УДК 517.51

А. Ф. Конограй, С. А. Стасюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩІ M-ЧЛЕННІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ У ПРОСТОРІ L_q

We obtain order estimates for the best M-term trigonometric approximations of classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic multivariable functions in the space L_q for some values of the parameters p and q.

Получены порядковые оценки для наилучших M-членных тригонометрических приближений классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q для некоторых значений параметров p и q.

Вступ. Нехай $L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, — простір 2π-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p на кубі $\pi_d = \prod_{j=1}^{d}[0;2\pi]$ функцій $f(x) = f(x_1, \ldots$ $\ldots, x_d)$, в якому норма визначається рівностями

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(\pi_d)} = \left((2\pi)^{-d}\int\limits_{\pi_d}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \operatorname{ess}\sup_{x\in\pi_d}|f(x)|.$$

Далі будемо вважати, що для функцій $f \in L_p(\pi_d)$ виконується додаткова умова

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx_j = 0, \quad j = \overline{1,d}.$$

Наведемо визначення класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$, розглянутого в роботі [1].

Для $f \in L_p(\pi_d)$ введемо мішаний модуль неперервності порядку l

$$\Omega_l(f,t)_p = \sup_{\substack{|h_j|\le t_j \\ j=\overline{1,d}}}\left\|\Delta^l_h f(x)\right\|_p,$$

де $\Delta^l_h f(x) = \Delta^l_{h_d}\ldots\Delta^l_{h_1} f(x) = \Delta^l_{h_d}\left(\ldots\left(\Delta^l_{h_1} f(x)\right)\right)$ — мішана l-та різниця з кроком h_j за змінною x_j і

$$\Delta^l_{h_j} f(x) = \sum_{n=0}^{l}(-1)^{l-n}C_l^n\, f\big(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j + nh_j, x_{j+1},\ldots,x_d\big).$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1,d}$; $\Omega(t) = 0$, $\prod_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ зростає по кожній змінній;

3) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \leq \left(\prod_{j=1}^{d} m_j\right)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$;

4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \geq 0$, $j = \overline{1, d}$.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє також умови (S), (S_l), які називають умовами Барі – Стєчкіна [2]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S), якщо $\varphi(\tau)/\tau^{\alpha}$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\alpha}} \leq C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\alpha}}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Функція $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\varphi(\tau)/\tau^{\gamma}$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\gamma}} \geq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\gamma}}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих t_i, $i \neq j$.

Зазначимо, що функції, які задовольняють умови 1 – 4, (S) та (S_l), можуть мати вигляд

$$\Omega(t) = t_1^{r_1} \ldots t_d^{r_d} \left(\log \frac{1}{t_1}\right)^{m_1} \ldots \left(\log \frac{1}{t_d}\right)^{m_d},$$

де $0 < r_j < l$, $j = \overline{1, d}$, а m_j, $j = \overline{1, d}$, — фіксовані дійсні числа.

Для $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ і заданої функції $\Omega(t)$ типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1 – 4, клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$ визначається таким чином:

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) \colon \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \leq 1 \right\},$$

де

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left\{ \int_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f, t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_{t > 0} \frac{\Omega_l(f, t)_p}{\Omega(t)}.$$

Зазначимо, що при $\theta = \infty$ клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$ збігається з класом H^{Ω}_p, розглянутим у роботі [3], а при $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $r_j > 0$, — з класом Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$ (див., наприклад, [4]).

Означимо деякі порядкові співвідношення, які будуть використовуватись далі.

Для функцій $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1 \ll \mu_2$ означає, що існує стала $C > 0$ така, що $\mu_1(N) \le C\mu_2(N)$. Співвідношення $\mu_1 \asymp \mu_2$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1 \ll \mu_2$ та $\mu_1 \gg \mu_2$. Зауважимо, що всі сталі C_i, $i = 1, 2, \ldots$, які будуть використовуватися в роботі, можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору $\mathbb{R}^d$.

Якщо $\mathcal{A}$ — скінченна множина, то через $|\mathcal{A}|$ будемо позначати кількість її елементів.

Кожному вектору $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, поставимо у відповідність множину

$$\rho(s) = \left\{k = (k_1, \ldots, k_d) \colon 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, k_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, j = \overline{1, d}\right\},$$

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k, x)},$$

де

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$$

— коефіцієнти Фур'є функції f, $(k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_d x_d$.

В [1] для $1 < p < \infty$ і заданої функції $\Omega(t)$ типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1 – 4, (S) і (S_l), встановлено, що

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left\{\sum_s \Omega\left(2^{-s}\right)^{-\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1}$$

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_s \frac{\|\delta_s(f, x)\|_p}{\Omega\left(2^{-s}\right)}, \tag{2}$$

де $\Omega(2^{-s}) = \Omega\left(2^{-s_1}, \ldots, 2^{-s_d}\right)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$.

Нижче ми наведемо для норм функцій із класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ аналогічні до (1) і (2) зображення у випадках $p = 1$ і $p = \infty$, дещо видозмінивши при цьому „блоки" $\delta_s(f, x)$.

Нехай $V_n(t)$ означає ядро Валле Пуссена порядку $2n - 1$, тобто

$$V_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2\sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k-n}{n}\right) \cos kt.$$

Кожному вектору $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j - 1}}(x_j)\right)$$

і для $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, через $A_s(f, x)$ позначимо згортку

$$A_s(f, x) = f(x) * A_s(x).$$

Для $1 \le p \le \infty$ і заданої функції $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1 – 4, (S) і (S_l), зображення норм функцій з класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна подати у вигляді

$$\| f \|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_s \Omega\left(2^{-s}\right)^{-\theta} \| A_s(f, x) \|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{3}$$

$$\| f \|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_s \frac{\| A_s(f, x) \|_p}{\Omega\left(2^{-s}\right)}. \tag{4}$$

Співвідношення (3) було встановлено в роботі [5], а (4) — в [3].

