УДК 517.5

В. П. Моторный (Днепропетр. нац. ун-т)

К ВОПРОСУ О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ С УЧЕТОМ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ НА ОТРЕЗКЕ

We obtain a correction of an estimate of the approximation of functions from the class W^rH^ω (here, $\omega(t)$ is a convex modulus of continuity such that $t\omega'(t)$ does not decrease) by algebraic polynomials with regard for the location of a point on an interval.

Одержано уточнення оцінки наближення функцій класу W^rH^ω ($\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, такий, що $t\omega'(t)$ не спадає) алгебраїчними многочленами з урахуванням положення точки на відрізку.

1. Введение. Задача о приближении функций, заданных на отрезке $[-1,1]$, алгебраическими многочленами с учетом положения точки впервые была рассмотрена и решена С. М. Никольским [1] для класса W^1_∞-функций, удовлетворяющих условию Липшица с константой, равной единице. С. М. Никольский указал линейный метод $L_n(f;x)$ приближения алгебраическими многочленами функций из класса W^1_∞ такой, что

$$|f(x)-L_n(f;x)| \le \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + O\left(\frac{|x|\ln n}{n^2}\right), \quad x\in[-1,1], \tag{1}$$

и показал, что константу $\frac{\pi}{2}$ в неравенстве (1) уменьшить нельзя.

Этот результат С. М. Никольского открыл возможность приближения функций, заданных на отрезке, алгебраическими многочленами с улучшением приближения у концов отрезка и в то же время асимптотически наилучшее на всем классе для различных классов непериодических функций.

Введем следующие классы функций. Пусть W^r_∞, $r>0$, — класс функций f_r, представимых на отрезке $[-1,1]$, в виде

$$f_r(x) = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_{-1}^{1}(x-t)_+^{r-1} f(t)\,dt + P(x),$$

где $\Gamma(r)$ — гамма-функция Эйлера, x_+^{r-1} — усеченная степень, функция $f(t)$ измерима и $|f(t)|\le 1$ почти всюду, а $P(x)$ — алгебраический многочлен степени не выше $[r-1]$ ($[a]$ — целая часть a). В случае целых r это класс функций f, $(r-1)$-я производная которых абсолютно непрерывна, а $\left|f^r(t)\right|\le 1$ почти всюду. Через W^rH^ω, $r=0,1,\ldots$ $(W^0H^\omega = H^\omega)$, будем обозначать класс функций f, r-я производная $(f^{(0)}=f)$ которых удовлетворяет условию

$$\left|f^{(r)}(x_1)-f^{(r)}(x_2)\right| \le \omega(|x_1-x_2|),$$

где $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности.

Для класса W^r_∞ (r — целое) А. Ф. Тиман (см. [2, с. 310 – 314]) доказал следующее утверждение.

Для любого натурального числа $r>1$ *существует линейный метод* $U_{n,r}(f;x)$ *приближения функций из класса* W^r_∞ *такой, что для любой функции* $f\in W^r_\infty$ *имеет место неравенство*

$$\left|f(x)-U_{n,r}(f;x)\right| \le \frac{K_r}{n^r}\left[\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + o(1)\right] \tag{2}$$

и константу K_r (K_r *— константа Фавара) на классе* W_∞^r *уменьшить нельзя.*

Заметим, что константа, определяющая остаточный член в (2), зависит от функции f.

Таким образом, для каждого натурального числа r был указан линейный метод приближения, осуществляющий асимптотически наилучшее приближение класса W_∞^r алгебраическими многочленами в равномерной метрике и в то же время каждую функцию из класса W_∞^r у концов отрезка $[-1,1]$ приближающий лучше. В работах Н. П. Корнейчука и А. И. Половины [3 – 5] установлено, что аналогичная оценка с главным членом, зависящим от x, имеет место и в более общем случае — когда учитывается поведение модуля непрерывности функции или модуля непрерывности производной. Однако приближение в этом случае осуществляется нелинейным методом. Приведем основной результат работы [5].

Пусть $\omega(t)$ *— выпуклый модуль непрерывности. Тогда для любой функции* $f \in H^\omega$ *существует последовательность алгебраических многочленов* $\{P_n(f;x)\}$ *степени* $n = 1, 2, \ldots$ *такая, что равномерно относительно всех* $x \in [-1,1]$ *при* $n \to \infty$ *выполняется неравенство*

$$|f(x)-P_n(f;x)| \le \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right) + o\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{3}$$

Для нечетных r А. А. Лигун [6] получил следующее обобщение.

Для любого нечетного числа r *существует линейный метод приближения* $Q_{n,r}(f;x)$ *такой, что для любой функции* f, *имеющей непрерывную производную* r*-го порядка, выполняется неравенство*

$$\left|f(x)-Q_{n,r}(f;x)\right| \le \frac{K_r}{2}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r \omega\left(f^{(r)};\pi\sqrt{1-x^2}/n\right) + o\left(n^{-r}\,\omega\left(f^{(r)};1/n\right)\right), \tag{4}$$

где $\omega\left(f^{(r)};t\right)$ *— модуль непрерывности* r*-й производной функции* $f(x)$.

В указанных работах обобщение теоремы С. М. Никольского сопровождалось огрублением остаточного члена. Поэтому следующий шаг, связанный с развитием указанных исследований С. М. Никольского, состоял в уточнении остаточного члена в неравенствах (1) – (4). Первым осуществил его В. Н. Темляков [7]; он усилил неравенство (1), убрав $\ln n$ в остаточном члене. При этом приближение функций из класса W_∞^1 уже осуществлялось нелинейным методом.

