УДК 519.642

Є. В. Лебедєва (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО УМОВИ ЗБІЖНОСТІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕКОРЕКТНИХ ЗАДАЧ

A new class of projection methods for the solving of ill-posed problems with pertubated coefficients is constructed. For these methods, the conditions for convergence to a normal solution of operator equation of the first kind are established. Moreover, additional conditions for these methods are given which guarantee the convergence at a given rate to normal solutions that belong to some set.

Предложен новый класс проекционных методов для решения некорректных задач с неточно заданными коэффициентами. Для методов из этого класса установлены условия сходимости к нормальному решению операторного уравнения I рода. Также приведены дополнительные условия на эти методы, при выполнении которых обеспечивается сходимость с заданной скоростью к нормальным решениям, принадлежащим определенному множеству.

1. Постановка задачі. Останнім часом інтенсивного розвитку набули дослідження з проблем конструювання економічних скінченновимірних наближень до розв'язків некоректних задач із заданою швидкістю збіжності (див., наприклад, роботу [1] та бібліографію до неї). Відомо, що серед алгоритмів наближеного розв'язання вказаних задач найбільш поширеними є методи, що побудовані на засадах проекційної схеми Гальоркіна. Як виявляється, більш економічною є модифікація методу Гальоркіна, що побудована за допомогою східчастого гіперболічного хреста. Іншими словами, ця модифікація дозволяє досягати наперед заданої точності наближення, використовуючи при цьому значно менший обсяг дискретної інформації, ніж у стандартному методі Гальоркіна. Перший результат з ефективного застосування такої модифікованої проекційної схеми при розв'язанні некоректних задач отримано в [2]. Ця робота знайшла своє продовження в багатьох публікаціях, серед яких відмітимо роботи [3 – 5]. Тут на підставі ідеї гіперболічного хреста було запропоновано нові проекційні методи для розв'язання некоректних задач, в рамках яких гарантувалися наближення із заданою швидкістю збіжності в припущенні, що шуканий розв'язок належить певній компактній множині. Водночас іншим, не менш важливим, аспектом в обґрунтуванні будь-якого наближеного методу є встановлення умов його збіжності до точного розв'язку початкової задачі без будь-яких додаткових припущень щодо цього розв'язку. У цьому сенсі дана робота є доповненням та продовженням [5]. А саме, в межах проведених нижче досліджень запропонований у [5] підхід до розв'язання некоректних задач буде узагальнено на випадок, коли коефіцієнти початкового рівняння задано з похибкою, а також будуть встановлені достатні умови збіжності побудованих апроксимацій до шуканого розв'язку.

Розглянемо операторне рівняння першого роду

$$Ax = f \tag{1}$$

у сепарабельному гільбертовому просторі X зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і нормою $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Вважаємо, що $A \in \mathcal{L}(X)$, $\operatorname{Rang}(A) \neq \overline{\operatorname{Rang}(A)}$ та $f \in \operatorname{Rang}(A)$, де $\mathcal{L}(X)$ — простір лінійних неперервних операторів, які діють в X. Норма в $\mathcal{L}(X)$ визначається стандартним чином: $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\|$.

Припустимо, що замість точних коефіцієнтів A та f рівняння (1) відомо лише деякі їхні наближення $A_h \in \mathcal{L}(X)$ і $f_\delta \in X$ такі, що

$$\|A - A_h\| \le h, \qquad \|f - f_\delta\| \le \delta,$$

де $h > 0$ і $\delta > 0$ — відомі оцінки похибки початкових даних.

Зафіксуємо у просторі X деякий ортонормований базис $E = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Введемо до розгляду сукупність операторів A. Через $\mathcal{H}^r$ позначимо множину операторів $A \in \mathcal{L}(X)$, $\|A\| \le 1$, для яких виконуються нерівності

$$\|(I - P_m)A\| \le \beta_r m^{-r}, \qquad \|(I - P_m)A^*\| \le \beta_r m^{-r} \tag{2}$$

при будь-якому $m = 1, 2, \ldots$ та фіксованих $r = 1, 2, \ldots$ і $\beta_r > 0$. Тут A^* — оператор, спряжений до A, а P_m — ортопроектор на лінійну оболонку перших m елементів базису E, тобто $P_m f = \sum_{k=1}^{m} (f, e_k) e_k$. Приклад оператора з $\mathcal{H}^r$ наведено в п. 4 цієї роботи, інші приклади таких операторів див. у [6]. У подальшому будемо вважати, що A, $A_h \in \mathcal{H}^r$.