Зазначимо, що далі в роботі будемо розглядати класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначаються функцією типу мішаного модуля неперервності порядку l деякого спеціального вигляду

$$\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j \right), \tag{5}$$

де $\omega(\tau)$ — задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S) і (S_l). Для $\Omega(t)$ вигляду (5) виконуються властивості 1 – 4 функції типу мішаного модуля неперервності порядку l, а також умови (S) і (S_l), і тому зберігаються наведені вище зображення (1) – (4) норм функцій класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Перейдемо безпосередньо до означення найкращого M-членного тригонометричного наближення.

Для $f \in L_q(\pi_d)$ позначимо через

$$e_M(f)_q = \inf_{\{k^j\}_{j=1}^M} \inf_{\{c_j\}_{j=1}^M} \left\| f(x) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i\left(k^j, x\right)} \right\|_q$$

найкраще M-членне тригонометричне наближення функції f у просторі L_q, де $\left\{k^j\right\}_{j=1}^M$ — набір векторів $k^j = \left(k_1^j, \ldots, k_d^j\right)$ з цілочисловими координатами, c_j — довільні числа.

Якщо F — деякий функціональний клас, то покладемо

$$e_M(F)_q = \sup_{f \in F} e_M(f)_q. \tag{6}$$

Величина $e_M(f)_2$ для функції однієї змінної була введена С. Б. Стєчкіним [6] при формулюванні критерію абсолютної збіжності рядів Фур'є. Згодом величини $e_M(f)_q$ і $e_M(F)_q$, $1 \le q \le \infty$, почали досліджувати вже з точки зору апроксимації.

Для деяких класів функцій багатьох змінних дослідження поведінки величин (6) проводились зокрема, в роботах [7 – 10], в яких можна ознайомитися з більш детальною бібліографією.

1. Допоміжні твердження. Наведемо кілька відомих тверджень, які будемо використовувати у подальшому викладі.

Теорема А (Літтлвуда – Пелі [4, с. 65]). *Нехай задано* $1 < p < \infty$. *Існують додатні числа* C_3, C_4 *такі, що для кожної функції* $f \in L_p(\pi_d)$ *виконуються співвідношення*

$$C_3 \| f \|_p \le \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f, x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \le C_4 \| f \|_p. \tag{7}$$

З (7) легко отримати (див., наприклад, [8, с. 17]) співвідношення

$$\| f \|_p \ll \left(\sum_s \| \delta_s(f, x) \|_p^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}}, \tag{8}$$

де $p_0 = \min\{p; 2\}$.

Теорема Б [11]. *Нехай* $T_n(x)$ — *тригонометричний поліном порядку* $n = (n_1, \ldots, n_d)$,

$$T_n(x) = \sum_{|k_1| \le n_1} \ldots \sum_{|k_d| \le n_d} c_{k_1, \ldots, k_d} e^{i(k, x)},$$

де n_j, $j = \overline{1, d}$, — *натуральні числа*, $c_{k_1, \ldots, k_d}$ — *довільні коефіцієнти. Тоді при* $1 \le q < p \le \infty$ *має місце співвідношення*

$$\| T_n(x) \|_p \le 2^d \left(\prod_{j=1}^{d} n_j \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \| T_n(x) \|_q. \tag{9}$$

Нерівність (9) була встановлена С. М. Нікольським і отримала назву „нерівності різних метрик”. У випадку $d = 1$ і $p = \infty$ відповідну нерівність довів Джексон [12].

Теорема В [3]. *Нехай* $\Omega(t)$ *задовольняє умови* (S) *та* (S_l). *Функція* $f \in L_q(\pi_d)$ *належить класові* H_q^{Ω} *тоді і тільки тоді, коли*

$$\| \delta_s(f, x) \|_q \ll \Omega(2^{-s}), \quad 1 < q < \infty,$$

$$\| A_s(f, x) \|_q \ll \Omega(2^{-s}), \quad 1 \le q \le \infty.$$

Лема А [7, с. 25]. *Нехай* $1 \le p < q < \infty$ *і* $f \in L_p(\pi_d)$. *Тоді*

$$\| f \|_q \ll \left\{ \sum_s \left(\| \delta_s(f, x) \|_p \, 2^{\| s \|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}},$$

де $\| s \|_1 = s_1 + s_2 + \ldots + s_d$.

Лема Б [7, с. 28]. *Нехай* $1 < p < q \le \infty$ *і* $f \in L_p(\pi_d)$. *Тоді*

$$\| f \|_p \gg \left\{ \sum_s \left(\| \delta_s(f, x) \|_q \, 2^{\| s \|_1 \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right)} \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Лема B [9]. *Нехай* $2 < q < \infty$. *Для будь-якого тригонометричного полінома* $P(\Theta_N, x)$, *що містить не більше* N *гармонік, і для довільного* $M < N$ *знайдеться тригонометричний поліном* $P(\Theta_M, x)$, *не більше* M *коефіцієнтів якого є відмінними від нуля, такий, що*

$$\| P(\Theta_N, x) - P(\Theta_M, x) \|_q \le C_5 \sqrt{\frac{N}{M}} \| P(\Theta_N, x) \|_2,$$

причому $\Theta_M \subset \Theta_N$, $C_5 > 0$.