Для любого натурального числа $r \ge 2$ Р. М. Тригубом [8] доказан следующий результат.

Для любой функции $f \in W_\infty^r$ (r *— натуральное число, большее или равное* 2) *существует последовательность алгебраических многочленов* $p_n(x)$, $n = r - 1, r, \ldots$, *удовлетворяющих неравенству*

$$|f(x)-p_n(x)| \le K_r\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r + c_r\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}}{n^{r+1}},$$

где константа c_r *зависит от* r.

Случай нецелого r рассмотрен в работах [9, 10]. Приближение функций из класса $W^r H^\omega$ алгебраическими многочленами с учетом положения точки на отрезке исследовалось в работах [11, 12], где установлен следующий результат.

Пусть $\omega(t)$ *— выпуклый модуль непрерывности такой, что функция* $t\omega'(t)$ *не убывает. Тогда для любой функции* $f \in W^r H^\omega$ *существует последовательность алгебраических многочленов* $Q_n^r(f; x)$ *степени* $n = r, r+1, \ldots$ (*при* $r = 0$ $n \geq 1$) *таких, что выполняется неравенство*

$$\left| f(x) - Q_n^r(f; x) \right| \leq \frac{K_r}{2} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right)^r \omega\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n} \sqrt{1-x^2} \right) + \\ + C_r \frac{\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-1} \omega\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \frac{1}{n^2} \right) \ln n}{n^{r+1}}, \tag{5}$$

где K_r *— константа Фавара, а величина* C_r *зависит только от* r.

Оценку (5) улучшить одновременно для всех модулей непрерывности нельзя. Однако в случае $r = 0$ для модулей непрерывности $\omega(t)$, которые медленно стремятся к нулю, когда t стремится к нулю, остаточный член в неравенстве (5) в точках ± 1 может не стремиться к нулю. Например, если $\omega(t) = 1/(2 - \ln t)$ для $t \in (0; 1]$ и $\omega(0) = 0$, то $\omega(1/n^2) \ln n \to 0{,}5$ при $n \to \infty$. В настоящей работе доказывается, что для x, расположенных вблизи концов отрезка $[-1, 1]$, произведение $\ln n \omega\left(\sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2 \right)$ в неравенстве (5) можно заменить на $\omega(\ln n / n^2)$.

Существует гипотеза, что $\ln n$ в неравенстве (5) вообще можно убрать.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\omega(t)$ *— выпуклый модуль непрерывности такой, что функция* $t\omega'(t)$ *не убывает. Тогда для любой функции* $f \in W^r H^\omega$ *существует последовательность алгебраических многочленов* $Q_n^r(f; x)$ *степени* $n = r, r + 1, \ldots$ (*при* $r = 0$ $n \geq 1$) *таких, что выполняется неравенство*

$$\left| f(x) - Q_n^r(f; x) \right| \leq \frac{K_r}{2} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right)^r \omega\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n} \sqrt{1-x^2} \right) + \\ + C_r \frac{\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r} \omega\left(\frac{\ln n}{n^2} \right)}{n^{r}},$$

где K_r *— константа Фавара, а величина* C_r *зависит только от* r.

2. Необходимые определения и результаты. Пусть

$$D_r(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt - \frac{r\pi}{2} \right)}{k^r}, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

— ядро Бернулли и $P_n^r(t)$ — тригонометрический полином степени не выше n наилучшего L_1-приближения $D_r(t)$. Тогда имеет место неравенство [10]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| D_r(t) - P_n^r(t) \right| \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt \leq C_r \frac{\ln n}{n^{r+1}}. \tag{6}$$

***Замечание* 1.** Всюду в дальнейшем абсолютные константы будем обозначать символом C, а константы, зависящие от параметра r, — символами C_r, хотя в разных местах они могут иметь различные значения.

Лемма 1 [12]. *Пусть* $\omega(t)$ — *выпуклый модуль непрерывности такой, что* $t\omega'(t)$ *не убывает. Тогда для любых положительных чисел* b, s *и* τ *имеет место неравенство*

$$|s\omega'(bs)-\tau\omega'(b\tau)| \le \omega'(b\tau)\,|s-\tau|.$$

Пусть $x_0 = 0$ и при $n \ge 5$

$$x_k = x_{k-1} + \frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

— точки отрезка $[0, 1]$, где $a \in [1, \pi]$ — некоторое постоянное число, которое при доказательстве теоремы будем выбирать в зависимости от параметра r. Обозначим через x_{N-1} наибольшую из тех точек, для которых выполняется неравенство $x_{N-1} \le \bar{x}$, где число $\bar{x} = \bar{x}_n < 1$ такое, что $\bar{x} + \frac{a}{n}\sqrt{1-\bar{x}^2} = 1$. Если $x_{N-1} = \bar{x}$, то из (7) следует, что $x_N = 1$, а если $x_{N-1} < \bar{x}$, то по определению считаем, что $x_N = 1$. Положим $E_k = \left[-x_{k+1}, -x_k\right] \cup \left[x_k, x_{k+1}\right]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Пусть MH — класс функций f, заданных на отрезке $[-1; 1]$ и удовлетворяющих условию Липшица с константой M: $|f(x_1) - f(x_2)| \le M|x_1 - x_2|$. Обозначим через $\phi_{k,a}(f; x)$ функцию из класса $M_k H$, существование которой для заданной функции $f(x)$ из класса H^ω ($\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности) установлено Н. П. Корнейчуком [13, 14], такую, что

$$\left|f(x) - \phi_{k,a}(f; x)\right| \le \Delta_k, \quad t \in [-1; 1], \tag{8}$$

где $M_k = \omega'\!\left(\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}\right)$, а

$$\Delta_k = \frac{1}{2}\left(\omega\!\left(\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}\right) - M_k\,\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, N, \quad a \in [1, \pi].$$

В работе [12] доказаны следующие утверждения.

