УДК 517.53.57

М. А. Сухорольський (Нац. ун-т „Львів. політехніка”)

ОБЛАСТЬ ЗБІЖНОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕЙЛЕРА СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

We consider Euler’s transformation of power series of an analytic function, which is its expansion into a series in system of polynomials. We investigate the domain of convergence of the transformation depending on the parameter of transformation and the character of singular points of the function. We show that the transformation extends the function beyond the boundary of the circle of convergence of its series on the boundary interval between two singular points of the function. In particular, we establish that the power series of the function whose singular points are located on the same beam is summarized by the transformation in a half-plane.

Рассмотрено преобразование Эйлера степенного ряда аналитической функции, являющегося ее разложением в ряд по системе полиномов. Исследована область сходимости преобразования в зависимости от параметра преобразования и характера особых точек функции. Показано, что преобразование продолжает функцию за пределы круга сходимости ее ряда на отрезке границы между двумя особыми точками функции. В частности, установлено, что степенной ряд функции, особые точки которой находятся на одном луче, суммируется преобразованием в полуплоскости.

Вступ. В роботах [1, 2] досліджено розвинення аналітичних функцій у ряди за системами поліномів, що є частинними сумами степеневого ряду заданої функції або конструюються з використанням коефіцієнтів степеневого ряду заданої функції. Зокрема, досліджено розвинення аналітичних функцій за системами поліномів вигляду

$$\left\{ P_n(z) \;=\; \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a_k\, z_0^{n-k}\, z^k \right\}_{n=0}^{\infty}, \tag{1}$$

де $C_n^k = 0$ при $n < k$ і C_n^k, $n \geq k$, — біноміальні коефіцієнти, z_0 — комплексне число (параметр), a_k — коефіцієнти степеневого ряду аналітичної функції $f(z)$,

$$S(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k, \tag{2}$$

де $S(z) = f(z)$, якщо $|z| < R$, $0 < R \leq \infty$.

Розвинення функції $f(z)$ у ряд за системою поліномів (1) є перетворенням Ейлера [3, 4] ряду (2) цієї функції,

$$E\{f(z); z_0\} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+z_0)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a_k\, z_0^{n-k}\, z^k. \tag{3}$$

У даній роботі досліджується область збіжності перетворення Ейлера (3) степеневого ряду (2) в залежності від параметра перетворення та властивостей функції.

1. Область збіжності перетворення Ейлера зі сталим параметром.

Теорема 1. *Нехай*: а) $f(z)$ — *функція, однозначна й аналітична в області* D, *і* (2) — *степеневий ряд цієї функції з одиничним кругом збіжності* $K: |z| < 1$, $K \subset D$; б) L — *кусково-гладка замкнена лінія, що охоплює особливі точки функції* $f\left(\frac{1}{t}\right)$.

Тоді перетворення Ейлера (3) *ряду* (2) *є аналітичною функцією в області*

$D_1 \subset D$ і $E\{f(z);\, z_0\} = f(z)$, якщо $z \in D_1$, де

$$D_1:\ \max_{t\in L} |\bar{t}z + z_0| \ < \ |1 + z_0|, \tag{4}$$

z_0 — комплексне число,

$$2\operatorname{Re} z_0 \ > \ -1. \tag{5}$$

Доведення. Запишемо формулу Коші для функції $f(z)$, $z \in D$, і перетворимо її таким чином:

$$f(z) \ = \ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{t - z} \ = \ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{t + z_0 t - (z_0 t + z)} \ = \ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{t(1 + z_0)\left(1 - \dfrac{z_0 t + z}{(1 + z_0)t}\right)}, \tag{6}$$

де Γ — замкнений кусково-гладкий контур, додатно орієнтований відносно області, що містить початок координат, $\Gamma \subset D$.