2. Порядки величин $e_M\left(B^{\Omega}_{1,\theta}\right)_q$ при $1 < q < \infty$. В даному пункті вивчаються найкращі M-членні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{1,\theta}$ у просторі L_q, $1 << q < \infty$.

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $2 < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 1$, *а також умову* (S_l), $l \ge 2$. *Тоді для будь-яких* M, $n \in \mathbb{N}$ *таких, що* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце оцінка*

$$e_M\left(B^{\Omega}_{1,\theta}\right)_q \asymp \omega\left(2^{-n}\right) 2^{\frac{n}{2}} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)}. \tag{10}$$

Доведення. Спочатку встановимо оцінку зверху.

Нехай f — довільна функція з класу $B^{\Omega}_{1,\theta}$. Для заданого числа M підберемо n, виходячи з умови $M \asymp 2^n n^{d-1}$. Будемо розглядати наближення функцій f за допомогою полінома

$$P(\Theta_M, x) = \sum_{\| s \|_1 < n} \delta_s(f, x) + \sum_{n \le \| s \|_1 < \beta n} P\left(\Theta_{N_s}, x\right), \tag{11}$$

де $\beta > 1$ — деяке дійсне число, яке ми підберемо пізніше, а $P\left(\Theta_{N_s}, x\right)$ — поліном, який буде побудований для кожного „блоку" $\delta_s(f, x)$ згідно з лемою B, а тому для $\delta_s(f, x)$ виконуватиметься нерівність

$$\left\| \delta_s(f, x) - P\left(\Theta_{N_s}, x\right) \right\|_q \ll \left(\frac{2^{\| s \|_1}}{N_s} \right)^{\frac{1}{2}} \| \delta_s(f, x) \|_2 . \tag{12}$$

Припустимо, що поліном $P(\Theta_M, x)$ побудовано. Тоді, виходячи з (11), на підставі нерівності Мінковського матимемо

$$\| f(x) - P(\Theta_M, x) \|_q =$$

$$= \left\| \sum_{n \le \| s \|_1 < \beta n} \left(\delta_s(f, x) - P\left(\Theta_{N_s}, x\right) \right) + \sum_{\| s \|_1 \ge \beta n} \delta_s(f, x) \right\|_q \le$$

$$\leq \left\| \sum_{n \leq \|s\|_1 < \beta n} \left(\delta_s(f,x) - P\left(\Theta_{N_s}, x\right)\right) \right\|_q + \left\| \sum_{\|s\|_1 \geq \beta n} \delta_s(f,x) \right\|_q =$$

$$= I_1 + I_2. \tag{13}$$

Далі оцінимо кожен доданок у (13). Згідно з теоремою 1′ [13] для другого доданка одержимо

$$I_2 \ll \omega\left(2^{-\beta n}\right) 2^{\beta n\left(1-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+},$$

де $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Перейдемо до оцінки I_1. Внаслідок (8), (12) та (9) будемо мати

$$I_1 \ll \left(\sum_{n \leq \|s\|_1 < \beta n} \left\| \delta_s(f,x) - P\left(\Theta_{N_s}, x\right) \right\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{n \leq \|s\|_1 < \beta n} \frac{2^{\|s\|_1}}{N_s} \|\delta_s(f,x)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \asymp \left(\sum_{n \leq \|s\|_1 < \beta n} \frac{2^{\|s\|_1}}{N_s} \|A_s(f,x)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{n \leq \|s\|_1 < \beta n} \frac{2^{\|s\|_1}}{N_s} \|A_s(f,x)\|_1^2 \, 2^{2\|s\|_1\left(1-\frac{1}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{n \leq \|s\|_1 < \beta n} \frac{2^{2\|s\|_1}}{N_s} \|A_s(f,x)\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

Щоб продовжити оцінку (14), розглянемо два випадки: а) $2 \leq \theta \leq \infty$; б) $1 \leq \theta < 2$.

Для випадків а) та б) покладемо відповідно

$$\beta = \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{\alpha - 1 + \frac{1}{q}},$$

$$N_s = \left[\omega^{-1}\left(2^{-n}\right) \omega\left(2^{-\|s\|_1}\right) 2^{\|s\|_1}\right] + 1$$

та

$$\beta = \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{\alpha - 1 + \frac{1}{q}} - \frac{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\log n}{\left(\alpha - 1 + \frac{1}{q}\right) n},$$

$$N_s = \left[\omega^{-1}\left(2^{-n}\right) n^{d-1}\, 2^{\|s\|_1} \left(\omega\left(2^{-\|s\|_1}\right)\right)^{1-\theta} \|A_s(f,x)\|_1^{\theta}\right] + 1,$$

де $[b]$ — ціла частина числа b.

При такому виборі чисел N_s та β, як і в роботі [14] (з формальною заміною $\|\delta_s(f,x)\|_p$ на $\|A_s(f,x)\|_1$, а p на 1), можна показати, що

$$\sum_{n\le\|s\|_1<\beta n} N_s \ll 2^n n^{d-1},$$

$$I_1 \ll \omega\left(2^{-n}\right) 2^{\frac{n}{2}} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}, \tag{15}$$

$$I_2 \ll \omega\left(2^{-\beta n}\right) 2^{\beta n\left(1-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll \omega\left(2^{-n}\right) 2^{\frac{n}{2}} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{16}$$

Використовуючи для (13) оцінки (15) та (16), одержуємо

$$\|f(x)-P(\Theta_M,x)\|_q \ll \omega\left(2^{-n}\right) 2^{\frac{n}{2}} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Отже, оцінку зверху доведено.