Лемма 2. *Имеют место неравенства*

$$\Delta_k - \Delta_{k+1} < (M_{k+1} - M_k)(x_{k+1} - x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Лемма 3. *Пусть* $\omega(t)$ — *выпуклый модуль непрерывности. Тогда для любой функции* $f \in H^\omega$ *и любого числа* $a \in [1, \pi]$ *существует последовательность абсолютно непрерывных функций* $\left\{\psi_{n,a}(f; x)\right\}$ *таких, что*:

1) *почти всюду выполняется неравенство*

$$\left|\psi'_{n,a}(f; x)\right| \le M_{k+1}, \quad x \in E_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

2) $\left|f(x) - \psi_{n,a}(f; x)\right| \le \Delta_k$, $x \in E_k$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, *где* $M_k = \omega'\!\left(\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}\right)$, *а* $\Delta_k = \frac{1}{2}\left(\omega\!\left(\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}\right) - M_k\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}\right)$, $k = 1, 2, \ldots, N$.

Для доказательства теоремы необходимо несколько видоизменить лемму 3. Введем для этого еще число m как наибольшее, для которого выполняется неравенство $\sqrt{1-x_m^2} \ge \ln n/an$.

Лемма 4. *Пусть выполняется условие леммы* 3. *Тогда для любой функции* $f \in H^\omega$ *и любого числа* $a \in [1, \pi]$ *существует последовательность абсолют-*

но непрерывных функций $\left\{\tilde{\psi}_{n,a}(f;x)\right\}$ *таких, что*:

1) *почти всюду выполняется неравенство*

$$\left|\tilde{\psi}'_{n,a}(f;x)\right| \le M_{k+1}, \quad x \in E_k, \quad k = 0, 1, \dots, m,$$

$$\left|\tilde{\psi}'_{n,a}(f;x)\right| \le M_{m+1}, \quad |x| \ge x_{m+1};$$

2) $|f(x) - \tilde{\psi}_{n,a}(f;x)| \le \Delta_k$, $x \in E_k$, $k = 0, 1, \dots, m$, *и* $|f(x) - \tilde{\psi}_{n,a}(f;x)| \le \le \Delta_m$, $|x| \ge x_{m+1}$, *где числа* M_k *и* Δ_k *имеют тот же смысл, что и в лемме* 3.

Доказательство. На отрезке $\left[-x_{m+1}; x_{m+1}\right]$ положим $\tilde{\psi}_{n,a}(f;x) = \psi_{n,a}(f;x)$, где $\psi_{n,a}(f;x)$ — функция, существование которой следует из леммы 3, и определим функцию $\tilde{\psi}_{n,a}(f;x)$ на отрезке $x \in \left(x_{m+1}; 1\right]$. На отрезке $x \in \left[-1; -x_{m+1}\right)$ эта функция доопределяется аналогично. Из доказательства леммы 3 следует [12], что в точке x_{m+1} (так будет и в любой точке $x_i \in (0;1]$) либо $\psi_{n,a}(f;x_{m+1}) = \phi_{m+1,a}(x_{m+1})$, либо $\psi_{n,a}(f;x_{m+1}) < \phi_{m+1,a}(x_{m+1})$. В первом случае положим $\tilde{\psi}_{n,a}(f;x) = \phi_{m+1,a}(x)$ для $x \in \left(x_{m+1}; 1\right]$. В силу свойств функций $\phi_{k,a}(x)$ и монотонности величин Δ_k из неравенства (8) следует утверждение леммы 4 для $x \in [0;1]$. Во втором случае, как следует из доказательства леммы 3 (см. [12]), существует точка x_k такая, что $\psi_{n,a}(f;x_k) = \phi_{k,a}(f;x_k)$, а на интервалах $(x_{k+j}; x_{k+j+1})$, $j = 0, 1, \dots, m-k$, функция $\psi_{n,a}(f;x) < \phi_{k+j+1,a}(f;x)$, причем на каждом из этих интервалов функция $\psi_{n,a}(f;x)$ линейна и имеет производную, равную M_{k+j+1}, т. е. на отрезках $\left[x_{k+j}; x_{k+j+1}\right]$, $j = 0, 1, \dots, m-k$,

$$\psi_{n,a}(f;x) = l_{k,j} \equiv \phi_k(x_k) + \sum_{i=1}^{j} M_{k+i}(x_{k+i} - x_{k+i-1}) + M_{k+j+1}(t - x_{k+j}).$$

Положим для $x \in \left(x_{m+1}; 1\right]$ $\tilde{\psi}_{n,a}(f;x) = \min\left\{l_{k,m-k}(x), \phi_{m+1,a}(f;x)\right\}$. Очевидно, что $\left|\tilde{\psi}'_{n,a}(f;x)\right| \le M_{m+1}$ для $x \in \left(x_{m+1}; 1\right]$. Оценим уклонение $\left|f(x) - \tilde{\psi}_{n,a}(f;x)\right|$ на этом отрезке. Поскольку $\phi_{m+1,a}(f;x) \ge \tilde{\psi}_{n,a}(f;x)$, в силу (8) $\tilde{\psi}_{n,a}(f;x) - f(x) \le \phi_{m+1,a}(f;x) - f(x) \le \Delta_{m+1}$.