За умови $\left|\dfrac{z}{t} + z_0\right| < |1 + z_0|$ справедливим є розвинення

$$\left[1 - \frac{z_0 t + z}{(1 + z_0)t}\right]^{-1} \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_0 t + z)^n}{(1 + z_0)^n t^n} \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + z_0)^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k z_0^{n-k} z^k}{t^k}. \tag{7}$$

Позначимо через $D_1 \subset D$ область, точки якої задовольняють нерівність

$$\max_{t\in\Gamma}\left|\frac{z}{t} + z_0\right| \ < \ |1 + z_0|. \tag{8}$$

При цьому будемо вимагати виконання умови $|z_0| < |z_0 + 1|$ або $2\operatorname{Re} z_0 + 1 > 0$, що відповідає належності початку координат цій області. Підставивши розвинення (7) у формулу (6), з урахуванням розвинення (2) одержимо

$$f(z) \ = \ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + z_0)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k z_0^{n-k} z^k}{t^{k+1}} f(t)\,dt \ =$$

$$= \ \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + z_0)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k z_0^{n-k} z^k \int_\Gamma \frac{f(t)}{t^k}\,dt \ =$$

$$= \ \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + z_0)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k z_0^{n-k} z^k \int_{\Gamma_0} \frac{f(t)}{t^k}\,dt \ =$$

$$= \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + z_0)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k z_0^{n-k} z^k,$$

де Γ_0 — коло з центром у початку координат і радіусом, меншим за одиницю.

Одержаний ряд є перетворенням (3). Цей ряд збігається в області D_1, що визначається нерівністю (8).

Застосуємо до комплексної площини z інверсію $z = \frac{1}{\tau}$ відносно одиничного кола і позначимо через L образ контура Γ на комплексній площині τ. При цьому особливі точки функції $f\left(\frac{1}{\tau}\right)$ та початок координат належать області з границею L і, більш того, кожна особлива точка $z_m = r_m e^{i\varphi_m}$, $r_m \geq 1$, функції $f(z)$ відобразиться у точку $\tau_m = \rho_m e^{i\psi_m}$, $\rho_m \leq 1$, що лежить всередині одиничного круга на тому ж промені $\varphi = \varphi_m$. Тоді нерівність (8) можна записати у вигляді $\max\limits_{\tau \in L} |\tau z + z_0| < |1 + z_0|$, що відповідає формі (4).

Аналітичність функції $E(f(z); z_0)$ випливає з того, що похідна від перетворення Ейлера ряду функції $f(z)$ є перетворенням ряду похідної від цієї функції. Для перетворення похідної від цієї функції маємо вираз

$$E\left\{\frac{df(z)}{dz}; z_0\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n(z)}{(1+z_0)^{n+1}},$$

де $Q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (k+1) a_{k+1} z_0^{n-k} z^k$.

Знайдемо похідну від перетворення (3):

$$\frac{d}{dz} E\{f(z); z_0\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+z_0)^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} C_n^k k a_k z_0^{n-k} z^{k-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+z_0)^{n+2}} \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} (k+1) a_{k+1} z_0^{n-k} z^k.$$

Врахувавши тут формулу $C_{n+1}^{k+1} = \sum_{i=k}^{n} C_i^k$, а також формулу $1 + z_0 = \left(1 - \frac{z_0}{1+z_0}\right)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z_0^i}{(1+z_0)^i}$, яка справедлива за умови (5), одержимо

$$\frac{d}{dz} E\{f(z); z_0\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+z_0)^{n+2}} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} C_i^k (k+1) a_{k+1} z_0^{n-k} z^k =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+z_0)^{n+2}} \sum_{i=0}^{n} z_0^{n-i} Q_i = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i \sum_{n=i}^{\infty} \frac{z_0^{n-i}}{(1+z_0)^{n+2}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} Q_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0^n}{(1+z_0)^{n+i+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n}{(1+z_0)^{n+1}}.$$

Отже, перетворення Ейлера є аналітичною функцією в області (4).

Теорему доведено.

***Приклад* 1.** Розглянемо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ функції $f(z) = \frac{1}{1-z}$, аналітичної в області D (комплексної площини з вирізаним променем, що виходить з точки $z = 1$ у напрямі осі Ox). Класична сума цього ряду $S(z) = f(z)$, якщо $|z| < 1$. Перетворення Ейлера (3) ряду (1),

$$E\{f(z); z_0\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+z_0)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k z_0^{n-k} z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+z_0)^n}{(1+z_0)^{n+1}},$$

є рядом функції $f(z)$ за степенями $(z+z_0)^n$. Цей ряд збігається в області

$$|z+z_0| < |1+z_0| \tag{9}$$

всередині круга з центром у точці $(-z_0)$ і радіусом $R=|1+z_0|$.