При доведенні оцінки знизу будемо використовувати співвідношення двоїстості, яке випливає з більш загального результату С. М. Нікольського (див., наприклад, [15, с. 25])

$$e_M(f)_q = \inf_{\Theta_M} \sup_{\substack{P\in L^{\perp}(\Theta_M)\\ \|P\|_{q'}\le 1}} \int_{\pi_d} f(x)P(x)\,dx, \tag{17}$$

де $L^{\perp}(\Theta_M)$ — множина функцій, яка ортогональна підпростору тригонометричних поліномів з „номерами” гармонік із множини $\Theta_M = \left\{k^j\right\}_{j=1}^{M}$, а $\frac{1}{q}$ + $+\frac{1}{q'}=1$.

Зазначимо, що оцінку знизу досить встановити для випадку $q=2$. За заданим M підберемо m таким чином, щоб виконувались співвідношення $M \asymp 2^m m^{d-1}$ і $2^m m^{d-1} \ge 2M$.

Розглянемо функції

$$f_1(x) = C_6 m^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{m\le\|s\|_1\le m+d} \omega\left(2^{-\|s\|_1}\right) \sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,x)}, \quad C_6>0, \tag{18}$$

та

$$f_2(x) = C_7 \sum_{m\le\|s\|_1\le m+d} \omega\left(2^{-\|s\|_1}\right) \sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,x)}, \quad C_7>0. \tag{19}$$

Покажемо належність цих функцій до класів $B^{\Omega}_{1,\theta}$, $1\le\theta<\infty$, та $B^{\Omega}_{1,\infty}$ відповідно.

При $1\le\theta<\infty$ маємо

$$\|f_1\|_{B^{\Omega}_{1,\theta}} \asymp \left(\sum_{m\le\|s\|_1\le m+d} \omega^{-\theta}\left(2^{-\|s\|_1}\right)\|A_s(f_1,x)\|_1^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll m^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{m \le \|s\|_1 \le m+d} \omega^{-\theta}\left(2^{-\|s\|_1}\right) \omega^{\theta}\left(2^{-\|s\|_1}\right) \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp m^{-\frac{d-1}{\theta}} m^{\frac{d-1}{\theta}} = 1,$$

при $\theta = \infty$ —

$$\|f_2\|_{B^{\Omega}_{1,\infty}} \asymp \sup_{m \le \|s\|_1 \le m+d} \frac{\|A_s(f_2, x)\|_1}{\omega\left(2^{-\|s\|_1}\right)} \ll \sup_{m \le \|s\|_1 \le m+d} \frac{\omega\left(2^{-\|s\|_1}\right)}{\omega\left(2^{-\|s\|_1}\right)} = 1.$$

Тепер побудуємо функцію $P(x)$, яка б задовольняла умови співвідношення (17). Нехай

$$v_1(x) = \sum_{m \le \|s\|_1 \le m+d} \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)} \tag{20}$$

і Θ_M — довільний набір з M векторів $k = (k_1, \ldots, k_d)$ з цілочисловими координатами. Позначимо через

$$u_1(x) = \sum_{k^j \in \Theta_M} e^{i(k^j, x)} \tag{21}$$

функцію, що містить тільки ті доданки з (20), які мають „номери" з множини Θ_M, і покладемо $w_1(x) = v_1(x) - u_1(x)$. В такому випадку при $q' = 2$ маємо

$$\|w_1(x)\|_2 \le \|u_1(x)\|_2 + \|v_1(x)\|_2.$$

Враховуючи той факт, що

$$\|u_1(x)\|_2 = \left\| \sum_{k^j \in \Theta_M} e^{i(k^j, x)} \right\|_2 = \left(\sum_{k^j \in \Theta_M} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{M},$$

одержуємо

$$\|w_1(x)\|_2 \le \sqrt{M} + \|v_1(x)\|_2. \tag{22}$$

Оцінимо другий доданок із правої частини (22):

$$\|v_1(x)\|_2 = \left\| \sum_{m \le \|s\|_1 \le m+d} \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)} \right\|_2 = \left(\sum_{m \le \|s\|_1 \le m+d} \sum_{k \in \rho(s)} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{m \le \|s\|_1 \le m+d} 2^{\|s\|_1} \right)^{\frac{1}{2}} \asymp 2^{\frac{m}{2}} m^{\frac{d-1}{2}}. \tag{23}$$

Таким чином, згідно з (22) і (23) отримуємо

$$\|w_1(x)\|_2 \ll 2^{\frac{m}{2}} m^{\frac{d-1}{2}} + \sqrt{M} \ll 2^{\frac{m}{2}} m^{\frac{d-1}{2}}.$$

Отже, функція $P(x) = C_8 2^{-\frac{m}{2}} m^{-\frac{d-1}{2}} w_1(x)$ з деякою сталою $C_8 > 0$ задовольняє всі вимоги до $P(x)$ у співвідношенні (17).