Взагалі кажучи, $\mathrm{Ker}(A)$ може складатися не лише з нульового елемента, і в цьому випадку задача (1) має в X нескінченну кількість розв'язків. Будемо будувати наближення до розв'язку (1) з мінімальною нормою в X, тобто $x^\dagger \in \mathrm{Ker}(A)^\perp$, який, зазвичай, називається нормальним розв'язком рівняння (1).

Мета даної роботи полягає в побудові нового класу проекційних методів для розв'язання операторних рівнянь (1) з $A \in \mathcal{H}^r$. У випадку, коли замість точних коефіцієнтів відомо лише їх збурення $A_h \in \mathcal{H}^r$ й $f_\delta \in X$, для кожного такого методу будуть встановлені достатні умови, що забезпечують збіжність до нормального розв'язку $x^\dagger$ у метриці X при $\delta \to 0$, $h \to 0$.

2. Клас методів розв'язання. Відомо, що найбільш поширеною проекційною схемою дискретизації рівнянь (1) є метод Гальоркіна, відповідно до якого скінченновимірні наближення оператора A_h мають вигляд

$$A_{h,m,n} = P_m A_h P_n. \tag{3}$$

Методи розв'язання рівняння (1), що засновані на схемі (3), були побудовані й обґрунтовані в [6, 7] для випадку $A \in \mathcal{H}^r$. У даній роботі для дискретизації коефіцієнтів A_h і f_δ будемо використовувати модифікацію схеми (3) таку, що

$$\begin{gathered} A_{h,n} = \sum_{k=1}^{n} (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A_h P_{2^{2n-k}} + P_1 A_h P_{2^{2n}}, \\ P_{2^n} f_\delta = \sum_{k=1}^{2^n} (f_\delta - e_k) e_k . \end{gathered} \tag{4}$$

Під дискретною інформацією про рівняння (1) розуміємо набір значень скалярних добутків

$$(A_h e_i, e_j), \qquad (f_\delta, e_j). \tag{5}$$

Тоді, відповідно до схеми (4), сукупність номерів (i, j) скалярних добутків $(A_h e_i, e_j)$, що задіяні при побудові оператора $A_{h,n}$, утворює на координатній площині множину, яка набирає вигляду

$$\Gamma_n = \bigcup_{k=1}^{n} (2^{k-1}, 2^k] \times [1, 2^{2n-k}] \cup \{1\} \times [1, 2^{2n}]$$

і називається східчастим гіперболічним хрестом.

Оскільки задача (1) за припущень п. 1 є некоректно поставленою, то для побудови стійких наближень потрібно застосувати спеціальні методи регуляризації. Розглянемо оператор $R_\alpha = R_\alpha(A_{h,n}) : X \to X$, що має вигляд

$$R_\alpha(A_{h,n}) = g_\alpha(A_{h,n}^* A_{h,n}) A_{h,n}^*, \tag{6}$$

де параметр $\alpha > 0$. Тут функція $g_\alpha(\lambda)$ є вимірною за Борелем на $[0, \infty)$ та операторна функція $g_\alpha(A_{h,n}^* A_{h,n}) = \int_0^\infty g_\alpha(\lambda) dP(\lambda)$, де $P(\lambda)$ — спектральна сім'я проекторів оператора $A_{h,n}^* A_{h,n}$. Нехай $g_\alpha(\lambda)$ задовольняє умови

$$\sup_{0 \le \lambda < \infty} |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \le 1, \tag{7}$$

$$\sup_{0 \le \lambda < \infty} \lambda^\nu |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \le \chi_\nu \alpha^\nu, \quad 0 < \nu \le \nu_*, \tag{8}$$

$$\sup_{0 \le \lambda < \infty} \lambda^{1/2} |g_\alpha(\lambda)| \le \chi_* \alpha^{-1/2}. \tag{9}$$

Тут χ_ν, χ_* — деякі незалежні від α додатні константи, а ν_* — параметр кваліфікації (тобто максимальне ν, при якому виконується (8)). Тоді, згідно з [8], R_α є регуляризуючим оператором з параметром регуляризації α. За наближений розв'язок візьмемо елемент

$$x_\alpha = R_\alpha(A_{h,n}) P_{2^n} f_\delta, \tag{10}$$

де $A_{h,n}$ має вигляд (4) і R_α — регуляризатор з функцією, яка задовольняє (7) – (9). Сукупність усіх проекційних методів (4), (6) – (10) позначимо через $\mathcal{A}$.