Знайдемо область збіжності перетворення Ейлера ряду цієї функції за формулою (4). Границею області D в цьому випадку є нижній і верхній „береги” розрізу площин вздовж променя $1 \leq \operatorname{Re} z < \infty$, $\operatorname{Im} z = 0$, який при інверсії перейде у відрізок $0 \leq \operatorname{Re} t \leq 1$, $\operatorname{Im} t = 0$. Замкнену лінію L виберемо так, що при обході точки t спочатку по нижньому, а потім по верхньому „берегах” відрізка $\operatorname{Im} t = 0$, а $\operatorname{Re} t$ змінюється спочатку від нуля до $1-\varepsilon$, а потім від $1-\varepsilon$ до нуля, де $\varepsilon > 0$ — достатньо мала величина. Максимальне значення лівої частини нерівності (4) за умови $\operatorname{Im} t = 0$ досягається при $\operatorname{Re} t = 1-\varepsilon$ і тому для області збіжності перетворення одержимо рівняння $|(1-\varepsilon)z + z_0| < |1+z_0|$, яке внаслідок довільності ε можна записати у вигляді (9).

Теорема 2. *Нехай однозначну й аналітичну в області D функцію $f(z)$ задано степеневим рядом* (2) *з одиничним кругом збіжності $K: |z| < 1$, $K \subset D$, а її особливі точки дискретно розміщені на границі Γ_0 круга збіжності. Тоді на відрізку границі Γ_0 між двома сусідніми особливими точками $z_1 = e^{i\varphi_1}$ і $z_2 = e^{i\varphi_2}$, $\varphi_1 < \varphi_2$, функції $f(z)$ перетворення Ейлера* (3) *ряду* (2) *при $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$, де $r_0 > 0$ і $\varphi_0 = 0$, аналітично продовжує функцію $f(z)$ за границю області збіжності ряду* (1).

Доведення. Спочатку знайдемо область збіжності перетворення Ейлера степеневого ряду функції, що має одну особливу точку $z_1 = e^{i\varphi_1}$. Областю аналітичності цієї функції є комплексна площина z з вирізаним променем $r \geq 1$, $\varphi = \varphi_1$. При інверсії цей промінь відобразиться у відрізок $0 \leq \rho \leq 1$, $\psi = \varphi_1$ у комплексній площині t. Замкнену лінію L у формулі (4) виберемо так, що точка $t = \rho e^{i\psi}$, пробігаючи по нижньому та верхньому „берегах” відрізка, змінює полярний радіус відповідно від нуля до $1+\varepsilon$ і навпаки, а кут $\psi = \varphi_1$. Тоді значення лівої частини нерівності (4) дорівнює $\max\limits_{t \in L} |\bar{t} z + r_0| = |(1+\varepsilon)e^{-i\varphi_1} z + r_0|$ і відповідно нерівність (4) набере вигляду $\left|(1+\varepsilon)z + r_0 e^{i\varphi_1}\right| < 1 + r_0$. Внаслідок довільності ε цю нерівність можна записати у вигляді

$$\left|z + r_0 e^{i\varphi_1}\right| < 1 + r_0. \tag{10}$$

Це рівняння круга з центром у точці $-r_0 e^{i\varphi_1}$ і радіусом $1 + r_0$. Позначимо цей круг через K_1, а його границю через Γ_1. Характерним для області збіжності перетворення є те, що коло Γ_1 проходить через особливу точку $z_1 = e^{i\varphi_1}$ цієї функції, а також точка $z_1 = e^{i\varphi_1}$, початок координат та центр круга K_1 лежать на одній прямій і відповідно круг K належить області K_1.

Тепер розглянемо випадок, коли функція $f(z)$ має на одиничному колі Γ_0 k особливих точок $z_m = e^{i\varphi_m}$, $m = \overline{1,k}$. Тоді областю збіжності перетворення є добуток кругів K_m, рівняння яких мають вигляд (10), $\left|z + r_0 e^{i\varphi_m}\right| < 1 + r_0$, $m = \overline{1,k}$. Цей добуток не є порожньою множиною, оскільки кожний із кругів містить одиничний круг збіжності ряду (1). Оскільки $\varphi_m < \varphi_{m+1}$ і $r_0 > 0$, то відповідні два кола Γ_m і Γ_{m+1} (границі кругів K_m і K_{m+1}), дотикаючись до кола Γ_0 у різних точках, утворюють разом з ним криволінійний трикутник $K_{m,m+1}$, який лежить поза кругом K. Отже, в цьому випадку область збіжності перетворення містить нескінченну множину точок поза кругом збіжності ряду (2).