Підставляючи $f_1(x)$ і $P(x)$ у співвідношення (17), у випадку $1 \le \theta < \infty$ одержуємо

$$e_M\left(B^{\Omega}_{1,\theta}\right)_q \ \ge\ e_M\left(B^{\Omega}_{1,\theta}\right)_2 \ \ge\ e_M(f_1)_2 \ =\ \inf_{\Theta_M} \sup_{\substack{P \in L^{\perp}(\Theta_M) \\ \|P\|_2 \le 1}} \int_{\pi_d} f_1(x) P(x)\, dx \ \gg$$

$$\gg\ \omega\left(2^{-m}\right) 2^{-\frac{m}{2}} m^{-\frac{d-1}{2}} m^{-\frac{d-1}{\theta}} \ \times$$

$$\times\ \inf_{\Theta_M} \int_{\pi_d} \sum_{m \le \|s\|_1 \le m+d} \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)} \left(\sum_{m \le \|s\|_1 \le m+d} \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)} - \sum_{k^j \in \Theta_M} e^{i(k^j,x)} \right) dx \ =$$

$$=\ \omega\left(2^{-m}\right) 2^{-\frac{m}{2}} m^{-(d-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\theta}\right)} \inf_{\Theta_M} \left(\left\| \sum_{m \le \|s\|_1 \le m+d} \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)} \right\|_2^2 - \left\| \sum_{k^j \in \Theta_M} e^{i(k^j,x)} \right\|_2^2 \right) \ \gg$$

$$\gg\ \omega\left(2^{-m}\right) 2^{-\frac{m}{2}} m^{-(d-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\theta}\right)} \left(2^m m^{d-1} - M\right) \ \gg\ \omega\left(2^{-m}\right) 2^{\frac{m}{2}} m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Аналогічно, підставляючи $f_2(x)$ і $P(x)$ у співвідношення (17), переконуємося, що для випадку $\theta = \infty$ має місце порядкова нерівність

$$e_M\left(B^{\Omega}_{1,\infty}\right)_q \ \ge\ e_M(f_2)_2 \ \gg\ \omega\left(2^{-m}\right) 2^{\frac{m}{2}} m^{\frac{d-1}{2}}.$$

Оцінки знизу встановлено.

Теорему 1 доведено.

***Зауваження* 1.** Покладаючи в теоремі 1 $\theta = \infty$, отримуємо порядкове співвідношення

$$e_M\left(H^{\Omega}_1\right)_q \ \asymp\ \omega\left(2^{-n}\right) 2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}}.$$

***Зауваження* 2.** Якщо $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_1}$, де $r_1 > 1$, то при $2 < q < \infty$, $1 \le$ $\le \theta \le \infty$ виконується порядкова рівність

$$e_M\left(B^{r}_{1,\theta}\right)_q \ \asymp\ \left(M^{-1} \log^{d-1} M\right)^{r_1 - \frac{1}{2}} \left(\log^{d-1} M\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}},$$

яка встановлена А. С. Романюком в роботі [10].

Теорема 2. *Нехай* $1 < q \le 2$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > \max\left\{1 - \frac{1}{q};\ 1 - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}\right\}$, *а також умову* (S_l), $l > \left[1 - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}\right]$. *Тоді для будь-яких* M, $n \in \mathbb{N}$ *таких, що* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце оцінка*

$$e_M\left(B^{\Omega}_{1,\theta}\right)_q \asymp \omega\left(2^{-n}\right) 2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}. \qquad (24)$$

Доведення. Оцінка зверху випливає з теореми 1 [16], оскільки

$$e_M\left(B^{\Omega}_{1,\theta}\right)_q \le e^{\perp}_M\left(B^{\Omega}_{1,\theta}\right)_q.$$

Встановимо оцінку знизу. За заданим числом M підберемо $n \in \mathbb{N}$ так, щоб $M \asymp 2^n n^{d-1}$ і кількість точок у множині

$$F_n = \bigcup_{\|s\|_1 = n} \rho(s)$$

була б більшою ніж $4M$. Розглянемо функції

$$f_3(x) = C_9 n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{\|s\|_1 = n} \omega\left(2^{-\|s\|_1}\right) \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)}, \quad C_9 > 0,$$

та

$$f_4(x) = C_{10} \sum_{\|s\|_1 = n} \omega\left(2^{-\|s\|_1}\right) \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)}, \quad C_{10} > 0.$$

Належність цих функцій до класів $B^{\Omega}_{1,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, та $B^{\Omega}_{1,\infty}$ відповідно встановлюється за допомогою міркувань, аналогічних до використаних по відношенню до функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$.

Далі, нехай Θ_M — довільний набір з M векторів $k^1, \ldots, k^M$, $k^j = \left(k_1^j, \ldots \right.$ $\left. \ldots, k_d^j\right)$ з цілочисловими координатами. Для кожного вектора $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, що задовольняє умову $\|s\|_1 = n$, розглянемо множину $\Theta_M \cap$ $\cap\, \rho(s)$. Внаслідок того, що $|F_n| > 4M$, множина $S = \Big\{ s \in \mathbb{N}^d\colon \|s\|_1 = n,$ $|\Theta_M \cap \rho(s)| \le \frac{1}{2}|\rho(s)| \Big\}$ буде містити, принаймні, половину всіх s таких, що $\|s\|_1 = n$, а тому $|S| \asymp n^{d-1}$.

Нехай $g(x)$ — довільний поліном з набором гармонік із Θ_M. Тоді згідно з лемою Б одержимо

$$\|f_3 - g\|_q \gg \left(\sum_{\|s\|_1 = n} \|\delta_s(f_3 - g, x)\|_2^q \, 2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} \gg$$

$$\gg 2^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} \left(\sum_{s \in S} \|\delta_s(f_3 - g, x)\|_2^q \right)^{\frac{1}{q}} \gg$$

$$\gg \omega\left(2^{-n}\right) n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} 2^{\frac{n}{2}} \left(\sum_{s \in S} 1 \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \omega\left(2^{-n}\right) n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)} |S|^{\frac{1}{q}} \asymp \omega\left(2^{-n}\right) 2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Аналогічно, для функції $f_4(x)$ у випадку $\theta = \infty$

$$\| f_4 - g \|_q \gg \omega\left(2^{-n}\right) 2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)} n^{\frac{d-1}{q}}.$$

Оцінку знизу доведено.