Если $\tilde{\psi}_{n,a}(f;x) = l_{k,m-k}(x)$, то, используя (8), определение функции $\tilde{\psi}_{n,a}(f;x)$ и неравенство $\phi_{k,a}(f;x) \le \phi_{k,a}(f;x_k) + M_k(x - x_k)$, получаем

$$\begin{aligned} f(x) - \tilde{\psi}_{n,a}(f;x) &= f(x) - \phi_{k,a}(f;x) + \phi_{k,a}(f;x) - \tilde{\psi}_{n,a}(f;x) \le \\ &\le \Delta_k + \phi_k(f;x_k) + M_k(x - x_k) - l_{k,m-k}(x) = \\ &= \Delta_k - \sum_{i=1}^{m-k} (M_{k+i} - M_k)(x_{k+i} - x_{k+i-1}) - (M_{k+j+1} - M_k)(x - x_m) \le \\ &\le \Delta_k - \sum_{i=1}^{m-k} (M_{k+i} - M_{k+i-1})(x_{k+i} - x_{k+i-1}). \end{aligned}$$

Применяя теперь лемму 2, имеем

$$f(t)-\tilde{\psi}_{n,a}(f;x) \; < \; \Delta_k \; - \sum_{i=1}^{m-k}(\Delta_{k+i-1}-\Delta_{k+i}) \; = \; \Delta_m .$$

Если $\tilde{\psi}_{n,a}(f;x) = \phi_{m+1}(f;x)$ в некоторой точке x, то в силу (8) $f(t) - \tilde{\psi}_{n,a}(f;x) \le \Delta_{m+1}$.

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы. Прежде всего заметим, что метод доказательства фактически совпадает с предложенным в работе [12], в частности, приближающие многочлены определяются подобно тому, как это было сделано в указанной работе. Сначала докажем теорему для $r=0$. Пусть $f(x)\in H^{\omega}$ и $\tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}_{n,\pi}(f;x)$ — функция, существование которой установлено в лемме 4. Так как для $x\in\left[x_k, x_{k+1}\right]$ $\sqrt{1-x^2} \le \sqrt{1-x_k^2}$, то $\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x_k^2}\right) \le \omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right)$ и в силу леммы 4

$$\left|\tilde{\psi}'(x)\right| \le \omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right), \quad x\in\left[-x_{m+1}, x_{m+1}\right], \tag{9}$$

а для $|x| \ge x_{m+1}$, в силу утверждения 1 леммы 4, с учетом того, что $\sqrt{1-x^2} < \ln n/an$, имеет место неравенство

$$\left|\tilde{\psi}'(x)\right| \le \omega'\left(\ln n/n^2\right). \tag{10}$$

Из оценок (9), (10) следуют неравенства

$$\left|\tilde{\psi}'(x)\right| \le \omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right), \tag{11}$$

$$\left|\tilde{\psi}'(x)\right| \le \omega'\left(\ln n/n^2\right), \quad x\in[-1,1]. \tag{12}$$

Оценка промежуточного приближения функции $f(x)$ функцией $\tilde{\psi}(x)$ получена в лемме 4. Чтобы получить приближение $\tilde{\psi}(x)$, рассмотрим алгебраический многочлен $Q_n^0(f;x)$ такой, что

$$Q_n^0(f;\cos t) = -\int_{-\pi}^{\pi} P_n^1(t-u)\,\tilde{\psi}'(\cos u)\sin u\,du,$$

где $P_n^1(t)$ — тригонометрический полином степени не выше n наилучшего L_1-приближения ядра $D_1(t)$. Тогда после замены $x=\cos t$, $t\in[0,\pi]$, используя неравенство (11), как и в [12], получаем

$$\left|\tilde{\psi}(x)-Q_n^0(f;x)\right| = \left|\tilde{\psi}(\cos t)+\int_{-\pi}^{\pi} P_n^1(t-u)\,\tilde{\psi}'(\cos u)\sin u\,du\right| =$$

$$= \left|\int_{-\pi}^{\pi}\left\{D_1(t-u)-P_n^1(t-u)\right\}\tilde{\psi}'(\cos u)\sin u\,du\right| \le$$

$$\le \int_{-\pi}^{\pi}\left|D_1(t-u)-P_n^1(t-u)\right|\omega'\left(\frac{\pi}{n}|\sin u|\right)|\sin u|\,du \le$$

$$\leq \omega'\left(\frac{\pi}{n}\sin t\right)\sin t\int_{-\pi}^{\pi}\left|D_1(t-u)-P_n^1(t-u)\right|du +$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}\left|D_1(t-u)-P_n^1(t-u)\right|\left|\omega'\left(\frac{\pi}{n}|\sin u|\right)|\sin u|-\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sin t\right)\sin t\right|du =$$

$$= \frac{\pi}{2n}\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sin t\right)\sin t + \Delta(t). \tag{13}$$