Таким чином, в основу досліджуваного підходу до розв'язання (1) покладено проекційну схему дискретизації (4) для коефіцієнтів A_h, f_δ і описаний вище підхід до регуляризації некоректних задач.

Наведемо приклади відомих методів регуляризації R_α (6) – (9).

***Приклад* 1.** *Метод Тихонова* полягає в переході від рівняння (1) до регуляризованого рівняння II роду

$$\alpha x_\alpha + A_{h,n}^* A_{h,n} x_\alpha = A_{h,n}^* P_{2^n} f_\delta. \tag{11}$$

Цей метод утворюється функцією $g_\alpha(\lambda) = (\alpha + \lambda)^{-1}$ з параметрами $\chi_* = 1/2$, $\chi_\nu = \nu^\nu (1-\nu)^{1-\nu}$. Кваліфікація методу Тихонова дорівнює $\nu_* = 1$.

***Приклад* 2.** *Метод асимптотичної регуляризації* (*або метод встановлення*). Суть цього методу полягає в тому, що функція $g_\alpha(\lambda)$ з (6) для довільних $t = 1/\alpha$ має вигляд

$$g_t(\lambda) = \int_0^t e^{-(t-s)\lambda} ds = \lambda^{-1}(1 - e^{-t\lambda}),$$

тоді $1 - \lambda g_t(\lambda) = e^{-t\lambda}$. Відомо, що $x_t = x(t)$ можна розглядати як точний розв'язок задачі Коші для операторного диференціального рівняння

$$x'(t) + A_{h,n}^* A_{h,n} x(t) = A_{h,n}^* P_{2^n} f, \quad x(0) = 0.$$

Умови (8) та (9) виконуються при $\chi_* = 0{,}6382$ та $\chi_\nu = (\nu/e)^\nu$ з кваліфікацією методу $\nu_* = \infty$.

***Приклад* 3.** *Явна ітераційна схема* (*метод Ландвебера*). Покладемо $x_0 =$ $= 0$ і послідовно знайдемо

$$x_l = x_{l-1} - \mu A_{h,n}^* (A_{h,n} x_{l-1} - P_{2^n} f_\delta), \tag{12}$$

де $l = 1, 2, \ldots$, а стала μ задовольняє співвідношення $0 < \mu < 2 / \| A_{h,n} \|^2$. Метод (12) породжується функцією

$$g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\Big(1 - (1 - \mu\lambda)^{1/\alpha}\Big), \qquad \lambda \neq 0,$$

де параметр регуляризації α такий, що $1/\alpha = l = 1, 2, \ldots$. Умови (8), (9) виконуються при $\chi_* = \mu^{1/2}$, $\chi_\nu = (\nu/(\mu e))^\nu$. Кваліфікація методу $\nu_* = \infty$.

3. Основний результат. Припустимо, що для методів із класу $\mathcal{A}$ при δ, $h \to 0$ виконуються наступні умови на вибір параметрів дискретизації n і регуляризації α:

$$\begin{gathered} \alpha^{-1/2}\delta \to 0, \\ \alpha^{-1/2}h \to 0, \quad \alpha \to 0, \\ \alpha^{-1/2}2^{-rn} = O(1). \end{gathered} \tag{13}$$

Тоді має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай* A, $A_h \in \mathcal{H}^r$, $x^\dagger \in \mathrm{Ker}(A)^\perp$. *Тоді для довільного методу з* $\mathcal{A}$ *при виконанні умов* (13) $\| x_\alpha - x^\dagger \| \to 0$, *якщо* δ, $h \to 0$.