Теорему доведено.

***Зауваження* 3.** Покладаючи в теоремі 2 $\theta = \infty$, отримуємо порядкову рівність

$$e_M\left(H^{\Omega}_1\right)_q \asymp \omega\left(2^{-n}\right) 2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)} n^{\frac{d-1}{q}}.$$

***Зауваження* 4.** Якщо $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_1}$, де $r_1 > \max\left\{1 - \frac{1}{q};\ 1 - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}\right\}$, то при $1 < q \le 2$, $1 \le \theta \le \infty$ виконується співвідношення

$$e_M\left(B^{r}_{1,\theta}\right)_q \asymp M^{-\left(r_1 - 1 + \frac{1}{q}\right)} \left(\log^{d-1} M\right)^{r_1 - 1 + \frac{2}{q} - \frac{1}{\theta}},$$

яке встановлено в роботі [10].

3. Порядки величин $e_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right)_\infty$ при $p = 1,\ \infty,\ d \ge 2$. В даному пункті мова йтиме про найкращі M-членні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $p = 1,\ \infty$, у рівномірній метриці.

Має місце така теорема.

Теорема 3. *Нехай* $p = 1,\ \infty$, $2 \le \theta < \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots t_d)$, *де* $\omega(t)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > \max\left\{\frac{1}{p};\ \frac{1}{2}\right\}$, *а також умову* (S_l), $l > \left[\frac{1}{p}\right]$. *Тоді при* $d \ge 2$ *для будь-яких* M, $n \in \mathbb{N}$ *таких, що* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце співвідношення*

$$\omega\left(2^{-n}\right) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)_+} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)} \ll e_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right)_\infty \ll$$

$$\ll \omega\left(2^{-n}\right) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)_+} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)} n^{\frac{1}{2}}. \qquad (25)$$

Доведення. Встановимо в (25) оцінку зверху. Будемо вважати, що M пов’язані з числами $n \in \mathbb{N}$ співвідношенням $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

В [17] при виконанні умов теореми 3 для $p = 2$ показано, що

$$e_M\left(B^{\Omega}_{2,\theta}\right)_\infty \ll \omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)} n^{\frac{1}{2}}. \qquad (26)$$

Використовуючи оцінку (26), можна одержати потрібні оцінки у випадках $p = 1$ та $p = \infty$.

Нехай $p = 1$. Тоді, застосувавши до $A_s(f, x)$, $f \in B^{\Omega}_{1,\theta}$, як до полінома степеня 2^{s_j+1} по змінній x_j, $j = \overline{1,d}$, нерівність різних метрик, можемо записати

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{1,\theta}} \asymp \left(\sum_s \omega^{-\theta}\left(2^{-\|s\|_1}\right)\|A_s(f,x)\|_1^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \gg$$

$$\gg \left(\sum_s \omega^{-\theta}\left(2^{-\|s\|_1}\right)\|A_s(f,x)\|_2^{\theta}\, 2^{-\frac{\|s\|_1}{2}\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \left(\sum_s \omega_1^{-\theta}\left(2^{-\|s\|_1}\right)\|A_s(f,x)\|_2^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp \|f\|_{B^{\Omega_1}_{2,\theta}}, \tag{27}$$

де $\Omega_1(t) = \omega_1(t_1 \ldots t_d)$, $\omega_1(\tau) = \omega(\tau)\tau^{-\frac{1}{2}}$.

Таким чином, на підставі (27) робимо висновок, що $B^{\Omega}_{1,\theta} \subset B^{\Omega_1}_{2,\theta}$, і згідно з (26) маємо

$$e_M\left(B^{\Omega}_{1,\theta}\right)_\infty \ll e_M\left(B^{\Omega_1}_{2,\theta}\right)_\infty \ll \omega\left(2^{-n}\right) 2^{\frac{n}{2}}\, n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)} n^{\frac{1}{2}}.$$

У випадку $p = \infty$ оцінка величини $e_M\left(B^{\Omega}_{\infty,\theta}\right)_\infty$ випливає з (26) згідно з включенням $B^{\Omega}_{\infty,\theta} \subset B^{\Omega}_{2,\theta}$.

Оцінки зверху встановлено.

Оцінка знизу в (25) при $p = 1$ випливає з оцінки величини $e_M\left(B^{\Omega}_{1,\theta}\right)_q$, $2 < q < \infty$, яка встановлена в теоремі 1.

Розглянемо випадок $p = \infty$. Покажемо, що для класів $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$ має місце оцінка

$$e_M\left(B^{\Omega}_{\infty,\theta}\right)_q \gg \omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}, \quad 1 < q \le 2, \quad 1 \le \theta \le \infty.$$

Кожному вектору $s = (s_1, \ldots, s_d)$, s_j — парні числа, $s_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, поставимо у відповідність множину

$$\rho^+(s) = \left\{k\colon\ 2^{s_j-1} \le k_j < 2^{s_j},\ k_j \in \mathbb{N}\right\}$$

і для $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$B_n = \left\{s\colon\ \|s\|_1 = 2\left[\frac{n}{2}\right]\right\}, \qquad \overline{Q}'_n = \bigcup_{s \in B_n} \rho^+(s).$$

Нехай $\Im\left(\overline{Q}'_n\right)$ — множина поліномів вигляду

$$t(x) = \sum_{|k| \in \overline{Q}'_n} c_k e^{i(k,x)},$$

де $|k| = (|k_1|, \ldots, |k_d|)$.