Розглянемо ще один можливий випадок, коли функція $f(z)$ має особливі точки як на колі Γ_0, так і поза ним. Нехай особлива точка $z^0 = r^0 e^{i\varphi^0}$ ($r^0 > 1$) лежить поза колом Γ_0 і $\varphi_m < \varphi^0 < \varphi_{m+1}$. Тоді рівняння (4) набере вигляду $\left|\dfrac{e^{-i\varphi^0}}{r^0} z + r_0\right| < 1 + r_0$ або $\left|z + r^0 r_0 e^{i\varphi^0}\right| < r^0(1 + r_0)$. Це рівняння круга K^0 з центром у точці $\left(-r^0 r_0 e^{i\varphi^0}\right)$ і радіусом $r^0(1 + r_0)$. Оскільки $r^0 > 1$, то $K \subset \subset K^0$ і перетин криволінійного трикутника $K_{m,m+1}$ з колом K^0 завжди є непорожньою множиною.

Теорему доведено.

***Приклад* 2.** Розглянемо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$ функції $f(z) = \dfrac{1}{1 - z^2}$, аналітичної в комплексній площині з двома розрізами вздовж дійсної осі, від $-\infty$ до -1 і від $+1$ до ∞. Класична сума цього ряду $S(z) = f(z)$ при $|z| < 1$. За формулою (3) при $\varphi_0 = 0$ знайдемо перетворення Ейлера цього ряду $E\{f(z);\ r_0\} = = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(1 + r_0)^{n+1}} \sum_{k=0,2,\ldots}^{n} C_n^k r_0^{n-k} z^k$, область збіжності якого згідно з формулою (10) є перетином двох кругів $K_1 : |z + r_0| < 1 + r_0$ і $K_{-1} : |z - r_0| < 1 + r_0$.

Знайдемо область збіжності перетворення, виходячи з властивостей степеневих рядів. Запишемо перетворення таким чином:

$$E\{f(z); r_0\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + r_0)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1 + (-1)^k}{2} C_n^k r_0^{n-k} z^k =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + r_0)^n}{(1 + r_0)^{n+1}} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z - r_0)^n}{(1 + r_0)^{n+1}}.$$

Одержані тут два ряди є розвиненням двох складових функції $\dfrac{1}{1 - z^2} = = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1 - z} + \dfrac{1}{1 + z}\right)$. Перший з них — розвинення функції $\dfrac{1}{2(1 - z)}$ в ряд за степенями $z - r_0$, який збігається в кузі K_1, другий — розвинення функції $\dfrac{1}{2(1 + z)}$ в ряд за степенями $z + r_0$, який збігається в крузі K_{-1}. Очевидно, область збіжності суми цих рядів є областю збіжності перетворення Ейлера вихідного ряду функції.

2. Перетворення Ейлера зі змінними параметрами. Перетворення Ейлера (3) ряду (2) також має сенс, якщо $z_0 = \varphi(z)$ — функція змінної z. Розглянемо випадок лінійної функції

$$z_0 = qz, \tag{11}$$

де $q = q_1 + q_2 i$.

Підставивши вираз (11) у формулу (3), запишемо перетворення Ейлера ряду (1) з урахуванням формули (2) у вигляді ряду

$$E\{f(z);qz\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k q^{n-k}\right)\frac{z_n}{(1+qz)^{n+1}}, \tag{12}$$

що є розвиненням функції $f(z)$ за системою $\left\{N_n(z) = \dfrac{z_n}{(1+qz)^{n+1}}\right\}_{n=0}^{\infty}$.