Доведення. Для встановлення справедливості теореми 1 застосуємо схему доведення, яка була використана в роботах [6] (теорема 3.1), [3] (теорема 1). Отже, позначимо

$$R_{\alpha,n} = g_\alpha(A_{h,n}^* A_{h,n}) A_{h,n}^*,$$

$$S_{\alpha,n} = I - g_\alpha(A_{h,n}^* A_{h,n}) A_{h,n}^* A_{h,n}.$$

Тоді похибку будь-якого методу з $\mathcal{A}$ можна записати у вигляді

$$x^\dagger - x_\alpha = R_{\alpha,n}(f - f_\delta) + S_{\alpha,n}x^\dagger + R_{\alpha,n}(A_{h,n} - A)x^\dagger. \tag{14}$$

Перевіримо збіжність кожного з доданків у правій частині рівності (14).

Аналогічно [6] (див. теорему 3.1), для першого доданка з урахуванням властивості регуляризаторів (9) одержимо

$$\| R_{\alpha,n} \| = \| g_\alpha(A_{h,n}^* A_{h,n}) A_{h,n}^* \| \leq \chi_* \alpha^{-1/2}.$$

Очевидно,

$$\| R_{\alpha,n}(f - f_\delta) \| \leq \chi_* \alpha^{-1/2}\delta \to 0.$$

Для доведення збіжності другого доданка нам будуть потрібні допоміжні співвідношення, які встановлені раніше. А саме, відповідно до леми 1 [3] має місце

$$\| A_h^* A_h - A_{h,n}^* A_{h,n} \| \leq c_1 n 2^{-2rn} \tag{15}$$

та з леми 4.1 [6] випливає

$$\| A^* A - A_h^* A_h \| = \| |A|^2 - |A_h|^2 \| \leq c_2 \| A - A_h \|, \tag{16}$$

де $c_1 = c_1(r, \beta_r)$ і c_2 — деякі відомі константи.

Нехай $Y = \mathrm{Ker}^\perp(A) = \overline{\mathrm{Rang}(A^* A)}$. Для будь-якого $x^\dagger \in Y$ покладемо $\| x^\dagger \|_Y := \| x^\dagger \|_X$. Тоді внаслідок (7) маємо $\sup\limits_{x \in Y, \|x\| \leq 1} \| S_{\alpha,n} x \| \leq \| S_{\alpha,n} \| \leq 1$.

Позначимо $Y_0 = \operatorname{Rang}(A^*A)$. Для довільного елемента $u \in Y_0$, $u = A^*Av$, $v \in X$, з урахуванням (15) і (16), а також умов теореми, аналогічно [6] (див. теорему 3.1) одержимо

$$\|S_{\alpha,n}u\| = \|S_{\alpha,n}A^*Av\| \le$$

$$\le \|S_{\alpha,n}(A^*A - A_h^*A_h)v\| + \|S_{\alpha,n}(A_h^*A_h - A_{h,n}^*A_{h,n})v\| + \|S_{\alpha,n}A_{h,n}^*A_{h,n}v\| \le$$

$$\le \|v\|\left(c_2\|S_{\alpha,n}\|\|A - A_h\| + \|S_{\alpha,n}\|c_1 n 2^{-2rn} + \chi_1\alpha\right) \le$$

$$\le \|v\|\left(c_2 h + c_1 n 2^{-2rn} + \chi_1\alpha\right) \to 0. \tag{17}$$

Оскільки множина Y_0 скрізь щільна в Y, то, згідно з теоремою Банаха – Штейнгауза, ми довели збіжність до нуля другого доданка з (14) для довільного $x^\dagger \in \operatorname{Ker}(A)^\perp = \overline{\operatorname{Rang}(A^*A)}$.

Залишилось дослідити останню складову із (14). Внаслідок (4) має місце співвідношення $A_{h,n}^*P_{2^n} = A_{h,n}^*$, з якого випливає

$$R_{\alpha,n}(A_{h,n} - A)x^\dagger := g_\alpha(A_{h,n}^*A_{h,n})A_{h,n}^*(A_{h,n} - A)x^\dagger =$$

$$= g_\alpha(A_{h,n}^*A_{h,n})(A_{h,n}^*A_{h,n} - A_{h,n}^*P_{2^n}A)x^\dagger = R_{\alpha,n}(A_{h,n} - P_{2^n}A)x^\dagger.$$