Для $\sin t \geq \sqrt{1-x_{N-1}^2}$ в [12] (см. неравенство (17)) получена оценка величины $\Delta(t)$:

$$\Delta(t) \leq \omega'\left(\frac{\pi}{n}\sin t\right)\frac{\ln n}{n^2} = \omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right)\frac{\ln n}{n^2}. \tag{14}$$

Пусть точка $\tilde{x} \in \left[x_m; x_{m+1}\right]$ такая, что $\sqrt{1-\tilde{x}^2} = \ln n/\pi n$, тогда для $|x| \leq \tilde{x}$

$$\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right)\frac{\ln n}{n^2} \leq \omega'\left(\frac{\pi \ln n}{\pi n^2}\right)\frac{\ln n}{n^2} \leq \omega\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \tag{15}$$

Оценим уклонение многочлена $Q_n^0(f;x)$ от функции $f(x)$ для $|x| \leq \tilde{x}$. Учитывая неравенства (13) – (15), оценку промежуточного приближения функции $f(x)$ функцией $\tilde{\psi}(x)$, полученную в лемме 4, и монотонность функции $t\omega'(t)$, для $x \in E_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, как и в работе [12] (см. неравенство (20)), имеем

$$\left|f(x)-Q_n^0(f;x)\right| \leq \left|f(x)-\tilde{\psi}(x)\right| + \left|\tilde{\psi}(x)-Q_n^0(f;x)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right) + C\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right)\frac{\ln n}{n^2}. \tag{16}$$

Отсюда для $|x| \leq \tilde{x}$ следует оценка

$$\left|f(x)-Q_n^0(f;x)\right| \leq \frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right) + C\omega\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \tag{17}$$

Пусть теперь $|x| \geq \tilde{x}$. В этом случае, используя неравенства (12) и (6), получаем

$$\left|f(x)-Q_n^0(f;x)\right| \leq \left|f(x)-\tilde{\psi}(x)\right| + \left|\tilde{\psi}(x)-Q_n^0(f;x)\right| \leq$$

$$\leq \Delta_m + \int_{-\pi}^{\pi}\left|D_1(t-u)-P_n^1(t-u)\right|\omega'\left(\frac{\pi}{n}|\sin u|\right)|\sin u|du \leq$$

$$\leq \Delta_m + \omega'\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\sin t\int_{-\pi}^{\pi}\left|D_1(t-u)-P_n^1(t-u)\right|du +$$

$$+ \omega'\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\int_{-\pi}^{\pi}\left|D_1(t-u)-P_n^1(t-u)\right||\sin u-\sin t|du \leq$$

$$\leq \Delta_m + \omega'\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\frac{\ln n}{n^2}\frac{\pi}{2n} + C\omega'\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\frac{\ln n}{n^2} \leq C\omega\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \tag{18}$$

Из (17), (18) следует теорема для $r = 0$.

***Замечание* 2.** Из неравенств (16), (18) вследствие выпуклости модуля непрерывности (производная не возрастает) следует неравенство

$$\left| f(x) - Q_n^0(f;x) \right| \leq \frac{1}{2}\,\omega\!\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right) + C\omega'\!\left(\frac{1}{n^2}\right)\frac{\ln n}{n^2}.$$

Существуют модули непрерывности такие, что

$$\omega'\!\left(\frac{1}{n^2}\right)\frac{\ln n}{n^2} \leq C\omega\!\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Например, $\omega(t) = (2 - \ln t)^{\alpha}$, $t \in (0;1]$, $\omega(0) = 0$, $\alpha \in (0;1]$. Поэтому для таких модулей непрерывности остаточный член в (17), (18) можно заменить на $C\omega\!\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

В случае $r > 0$ можно ограничиться функциями из класса $W^r H^{\omega}$, представимыми в виде

$$f_r(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1} f(t)\,dt,$$

где $f \in H^{\omega}$. Пусть

$$I_r(f(\cos u))(t) = \int_0^{2\pi} f(\cos u)\, D_r(t-u)\,du.$$

Положим

$$f_k(\cos t) = (-\sin t)^k\, I_k(f(\cos u))(t) + R_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{19}$$

Нетрудно проверить, что для любого $k = 2, 3, \ldots$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dx} R_k(t) = -\sin t\, R_{k-1}(t) + k(-\sin t)^{k-1} \cos t\, I_k(f(\cos u))(t), \tag{20}$$

а

$$\frac{d}{dx} R_1(t) = \cos t\, I_1(f(\cos u))(t) - \frac{\sin t}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\cos t)\,dt. \tag{21}$$

Рекуррентная зависимость (20), (21) позволяет найти (см. [12], лемму 8) оценку приближения функции $R_k(t)$, зная приближение функций $I_k(f(\cos u))(t)$ и $R_{k-1}(t)$.

Лемма 5. *Пусть* $\omega(t)$ *— выпуклый модуль непрерывности такой, что функция* $t\omega'(t)$ *не убывает. Тогда для любой функции* $f \in H^{\omega}$ *и любого натурального числа* r *существует последовательность алгебраических многочленов* $T_n^r(f;t)$ *степени* $n \geq 2$ *таких, что выполняется неравенство*

$$\left| I_r(f(\cos u))(t) - T_n^r(f;t) \right| \leq \frac{K_r}{2n^r}\,\omega\!\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}\sin t\right) + C_r\,\frac{\omega\!\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)}{n^r}, \quad t \in [0,\pi], \tag{22}$$

где K_r *— константа Фавара, а величина* C_r *зависит только от* r.

