость L, которая касается хотя бы двух компонент D^* (под $(n-2)$-плоскостью в грассмановом многообразии $G'(n, n-2)$ понимаем его подмногообразие $G(n, n-2)$ $(n-2)$-плоскостей, проходящих через одну фиксированную точку). А это, в свою очередь, означает, что сечение $D^* \cap L = \Gamma(x)$ для некоторого $x \in \partial D$ несвязно. Получили противоречие.

Пусть некоторое сечение D 2-плоскостью несвязно. Из предложения 3 следует, что найдется проекция π множества D^* на некоторую 2-мерную плоскость l такая, что множество $l \setminus \pi(D_*)$ несвязно. Но, как оговорено выше, l — вещественная двумерная плоскость. Поэтому $\pi(D^*)$ — не односвязное множество и, следовательно, группа когомологий $H^1(\pi(D^*))$ не тривиальна. Но тогда не тривиальной будет и группа $H^1(\partial\pi(D^*))$, поскольку известно [2], что отображение

$$\tau^*: H^1(\pi(D^*)) \to H^1(\partial\pi(D^*))$$

является мономорфизмом.

Из условия теоремы ограничение проекции π на множество $\pi^{-1}(\partial\pi(D^*))$ является монотонным отображением (*отображение* $f: E \to E_1$ *называется монотонным, если прообраз* $f^{-1}y$ *каждой точки* $y \in E_1$ *— связное множество*).

Из теоремы Вьеториса – Бегла [2] следует, что π индуцирует мономорфизм групп когомологий

$$\pi^*: H^1(\partial\pi(D^*)) \to H^1(\pi^{-1}(\partial\pi(D^*))).$$

Таким образом, если мы рассмотрим пару точек x_1, x_2 в разных компонентах сечения области D 2-мерной плоскостью, то им в силу гомеоморфизма будут соответствовать точки y_1, y_2 в разных компонентах множества $l \setminus \pi(D^*)$. Это означает, во-первых, что точки y_1, y_2 нельзя соединить между собой путем, который бы не пересекал $\pi(D^*)$. Во-вторых, в силу мономорфизма π^* $(n-2)$-

плоскости в пространстве M^*, которые проектируются при проекции π в точки y_1, y_2, нельзя связать между собой изотопией, которая не пересекает D^*. А это, в свою очередь, означает, что точки x_1 и x_2 должны принадлежать разным компонентам множества $D^{**} \supset D$, но согласно выбору множество D связно, а поэтому в силу произвольности выбора сечения все сечения D 2-плоскостями связны.

Теперь можно использовать известный результат Е. В. Щепина: *если все сечения области $D \subset R^n$ двумерными плоскостями связны и односвязны, то D — выпуклая область* [3].

Отсюда получаем утверждение теоремы. Учитывая определение 5, видим, что D^* будет выпуклым подмножеством многообразия $G'(n, n-2)$.

Пример. Пусть $D \subset R^3$ — область, полученная из шара $K = \{ x = (x_1, x_2, x_3) \big| \, |x| < 1 \}$ изъятием двух 2-полуплоскостей $A = \{x \mid (x_1 \geq 0) \wedge (x_3 = 0)\}$ и $B = \{x \mid (x_1 \leq 0) \wedge (x_2 = 0)\}$, $D = K \setminus (A \bigcup B)$.

Легко убедиться, что все проекции D на 2-мерные плоскости ацикличны. Они будут кругами или кругами с изъятым отрезком, который состоит из связной части диаметра и касается граничной окружности. Единственная проекция, образ которой содержит нетривиальный цикл, — это проекция из начала координат на единичную сферу. Область D имеет гомотопический тип окружности S^1. Но ни одна из прямых не будет зацеплена с этим циклом. Произвольную прямую, которая не пересекает D, можно изотопией перевести в прямую, которая будет лежать в касательной 2-мерной плоскости к шару K. Следовательно, K^* будет связным множеством.

Анализируя доказательство теоремы, можно заметить, что доказано даже больше, чем сформулировано в теореме. А именно: если касательными $(n-2)$-плоскостями к компакту K в $G'(n, n-2)$ будем считать $(n-2)$-плоскости, которые пересекают K, но не пересекают его внутренность $\operatorname{int} K$, то справедливо следующее утверждение.

Следствие. *Если $K \subset G'(n, n-2)$ — такой компакт, что все сечения его касательными $(n-2)$-плоскостями связны, то каждая связная компонента множества K^* будет выпуклым множеством.*

1. *Зелинский Ю. Б., Момот И. В.* О (n, m)-выпуклых множествах // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 422 – 427.
2. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. – М.: Мир, 1971. – 680 с.
3. *Щепин Е. В.* Критерий выпуклости открытого множества // III Тираспол. симпоз. по общей топологии и ее прил. – Кишинев: Штиинца, 1973. – С. 146.

Получено 05.02.08