З леми 2 [3] маємо

$$\left\|(A_{h,n} - P_{2^n}A_h)x^\dagger\right\| \le c_3 2^{-rn}\left\|(I - P_{2^n})x^\dagger\right\|,$$

де $c_3 = c_3(r, \beta_r)$ — відома константа. Використовуючи наведене вище співвідношення та (9), знаходимо

$$\left\|R_{\alpha,n}(A_{h,n} - A)x^\dagger\right\| = \left\|R_{\alpha,n}(A_{h,n} - P_{2^n}A)x^\dagger\right\| \le$$

$$\le \left\|R_{\alpha,n}\right\|\left(\left\|(A_{h,n} - P_{2^n}A_h)x^\dagger\right\| + \left\|P_{2^n}(A_h - A)x^\dagger\right\|\right) \le$$

$$\le \chi_*\alpha^{-1/2}\left(c_3 2^{-rn}\left\|(I - P_{2^n})x^\dagger\right\| + h\left\|x^\dagger\right\|\right).$$

З урахуванням умов теореми очевидно, що третій доданок також збігається до нуля при δ, $h \to 0$.

Теорему доведено.

4. Обговорення результатів. Отже, в теоремі 1 стверджується, що при виконанні умов (13) для довільного методу з $\mathcal{A}$ гарантовано збіжність його апроксимацій до нормального розв'язку будь-якого рівняння (1) з $A \in \mathcal{H}^r$. Поставимо за мету з'ясувати, при яких умовах методи з $\mathcal{A}$ забезпечують задану швидкість збіжності наближень до точного розв'язку.

Для цього введемо додаткові припущення. Нехай елемент $x^\dagger$ при деяких дійсних ρ, $\nu > 0$ належить множині, що має вигляд

$$M_{\nu,\rho}(A) = \left\{x : x = |A|^\nu v,\ \|v\| \le \rho\right\}, \tag{18}$$

де $|A| = (A^*A)^{1/2}$. Будемо вважати, що значення $\rho > 0$ відомо, а для невідомого параметра ν задано інтервал його можливих значень $\nu \in [1, \nu_1]$, $1 < \nu_1 < \infty$. Відомо (див. [9, с. 15]), що швидкість збіжності до будь-якого елемента з множини $M_{\nu,\rho}(A)$ буде оптимальною за порядком, якщо оцінка похибки дорівнює

$O(\delta + h)^{\nu/(\nu+1)}$.

Уточнимо умови (13) на вибір параметрів дискретизації n та регуляризації α. Отже, нехай у схемі дискретизації (4) за параметр n вибирається найменше натуральне число, яке задовольняє умову (див. співвідношення (10) з [5])

$$2^{-2rn} n \le \frac{2}{c_4}(\delta + c_5 h), \tag{19}$$

де

$$c_4 = \frac{2^{2r}}{2^{2r}-1}\beta_r^2\rho, \qquad c_5 = \rho\left(1 + \frac{\beta_r 2^{2r}}{2^{2r}-1}\right).$$

Вибір параметра регуляризації α здійснюється відповідно до узагальненого принципу відхилу [10]

$$b_1(\delta + c_5 h) \le \left\| P_{2^n} f_\delta - A_{h,n} x_\alpha \right\| \le b_2(\delta + c_5 h), \quad 2 < b_1 < b_2. \tag{20}$$

Зазначимо, що клас таких методів було побудовано у роботі [5] у випадку, коли $h = 0$, а потім узагальнено у роботі [11] на випадок досить малих $h > 0$.

Теорема 2. *Нехай* A, $A_h \in \mathcal{H}^r$, $x^\dagger$ *належить* (18). *Тоді в рамках будь-якого методу з* $\mathcal{A}$ *при виконанні умов* (19) *і* (20) *гарантовано оптимальну за порядком швидкість збіжності до* $x^\dagger$. *При цьому потужність множини скалярних добутків вигляду* (5), *що задіяні при дискретизації коефіцієнтів* A_h, f_δ, *має порядок*

$$O\left((\delta + h)^{-1/r} \log^{1+1/r}(\delta + h)^{-1}\right).$$

Це твердження доводиться аналогічно теоремі 1 [11].