Область збіжності ряду (12) одержимо з нерівності (4) з урахуванням формули (11):

$$D_2 : \max_{t\in L}|\bar{t}+q||z| < |1+qz|. \tag{13}$$

Якщо ввести позначення

$$k = \max_{t\in L}|\bar{t}+q|, \tag{14}$$

то нерівність (13) можна записати у вигляді

$$\left(k^2-|q|^2\right)\left(x^2+y^2\right) - 2q_1x + 2q_2y - 1 < 0$$

або

$$\left|z - \frac{q}{k^2-|q|^2}\right| < \frac{k}{k^2-|q|^2} \tag{15}$$

за умови $k > |q|$, де $|q|^2 = q_1^2 + q_2^2$. Якщо $k = |q|$, то нерівність (13) набере вигляду

$$-2q_1x + 2q_2y - 1 < 0. \tag{16}$$

Зазначимо також, що нерівність $k \geq |q|$ завжди виконується, оскільки початок координат лежить у замкненій області з границею L.

Отже, область збіжності перетворення (12) є кругом (15), якщо $k > |q|$, і півплощиною (16), якщо $k = |q|$.

Теорема 3. *Перетворення Ейлера* (12) *збіжного в крузі* $K : |z| < 1$, $K \subset D$, *степеневого ряду* (2) *аналітичної в області* D *функції* $f(z)$ *є аналітичною функцією в області* $D_2 \subset D$.

Доведення. Аналітичність перетворення (12) випливає з умови рівності перетворення Ейлера ряду похідної від функції $f(z)$ і похідної від перетворення цієї функції. Для похідної від функції $f(z)$ маємо степеневий ряд $\dfrac{dS(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,a_{k+1}\,z^k$ і його перетворення Ейлера

$$E\left\{\frac{df(z)}{dz};qz\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k\,(k+1)a_{k+1}\,q^{n-k}\right)N_n(z).$$

Диференціюючи почленно ряд (12), одержуємо $\dfrac{d}{dz}E\{f(z);\ qz\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k\,a_k\,q^{n-k}\right)\dfrac{d}{dz}N_n(z)$, або, враховуючи формули $\dfrac{d}{dz}N_0 = -qN_0 + q^2N_1$, $\dfrac{d}{dz}N_n = nN_{n-1} - (2n+1)\,qN_n + (n+1)\,q^2N_{n+1}$, $n \geq 1$, і групуючи коефіцієнти при функціях $N_n(z)$,

$$\frac{d}{dz}E\{f(z);qz\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left[nC_{n-1}^{k} - (2n+1)C_n^k + (n+1)C_{n+1}^k\right]a_k q^{n+1-k}\right)N_n(z) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n+1} k\, C_n^{k-1} a_k q^{n+1-k}\right)N_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k+1) a_{k+1} q^{n-k}\right)N_n(z).$$

Отже, має місце рівність $\frac{d}{dz}E\{f(z);\, qz\} = E\left\{\frac{df(z)}{dz};\, qz\right\}$. Оскільки перетворення Ейлера функції $E\left\{\frac{df(z)}{dz};\, qz\right\}$ збігається в області D_2, перетворення (12) є аналітичною функцією в цій області.

Теорему доведено.

Теорема 4. *Нехай однозначна й аналітична функція* $f(z)$ *задається збіжним в одиничному крузі* K *рядом* (2), *має на границі* Γ_0 *цього круга особливу точку* $z_0 = e^{i\varphi_0}$, *а всі інші її особливі точки лежать на колі або поза ним*, Γ: $\left|z + r_0 e^{i\varphi_0}\right| = 1 + r_0,\ 0 \le r_0 < \infty$.

Тоді перетворення Ейлера (12) *збігається*: а) *у крузі*

$$\left|z + \frac{m(2r_0+1)}{2m+1}e^{i\varphi_0}\right| < \frac{(m+1)(2r_0+1)}{2m+1}, \tag{17}$$

якщо параметр $q = -\frac{m}{1+2r_0}e^{-i\varphi_0}$, $r_0 \le m < \infty$; б) *у півплощині*

$$x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 < 1, \tag{18}$$

якщо коло Γ *вироджується* (*при* $r_0 \to \infty$) *в пряму* $x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 = 1$ *і* $q = -\frac{1}{2}e^{-i\varphi_0}$; в) *у крузі*

$$\left|z + \frac{q}{2|q|+1}\right| < \frac{|q|+1}{2|q|+1}, \tag{19}$$

якщо Γ — *одиничне коло з центром у початку координат* ($r_0 = 0$) *і* q — *довільне комплексне число*.