Доказательство. Пусть $f \in H^{\omega}$, $a_r = \dfrac{2K_{r+1}}{K_r}$, $r \in N$, и $\tilde{\psi}(x) \equiv \tilde{\psi}_{n,a_r}(f;x)$ — функция, построенная для f и данного числа a_r в соответствии с леммой 4. Представим $I_r(f(\cos u))(t)$ в виде

$$I_r(f(\cos u))(t) = I_r\big(f(\cos u) - \tilde{\psi}(\cos u)\big)(t) + I_r\big(\tilde{\psi}(\cos u)\big)(t) = V_1(t) + V_2(t)$$

и приблизим каждое слагаемое правой части. Первое будем аппроксимировать тригонометрическим полиномом

$$A_n^r(t) \; = \; \int\limits_{-\pi}^{\pi} P_n^r(t-u)(f(\cos u) - \psi(\cos u))\,du,$$

где $P_n^r(t)$ — тригонометрический полином степени не выше n наилучшего L_1-приближения ядра $D_r(t)$.

Пусть t_k, $k = 0, 1, \ldots, N,$ — точки отрезка $[0, \pi/2]$ такие, что $\cos t_k = x_k$ и $F_k = (t_{k+1}; t_k) \cup (\pi - t_k;\; \pi - t_{k+1}) \cup (-t_k;\; -t_{k+1}) \cup (-\pi + t_{k+1};\; -\pi + t_k)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $F_m = (-t_m; t_m) \cup (\pi - t_m;\; \pi) \cup (-\pi;\; t_m - \pi)$. Тогда, используя лемму 4 и учитывая четность функций $f(\cos u)$ и $\tilde{\psi}(\cos u)$, получаем

$$\left|V_1(t) - A_n^r(t)\right| \;\le\; \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m}\int\limits_{F_k}\left|D_r(t-u) - P_n^r(t-u)\right|\left\{\omega\!\left(\frac{a_r}{n}\sin t_{k-1}\right) - \right.$$

$$\left. - \;\omega'\!\left(\frac{a_r}{n}\sin t_{k-1}\right)\frac{a_r}{n}\sin t_{k-1}\right\}du \;\le\; \frac{1}{2}\left\{\omega\!\left(\frac{a_r}{n}(\sin t + \alpha)\right) - \right.$$

$$\left. - \;\omega'\!\left(\frac{a_r}{n}(\sin t + \alpha)\right)\frac{a_r}{n}(\sin t + \alpha)\right\}\int\limits_{0}^{2\pi}\left|D_r(u) - P_n^r(u)\right|du \;+$$

$$+\;\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m}\int\limits_{F_k}\left|D_r(t-u) - P_n^r(t-u)\right|\left\{\omega\!\left(\frac{a_r}{n}\sin t_{k-1}\right) - \omega\!\left(\frac{a_r}{n}(\sin t + \alpha)\right)\right\}du \;+$$

$$+\;\frac{a_r}{2n}\sum_{k=0}^{m}\int\limits_{F_k}\left|D_r(t-u) - P_n^r(t-u)\right|\left\{\omega'\!\left(\frac{a_r}{n}(\sin t + \alpha)\right)(\sin t + \alpha) - \right.$$

$$\left. - \;\omega'\!\left(\frac{a_r}{n}(\sin t_{k-1})\right)\sin t_{k-1}\right\}du \;\equiv\; I_1^0 \;+\; I_1^1 \;+\; I_1^2, \tag{23}$$

где α — положительная константа, которая в зависимости от t будет определена позже. Очевидно, что

$$I_1^0 \;=\; \frac{K_r}{2n^r}\,\omega\!\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}(\sin t + \alpha)\right) - \frac{K_{r+1}}{n^{r+1}}\,\omega'\!\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}(\sin t + \alpha)\right)(\sin t + \alpha). \tag{24}$$

Чтобы оценить I_1^1, рассмотрим два случая: а) $\sin t + \alpha \le \sin t_{k-1}$ и б) $\sin t + \alpha > \sin t_{k-1}$. В первом случае разность $\omega\!\left(\frac{a_r}{n}\sin t_{k-1}\right) - \omega\!\left(\frac{a_r}{n}(\sin t + \alpha)\right)$ неотрицательна и, в силу теоремы Лагранжа и монотонности производной $\omega'(t)$, не превышает $\frac{a_r}{n}\,\omega'\!\left(\frac{a_r}{n}(\sin t + \alpha)\right)(\sin t_{k-1} - \sin t - \alpha)$, а во втором отрицательна и, следовательно, меньше $\frac{a_r}{n}\,\omega'\!\left(\frac{a_r}{n}(\sin t + \alpha)\right)\left|\sin t_{k-1} - \sin t - \alpha\right|$. Таким образом, учитывая, что $u \in F_k$, и неравенство $0 < \sin t_{k-1} - \sin t_k \le \frac{2a_r}{n} \le \frac{2\pi}{n}$, имеем

$$\omega\!\left(\frac{a_r}{n}\sin t_{k-1}\right) - \omega\!\left(\frac{a_r}{n}(\sin t + \alpha)\right) \;\le$$

$$\le\; \frac{a_r}{n}\,\omega'\!\left(\frac{a_r}{n}(\sin t + \alpha)\right)\Big[\left|\sin t - |\sin u|\right| + \left||\sin u| - \sin t_{k-1}\right| + \alpha\Big] \;\le$$

$$\le\; \frac{a_r}{n}\,\omega'\!\left(\frac{a_r}{n}(\sin t + \alpha)\right)\left\{2\left|\sin\frac{t-u}{2}\right| + \frac{2\pi}{n} + \alpha\right\}.$$