Таким чином, з теорем 1 і 2 випливає, що в рамках запропонованого підходу до розв'язування некоректних задач у випадку, коли параметри дискретизації n та регуляризації α задовольняють лише умову (13), гарантується збіжність до будь-якого нормального розв'язку рівняння (1). Водночас довільний метод з класу $\mathcal{A}$ у разі більш строгого вибору n та α (умови (19), (20)) забезпечує збіжність із оптимальною за порядком швидкістю до всіх нормальних розв'язків із множини (18).

Ефективність запропонованих методів проілюструємо на прикладі рівняння

$$\tilde{A}x(t) \equiv \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)\,d\tau = f(t), \tag{21}$$

де $x(t)$, $f(t) \in L_2(0,1)$ та

$$k(t,\tau) = \begin{cases} \pi^2 \sinh\tau \sinh(t-1)/\sinh 1, & 0 \le \tau \le t \le 1, \\ \pi^2 \sinh t \sinh(\tau - 1)/\sinh 1, & 0 \le t \le \tau \le 1. \end{cases}$$

Відомо (див. [12], розділ 2, § 15), що функція $k(t,\tau)/\pi^2$ є функцією Гріна для однорідної крайової задачі

$$f^{(II)}(t) - f(t) = 0, \qquad f(0) = f(1) = 0,$$

та оператор $\tilde{A}$ діє з $L_2(0,1)$ в $W_2^2[0,1]$. Звідси випливає, що $\tilde{A} \in \mathcal{H}^2$ та співвідношення (2) виконується з константою $\beta_r = 1$.

В якості правої частини візьмемо функцію

$$f(t) = \frac{\pi^4}{\sinh 1}\left(\frac{\sinh t(1 - 2\sinh 1)(1 - \cosh 1)}{2\sinh 1} + \frac{t \sinh t \sinh 1}{2} + \right.$$

$$+ \frac{t(1-\cosh 1)\cosh t}{2} + \sinh 1 - \cosh t \sinh 1\Big),$$

а за розв'язок $x^\dagger \in M_{1,1}(\tilde{A})$ — функцію

$$x^\dagger(t) := \left|\tilde{A}\right| \cdot 1(t) = \pi^2\left(\frac{\sinh t(1-\cosh 1)}{\sinh 1} - 1 + \cosh t\right). \qquad (22)$$

Праву частину рівняння (21) збурюємо за правилом $f_\delta(t) = f(t) + \delta$, де за рівень похибки вибрано значення $\delta = 10^{-3}$, $\delta = 10^{-4}$. Оскільки обчислення точних компонент вектора (5) є технічно складною задачею, має сенс замість функції $k(t, \tau)$ взяти суму ряду Тейлора $k_h(t, \tau)$ з оцінкою похибки

$$\| k(t,\tau) - k_h(t,\tau) \|_{L_2(0,1)\times L_2(0,1)} \le h,$$

де $h = 2 \cdot 10^{-5}$, а саме

$$k_h(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{\sinh 1}\left(t - 1 + \dfrac{1}{6}(t-1)^3 + \dfrac{1}{120}(t-1)^5\right)\left(\tau + \dfrac{1}{6}\tau^3 + \dfrac{1}{120}\tau^5\right), & 0 \le \tau \le t \le 1, \\ \dfrac{\pi^2}{\sinh 1}\left(\tau + \dfrac{1}{6}\tau^3 + \dfrac{1}{120}\tau^5\right)\left(\tau - 1 + \dfrac{1}{6}(\tau-1)^3 + \dfrac{1}{120}(\tau-1)^5\right), & 0 \le t \le \tau \le 1. \end{cases}$$

Оскільки $c_4 = 16/15$ та $c_5 = 7/3$, з (19) випливає, що для досягнення оптимальної за порядком швидкості збіжності параметр дискретизації n слід вибирати рівним 3 при $\delta = 10^{-3}$ та 4 при $\delta = 10^{-4}$. Для дискретизації коефіцієнтів рівняння (21) за базис $E = \{e_i\}_{i=1}^\infty$ вибрано ортонормовану систему поліномів Лежандра, зміщену на відрізок $[0, 1]$, та задіяно схему (4), де

$$(x, e_k) = \int_0^1 e_k(t)x(t)\,dt, \qquad (\tilde{A}_h e_j, e_i) = \int_0^1\int_0^1 e_i(t)k_h(t,\tau)e_j(\tau)\,dt\,d\tau.$$

Для регуляризації рівняння (21) візьмемо метод Ландвебера.