Доведення. Образ області, що лежить зовні кола Γ, при інверсії $z = \frac{1}{\bar{t}}$ відобразиться у круг з границею

$$L_0: \left|t - \frac{r_0}{1+2r_0}e^{i\varphi_0}\right| = \frac{1+r_0}{1+2r_0}. \tag{20}$$

Нехай L: $\left|t - \frac{r_0}{1+2r_0}e^{i\varphi_0}\right| = \frac{1+r_0}{1+2r_0} + \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ — достатньо мале число. Максимальне значення величини $|\bar{t} - q|$ у рівнянні (13), якщо $q = -q_0 e^{-i\varphi_0}$, $0 \le q_0 < \infty$, досягається в точці $t = -\left(\frac{1}{2r_0+1} + \varepsilon\right)e^{i\varphi_0}$ і тому за формулою (14) маємо $k = \frac{1}{2r_0+1} + q_0 + \varepsilon$. Тоді за формулою (15) одержуємо нерівність

$$\left| z + \frac{q_\varepsilon (2r_0+1)^2 e^{i\varphi_0}}{1+2q_\varepsilon(2r_0+1)} \right| < \frac{[1+(2r_0+1)q_\varepsilon](2r_0+1)}{1+2q_\varepsilon(2r_0+1)}, \quad q_\varepsilon = q_0 + \varepsilon. \tag{21}$$

Звідси, за умови, що ε — достатньо мале число, позначаючи $q_0 = \dfrac{m}{2r_0+1}$, отримуємо нерівність (17).

Розглянемо випадок б), коли коло Γ вироджується у пряму $x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 = 1$. Тоді образом цієї прямої при інверсії відносно одиничного кола буде коло $L_0 : \left| t - \frac{1}{2}e^{i\varphi_0} \right| = \frac{1}{2}$ або у полярній системі координат $\rho = \cos(\psi - \varphi_0)$, $\varphi_0 - \frac{\pi}{2} < \psi \le \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$. Якщо вибрати коло $L : \left| t - \frac{1}{2}e^{i\varphi_0} \right| = \frac{1}{2} + \varepsilon$ і параметр $q = -\frac{1}{2}e^{-i\varphi_0}$ у формулі (13), то одержимо $k = \max\limits_{t\in L}|\bar{t} + q| = \max\limits_{t\in L}|t + \bar{q}| = \max\limits_{t\in L}\left| t - \frac{1}{2}e^{i\varphi_0} \right| = \frac{1}{2} + \varepsilon$ і, відповідно, $|q|^2 - k^2 = \varepsilon(1+\varepsilon)$. При зменшенні числа ε радіус круга (15) збільшується пропорційно ε^{-1} і тому область збіжності перетворення можна записати у вигляді $x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 < 1$.

Область збіжності перетворення Ейлера (12) для випадку, коли $r_0 = 0$, а q — довільне комплексне число, одержимо з формули (21) при $r_0 = 0$ і $q = |q|e^{i\varphi_0}$. Тут φ_0 — довільний кут, оскільки при r_0 коло Γ збігається з одиничним колом і по суті особливою може бути будь-яка точка цього кола. Підставивши значення цих величин у формулу (20), одержимо формулу (19).

Теорема 5. *Нехай функція* $f(z)$, *однозначна й аналітична у комплексній площині з вирізаним променем* $|z| \ge 1$, $\arg z = \varphi_0$, *задається збіжним в одиничному крузі* K *рядом* (2). *Тоді перетворення Ейлера* (12) *є аналітичною функцією у кожній скінченній точці півплощини* $-2q_1x + 2q_2y - 1 < 0$, *якщо тільки* $q_1\cos\varphi_0 - q_2\sin\varphi_0 = -\frac{1}{2}$.