Поряд з нормою L_q будемо розглядати норму простору $B_{q,\theta}$, яку для тригонометричних поліномів $t \in \Im\left(\overline{Q}'_n\right)$ визначимо формулою

$$\| t \|_{B_{q,\theta}} = \left(\sum_{s \in B_n} \| A_s(t,x) \|_q^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le q \le \infty, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

з відповідною модифікацією при $\theta = \infty$. Аналогічним чином визначається $\| f \|_{B_{q,\theta}}$ для функцій $f \in L_q(\pi_d)$ при умові збіжності ряду $\sum_s \| A_s(f,x) \|_q^{\theta}$. Відмітимо, що якщо $1 < q < \infty$, то

$$\| f \|_{B_{q,\theta}} \asymp \left(\sum_s \| \delta_s(f,x) \|_q^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}},$$

оскільки в цьому випадку $\| A_s(f,x) \|_q \asymp \| \delta_s(f,x) \|_q$.

Нехай $\mathcal{D}$ — обмежена область в $\mathbb{R}^d$ і $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система функцій із простору $L_q(\mathcal{D})$. Для $f \in L_q(\mathcal{D})$ покладемо

$$e_M(f,\Phi)_q = \inf_{\substack{\{n_i\} = \Lambda \subset \mathbb{Z}_+, |\Lambda| = M \\ \{c_i\} \in \mathbb{R}^M}} \left\| f(x) - \sum_{i=1}^{M} c_i \varphi_{n_i}(x) \right\|_{L_q(\mathbb{D})}.$$

Якщо F — деякий клас функцій з $L_q(\mathcal{D})$, то

$$e_M(F,\Phi)_q = \sup_{f \in F} e_M(f,\Phi)_q.$$

Для поліномів з $\Im\left(\overline{Q}'_n\right)_{B_{\infty,\infty}}$ в [18] встановлено наступне твердження.

Теорема Г. *Існує стала* $C(d) > 0$ *така, що для будь-якого набору функцій* $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^{m} \subset B_{1,1}$, $m < C' \left| \overline{Q}'_n \right|$, *виконується оцінка*

$$e_M\left(\Im\left(\overline{Q}'_n\right)_{B_{\infty,\infty}}, \Phi \right)_{B_{1,1}} \ge C_{11}\, n^{d-1}, \quad C_{11} = C_{11}(d, C') > 0,$$

для всіх $M \le C(d) \left| \overline{Q}'_n \right|$.

За заданим M підберемо n із співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$, і нехай $P_{\overline{Q}'_n}$ — оператор ортогонального проектування на $\Im\left(\overline{Q}'_n\right)$, який згідно з теоремою А є обмеженим. Тому для тригонометричної системи $T = \left\{ e^{i(k,x)} \right\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ правильним є співвідношення

$$e_M\left(\Im\left(\overline{Q}'_n\right)_{B_{\infty,\infty}}, T \right)_q \gg e_M\left(\Im\left(\overline{Q}'_n\right)_{B_{\infty,\infty}}, \left\{ e^{i(k,x)} \right\}_{k \in \overline{Q}'_n} \right)_q. \qquad (28)$$

Далі, оскільки для будь-якого полінома $t \in \Im\left(\overline{Q}'_n\right)_{B_{\infty,\infty}}$ мають місце оцінки

$$\|t\|_{B^{\Omega}_{\infty,\theta}} \asymp \left(\sum_{s \in B_n} \omega^{-\theta}\left(2^{-\|s\|_1}\right) \|A_s(t,x)\|_\infty^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le \omega^{-1}\left(2^{-n}\right) \max_{s \in B_n} \|A_s(t,x)\|_\infty \left(\sum_{s \in B_n} 1\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \omega^{-1}\left(2^{-n}\right) \|t\|_{B_{\infty,\infty}} n^{\frac{d-1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$\|t\|_{B^{\Omega}_{\infty,\infty}} \asymp \max_{s \in B_n} \frac{\|A_s(t,x)\|_\infty}{\omega\left(2^{-\|s\|_1}\right)} \asymp \omega^{-1}\left(2^{-n}\right) \max_{s \in B_n} \|A_s(t,x)\|_\infty =$$

$$= \omega^{-1}\left(2^{-n}\right) \|t\|_{B_{\infty,\infty}}, \quad \theta = \infty,$$

то робимо висновок, що існують додатні сталі C_{12}, C_{13} такі, що

$$C_{12}\,\omega\left(2^{-n}\right) n^{-\frac{d-1}{\theta}} \Im\left(\overline{Q}'_n\right)_{B_{\infty,\infty}} \subset B^{\Omega}_{\infty,\theta} \cap \Im\left(\overline{Q}'_n\right), \tag{29}$$

$$C_{13}\,\omega\left(2^{-n}\right) \Im\left(\overline{Q}'_n\right)_{B_{\infty,\infty}} \subset B^{\Omega}_{\infty,\infty} \cap \Im\left(\overline{Q}'_n\right). \tag{30}$$