Розпишемо далі запропонований алгоритм розв'язання задачі (21).

1. Вихідні дані: $\tilde{A}_h \in \mathcal{H}^r$, f_δ, h, δ, ρ.
2. Вибір рівня дискретизації $n = n(h, \delta)$ за правилом (19).
3. Обчислення значень інформаційних функціоналів

$$(e_i, f_\delta), \qquad i \in [1, 2^n],$$

$$(e_i, \tilde{A}_h e_j), \qquad (i, j) \in \Gamma_n.$$

4. Вибір значень параметрів: $0 < \mu < \dfrac{2}{\left\|\tilde{A}_{h,n}\right\|^2}$, $2 < b_1 < b_2$.
5. Обчислення наближень згідно з правилом

$$x_0 = 0, \qquad x_l = x_{l-1} - \mu A^*_{h,n}(\tilde{A}_{h,n}x_{l-1} - P_{2^n} f_\delta), \qquad l = 1, 2, \ldots,$$

і принципом відхилу (20).

Оскільки $\left\|\tilde{A}_{h,n}\right\|^2 \le 0{,}90097$ при $n = 3$ і $\left\|\tilde{A}_{h,n}\right\|^2 \le 0{,}90098$ при $n = 4$, то значення параметра μ доцільно вибирати з інтервалу $(0, 2]$.

Числові розрахунки було виконано при $\mu = 1$; 1,5; 2 та $b_2 = 2{,}25$; 2,5; 2,75, а за b_1 взято сталу 2,1. Як виявилось, найкраща точність наближення до розв'язку (22) досягається при $b_2 = 2{,}25$ (у сенсі значення першої відмінної від 0 цифри). Отримано наступні результати числових розрахунків: при $\delta =$

$= 10^{-3}$ досягнуто точність $0{,}0182$ $(\mu = 1)$ і $0{,}0181$ $(\mu = 2)$, а при $\delta = 10^{-4}$ — точність $0{,}0050$ $(\mu = 1)$ і $0{,}0051$ $(\mu = 2)$.

1. *Mathe P., Pereverzev S. V.* Discretization strategy for linear ill-posed problems in variable Hilbert scales // Inverse Problems. – 2003. – **19.** – P. 1263 – 1277.
2. *Pereverzev S. V.* Optimization of projection methods for solving ill-posed problems // Computing. – 1995. – **55.** – P. 133 – 124.
3. *Solodky S. G.* A generalized projection scheme for solving ill-posed problems // J. Inverse Ill-Posed Problems. – 1999. – **7**. – P. 185 – 200.
4. *Solodky S. G.* On a quasi-optimal regularized projection method for solving operator equations of the first kind // Inverse Problems. – 2005. – **21**, № 4. – P. 1473 – 1485.
5. *Solodky S. G., Lebedeva E. V.* Bounds of information expenses in constructing projection methods for solving ill-posed problems // Comput. Methods Appl. Math. – 2006. – **6**, № 1. – P. 87 – 93.
6. *Plato R., Vainikko G.* On the regularization of projection methods for solving ill-posed problems // Numer. Math. – 1990. – **57**. – P. 63 – 79.
7. *Plato R., Vainikko G.* On the regularization of the Ritz – Galerkin method for solving ill-posed problems // Уч. зап. Тартус. ун-та. – 1989. – **863**. – С. 3 – 17.
8. *Бакушинский А. Б.* Один общий прием построения регуляризирующего алгоритма для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1967. – **7**, № 3. – С. 672 – 677.
9. *Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. – М.: Наука, 1986. – 182 с.
10. *Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г.* Обобщенный принцип невязки // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1973. – **13**. – С. 294 – 302.
11. *Лебедева Е. В.* Об одном правиле выбора дискретной информации для приближенного решения некорректных задач // Уч. зап. Таврич. нац. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика и кибернетика. – 2005. – **18**, № 1. – С. 47 – 54.
12. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. В.* Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1976. – 215 с.

Одержано 24.07.06,
після доопрацювання — 15.02.08