Используя последнее неравенство и неравенство (6), получаем

$$I_1^1 \le C_r\left\{\omega'\left(\frac{a_r}{n}(\sin t+\alpha)\right)\frac{\ln n}{n^{r+2}}+\frac{1}{n^{r+2}}+\frac{\alpha}{n^{r+1}}\right\}.$$

Для $\sin t \ge \dfrac{\ln n}{n}$ положим $\alpha = 0$. Тогда

$$I_1^1 \le \frac{C_r}{n^r}\left\{\omega'\left(\frac{a_r \ln n}{n^2}\right)\frac{\ln n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right\} \le \frac{C_r}{n^r}\left\{\omega\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)+\frac{1}{n^2}\right\}. \tag{25}$$

Если $0 \le \sin t \le \dfrac{\ln n}{n}$, положим $\alpha = \ln n / n$. Тогда

$$I_1^1 \le \frac{C_r}{n^r}\left\{\omega'\left(\frac{a_r \ln n}{n^2}\right)\frac{\ln n}{n^2}+\frac{1+\ln n}{n^2}\right\} \le \frac{C_r}{n^r}\left\{\omega\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)+\frac{\ln n}{n^2}\right\}. \tag{26}$$

Таким образом, для всех $t \in [0;\pi]$ для I_1^1 имеет место оценка (26).

Чтобы оценить I_1^2, применим к разности

$$\omega'\left(\frac{a_r}{n}(\sin t+\alpha)\right)(\sin t+\alpha) - \omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t_{k-1}\right)\sin t_{k-1}$$

лемму 1, положив $b = \dfrac{a_r}{n}$, $s = \sin t_{k-1}$, $\tau = \sin t + \alpha$, и воспользуемся тем, что $u \in F_k$, а также неравенством $0 < \sin t_{k-1} - \sin t_k \le \dfrac{2a_r}{n} \le \dfrac{2\pi}{n}$:

$$\left|\omega'\left(\frac{a_r}{n}(\sin t+\alpha)\right)(\sin t+\alpha) - \omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t_{k-1}\right)\sin t_{k-1}\right| \le$$

$$\le \omega'\left(\frac{a_r}{n}(\sin t+\alpha)\right)\left|\sin t+\alpha-\sin t_{k-1}\right| \le$$

$$\le \frac{a_r}{n}\,\omega'\left(\frac{a_r}{n}(\sin t+\alpha)\right)\Big[\left|\sin t-|\sin u|\right|+\left||\sin u|-\sin t_{k-1}\right|+\alpha\Big] \le$$

$$\le \frac{a_r}{n}\,\omega'\left(\frac{a_r}{n}(\sin t+\alpha)\right)\left\{2\left|\sin\frac{t-u}{2}\right|+\frac{2\pi}{n}+\alpha\right\}.$$

Из последнего неравенства точно так же, как получены оценки (25), (26), для всех $t \in [0;\pi]$ получаем оценку величины I_1^2:

$$I_1^2 \le \frac{C_r}{n^r}\left\{\omega'\left(\frac{a_r \ln n}{n^2}\right)\frac{\ln n}{n^2}+\frac{1+\ln n}{n^2}\right\} \le \frac{C_r}{n^r}\left\{\omega\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)+\frac{\ln n}{n^2}\right\}. \tag{27}$$

Рассмотрим теперь приближение функции $V_2(t)$. Поскольку после интегрирования по частям

$$V_2(t) = I_r\big(\tilde{\psi}(\cos u)\big) = -\int_{-\pi}^{\pi} D_{r+1}(t-u)\,\tilde{\psi}'(\cos u)\sin u\,du,$$

для приближения функции $V_2(t)$ возьмем тригонометрический полином $B_n^r(t)$ вида

$$B_n^r(t) = -\int_{-\pi}^{\pi} P_n^{r+1}(t-u)\,\tilde{\psi}'(\cos u)\sin u\,du,$$

где $P_n^{r+1}(t)$ — тригонометрический полином степени не выше n наилучшего L_1-приближения ядра $D_{r+1}(t)$. Точно так же, как были доказаны неравенства (11), (12), нетрудно вывести, что

$$\left|\tilde{\psi}'(\cos u)\right| \leq \min\left\{\omega'\left(\frac{a_r}{n}|\sin u|\right), \omega'\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right\}, \quad u \in [-\pi, \pi]. \tag{28}$$

Используя неравенство (28), для $|x| \leq \tilde{x}$ получаем

$$\left|V_2(t) - B_n^r(f; x)\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left|D_{r+1}(t-u) - B_n^r(t-u)\right| \omega'\left(\frac{a_r}{n}|\sin u|\right)|\sin u| du \leq$$

$$\leq \omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)\sin t \int_{-\pi}^{\pi} \left|D_{r+1}(t-u) - B_n^r(t-u)\right| du +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \left|D_{r+1}(t-u) - B_n^r(t-u)\right| \left|\omega'\left(\frac{a_r}{n}|\sin u|\right)|\sin u| - \omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)\sin t\right| du =$$

$$= \frac{K_{r+1}}{n^{r+1}}\omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)\sin t + \Delta_r(t).$$