Доведення. Образом при інверсії $z = \frac{1}{t}$ променя $|z| \ge 1$, $\arg z = \varphi_0$, у комплексній площині є відрізок $0 \le |t| \le 1$, $\arg t = \varphi_0$. Замкнену лінію L у формулах (13) і (14) виберемо так, що точка $t = \rho e^{i\psi}$, пробігаючи по нижньому та верхньому „берегах" відрізка, змінює полярний радіус відповідно від нуля до $1+\varepsilon$ і навпаки, а кут $\psi = \varphi_0$. Тоді якщо точка $q = q_1 + iq_2$ справджує умову $q_1\cos\varphi_0 - q_2\sin\varphi_0 = -\frac{1}{2}$ (лежить на відповідній прямій), то $k - |q| = \max\limits_{t\in L}|\bar{t} + q| - |q| = \varepsilon$ і рівняння (15) запишемо у вигляді $A\varepsilon\left(x^2 + y^2\right) - 2q_1x + 2q_2y - 1 < 0$. Оскільки величину ε можна вибрати як завгодно малою, можемо стверджувати, що перетворення Ейлера (12) ряду функції $f(z)$ збігається в будь-якій скінченній точці півплощини $-2q_1x + 2q_2y - 1 < 0$, якщо q_1 і q_2 справджують умову $q_1\cos\varphi_0 - q_2\sin\varphi_0 = -\frac{1}{2}$.

Теорему доведено.

***Приклад* 3.** Знайдемо область збіжності перетворення Ейлера степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ функції $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$, що має одну особливу точку $z = 1$. Класична сума цього ряду $S(z) = f(z)$, якщо $|z| < 1$. Знайдемо перетворення Ейлера степеневого ряду цієї функції за формулою (12): $E\{f(z);\ qz\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k+1) q^{n-k}\right)\dfrac{z^n}{(1+qz)^{n+1}}$. Підсумувавши внутрішню суму у цій формулі, одержимо

$$E\{f(z); qz\} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+q+1)(1+q)^{n-1}\frac{z^n}{(1+qz)^{n+1}}, \tag{22}$$

де $q = q_1 + iq_2$.

Для відшукання області збіжності перетворення можна застосувати теорему 5, оскільки функція $f(z)$ має особливу точку $z = 1$ і аналітична у площині з вирізаним променем $1 \le |z| < \infty$, $\arg z = 0$. Тоді для $q = -\dfrac{1}{2} + iq_2$, де q_2 — довільне дійсне число, перетворення (22) збігається у півплощині $x + 2q_2 y - 1 < 0$, зокрема якщо $q_2 = 0$, то $E\left\{f(z);\ -\dfrac{z}{2}\right\} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)z^n}{(2-1)^{n+1}}$ і $E\left\{f(z);\ -\dfrac{z}{2}\right\} = f(z)$ у півплощині $\operatorname{Re} z < 1$.

Висновки. Перетворення Ейлера степеневого ряду аналітичної функції є по суті її розвиненням в ряди за системами біортогональних функцій. Застосування перетворення до послідовностей розвинено в роботі [5]. Область збіжності перетворення — не кругова область, і її форма залежить від значень параметрів перетворення та характеру особливих точок функції. Перетворення із сталим параметром використано у роботах [2, 3] для наближення аналітичних функцій послідовностями частинних сум рядів за системою поліномів $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, зображення розв'язків крайових задач для рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами та узагальненого підсумовування степеневих рядів. Другий варіант перетворення (із змінним параметром) є розвиненням аналітичної функції за системою функцій $\{N_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, і його використано у роботі [4] для відшукання узагальнених сум числових рядів. Легко переконатися [1], виходячи з формули (12), що система функцій $\left\{\omega_k(z) = \dfrac{(1+qz)^k}{z^{k+1}}\right\}_0^{\infty}$ є біортогональною з системою функцій $\{N_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ на замкненому контурі, що охоплює початок координат.

1. *Маркушевич А. И.* Избранные главы теорий аналитических функций. – М.: Наука, 1976 – 192 с.
2. *Сухорольський М. А.* Розвинення аналітичних функцій за системами поліномів типу Меллі-на // Вісн. ун-ту „Львів. політехніка". Сер. фіз.-мат. науки. – 2005. – № 346. – С. 111 – 115.
3. *Сухорольський М. А.* Підсумовування розбіжних степеневих рядів // VIII міжн. конф., присвячена пам'яті акад. М. П. Кравчука (11 – 14 травня 2000 р., Київ): Матеріали конф. – Київ: АТ „ВІПОЛ", 2000. – С. 369.
4. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 2 т. – М.: Наука, 1969. – Т. 2. – 800 с.
5. *Altay B., Basar F.* Some Euler sequence space of nonabsolute type // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 1. – С. 3 – 17.

Одержано 15.05.06,
після доопрацювання — 02.03.07