Оценка величины $\Delta_r(t)$ осуществляется точно так же, как и величины $\Delta(t)$ для $r = 0$:

$$\Delta_r(t) \leq C_r \min\left\{\omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)\frac{\ln n}{n^{r+2}}, \omega'\left(\frac{\ln n}{n}\right)\frac{\ln n}{n^{r+2}}\right\}.$$

Следовательно,

$$\left|V_2(t) - B_n^r(t)\right| \leq \frac{K_{r+1}}{n^{r+1}}\omega'\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}\sin t\right)\sin t +$$

$$+ C_r \min\left\{\omega'\left(\frac{a_r}{n}\sin t\right)\frac{\ln n}{n^{r+2}}, \omega'\left(\frac{\ln n}{n}\right)\frac{\ln n}{n^{r+2}}\right\} \leq \frac{C_r}{n^r}\omega\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \tag{29}$$

Пусть $T_n^r(f; t) = A_n^r(t) + B_n^r(t)$. Из неравенства

$$\left|I_r(f(\cos u))(t) - T_n^r(f; t)\right| \leq \left|V_1(t) - A_n^r(t)\right| + \left|V_2(t) - B_n^r(t)\right|$$

и оценок (23), (24), (26), (27), (29) следует справедливость леммы 5.

***Замечание* 3.** Из оценок (24), (26), (27), (29) для модулей непрерывности, указанных в замечании 2, следует, что величину $\omega\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$ в неравенстве (22) можно заменить на $\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

В работе [12] показано, что из соотношений (20), (21) следует существование для любого натурального числа r последовательности $\left\{M_n^r(t)\right\}$ четных тригонометрических полиномов степени не выше $n \geq 1$ таких, что

$$\left|R_r(t) - M_n^r(t)\right| \leq C_r \frac{\omega\left(\frac{\sin t + 1/n}{n}\right)(\sin t + 1/n)^{r-1}}{n^{r+1}}, \quad t \in [0; \pi]. \tag{30}$$

С учетом выпуклости модуля непрерывности правую часть оценки (30) можно заменить на

$$C_r \frac{\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)(\sin t + 1/n)^r}{n^r}.$$

Следовательно,

$$\left|R_r(t)-M_n^r(t)\right| \le C_r \frac{\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)(\sin t+1/n)^r}{n^r}, \quad t\in[0;\pi].$$

Из леммы 5, равенства (19) и последнего неравенства для любой функции $f\in H^{\omega}$ следует существование алгебраического многочлена $Q_n^r(f;x)$ такого, что для любого $t\in[0,\pi]$

$$\left|f_r(\cos t)-Q_n^r(f;\cos t)\right| \le \frac{K_r}{2}\left(\frac{\sin t}{n}\right)^r \omega\left(\frac{2K_{r+1}}{K_r n}\sin t\right)+$$

$$+\;C_r\frac{(\sin t+1/n)^r\,\omega\left(\ln n/n^2\right)}{n^r},$$

а это эквивалентно утверждению теоремы.

1. *Никольский С. М.* О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**. – С. 295 – 322.
2. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
3. *Корнейчук Н. П., Половина А. И.* О приближении непрерывных и дифференцируемых функций алгебраическими многочленами на отрезке // Докл. АН СССР. – 1966. – **166**, № 2. – С. 281 – 283.
4. *Корнейчук Н. П., Половина А. И.* О приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, алгебраическими многочленами // Мат. заметки. – 1971. – **9**, № 4. – С. 441 – 447.
5. *Корнейчук Н. П., Половина А. И.* О приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами // Укр. мат. журн. – 1972. – **24**, № 3. – С. 328 – 340.
6. *Лигун А. А.* О наилучшем приближении дифференцируемых функций алгебраическими многочленами // Изв. вузов. Математика. – 1980. – № 4. – С. 53 – 60.
7. *Темляков В. Н.* Приближение функций из класса W_∞^1 алгебраическими многочленами // Мат. заметки. – 1981. – **29**, № 4. – С. 597 – 602.
8. *Тригуб Р. М.* Прямые теоремы о приближении алгебраическими полиномами гладких функций на отрезке // Там же. – 1993. – **54**, № 6. – С. 113 – 121.
9. *Моторный В. П.* Приближение интегралов дробного порядка алгебраическими многочленами // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 5. – С. 603 – 613.
10. *Моторный В. П.* Приближение интегралов дробного порядка алгебраическими многочленами // Там же. – № 7. – С. 940 – 951.
11. *Моторний В. П.* Наближення функцій алгебраїчними многочленами з врахуванням положення точки на відрізку // Доп. НАН України. – 2001. – № 3. – С. 19 – 23.
12. *Моторный В. П.* О точных оценках поточечного приближения алгебраическими многочленами классов W^rH^{ω} // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 6. – С. 783 – 799.
13. *Корнейчук Н. П.* О наилучшем равномерном приближении на некоторых классах непрерывных функций // Докл. АН СССР. – 1961. – **140**. – С. 748 – 751.
14. *Корнейчук Н. П.* О наилучшем приближении непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1963. – **27**. – С. 29 – 44.

Получено 15.12.06