З (28) та (29) одержуємо

$$e_M\left(B^{\Omega}_{\infty,\theta}\right)_q \ge e_M\left(B^{\Omega}_{\infty,\theta} \cap \Im\left(\overline{Q}'_n\right)\right)_q \gg$$

$$\gg \omega\left(2^{-n}\right) n^{-\frac{d-1}{\theta}} e_M\left(\Im\left(\overline{Q}'_n\right)_{B_{\infty,\infty}}, \left\{e^{i(k,x)}\right\}_{k \in \overline{Q}'_n}\right)_q. \tag{31}$$

Аналогічно для $\theta = \infty$ з (28) та (30) маємо

$$e_M\left(B^{\Omega}_{\infty,\infty}\right)_q \ge e_M\left(B^{\Omega}_{\infty,\infty} \cap \Im\left(\overline{Q}'_n\right)\right)_q \gg$$

$$\gg \omega\left(2^{-n}\right) e_M\left(\Im\left(\overline{Q}'_n\right)_{B_{\infty,\infty}}, \left\{e^{i(k,x)}\right\}_{k \in \overline{Q}'_n}\right)_q. \tag{32}$$

Для подальших міркувань скористаємося відомим (див., наприклад, [18]) співвідношенням між нормами поліномів з $\Im\left(\overline{Q}'_n\right)$ у просторах L_q при $1 < q \le 2$ та $B_{1,1}$:

$$\|t\|_q \gg n^{-\frac{d-1}{2}} \|t\|_{B_{1,1}}. \tag{33}$$

Таким чином, згідно з (33) з (31) одержуємо оцінку

$$e_M\left(B^{\Omega}_{\infty,\theta}\right)_q \gg \omega\left(2^{-n}\right) n^{-\frac{d-1}{\theta}} e_M\left(\Im\left(\overline{Q}'_n\right)_{B_{\infty,\infty}},\ \left\{e^{i(k,x)}\right\}_{k\in\overline{Q}'_n}\right)_q \gg$$

$$\gg \omega\left(2^{-n}\right) n^{-(d-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\theta}\right)} e_M\left(\Im\left(\overline{Q}'_n\right)_{B_{\infty,\infty}},\ \left\{e^{i(k,x)}\right\}_{k\in\overline{Q}'_n}\right)_{B_{1,1}}. \tag{34}$$

Аналогічно для $\theta = \infty$ внаслідок (32) та (33) маємо

$$e_M\left(B^{\Omega}_{\infty,\infty}\right)_q \gg \omega\left(2^{-n}\right) n^{-\frac{d-1}{2}} e_M\left(\Im\left(\overline{Q}'_n\right)_{B_{\infty,\infty}},\ \left\{e^{i(k,x)}\right\}_{k\in\overline{Q}'_n}\right)_{B_{1,1}}. \tag{35}$$

Далі, застосовуючи до правої частини (34) теорему Г при $\Phi = \left\{e^{i(k,x)}\right\}_{k\in\overline{Q}'_n}$ і $m = \left|\overline{Q}'_n\right|$, для $1 \le \theta < \infty$ знаходимо

$$e_M\left(B^{\Omega}_{\infty,\theta}\right)_q \gg \omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{36}$$

Аналогічно, застосувавши до правої частини (35) теорему Г, при $\theta = \infty$ одержимо

$$e_M\left(B^{\Omega}_{\infty,\infty}\right)_q \gg \omega\left(2^{-n}\right) n^{\frac{d-1}{2}}. \tag{37}$$

Таким чином, з доведеного вище випливає, що

$$e_M\left(B^{\Omega}_{\infty,\theta}\right)_\infty \ge e_M\left(B^{\Omega}_{\infty,\theta}\right)_q \gg \omega\left(2^{-n}\right) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}, \quad 1 \le \theta \le \infty.$$

Теорему доведено.

4. Оцінки величин $e_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right)_\infty$ при $1 \le p \le \infty$, $d = 1$. На завершення отримаємо точну за порядком оцінку величини $e_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right)_\infty$ в одновимірному випадку.

Має місце така теорема.

Теорема 4. *Нехай* $d = 1$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(t)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > \max\left\{\frac{1}{p};\ \frac{1}{2}\right\}$, *а також умову* (S_l), $l > \left[\frac{1}{p}\right]$. *Тоді має місце оцінка*

$$e_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right)_\infty \asymp \omega\left(M^{-1}\right) M^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)_+}. \tag{38}$$

Доведення. Встановимо в (38) оцінку зверху. Нехай спочатку $p = 2$. За заданим числом M підберемо $n \in \mathbb{N}$ із нерівності $2^{n-1} \le M < 2^n$ і для $s \in \mathbb{N}$ покладемо

$$M_s = \begin{cases} 2^s, & 1 \le s \le n, \\ \left[\omega^{-1}\left(2^{-n}\right) 2^{\frac{n}{2}}\, \omega\left(2^{-s}\right) 2^{\frac{s}{2}}\right], & s > n. \end{cases} \tag{39}$$

Тоді

$$\sum_{s=1}^{\infty} M_s \le \sum_{s=1}^{n} 2^s + \sum_{s=n+1}^{\infty} \omega^{-1}\left(2^{-n}\right) 2^{\frac{n}{2}}\, \omega\left(2^{-s}\right) 2^{\frac{s}{2}} \ll$$

$$\ll 2^n + \omega^{-1}\left(2^{-n}\right) 2^{\frac{n}{2}} \sum_{s=n+1}^{\infty} \omega\left(2^{-s}\right) 2^{\frac{s}{2}} =$$

$$= 2^n + \omega^{-1}\left(2^{-n}\right) 2^{\frac{n}{2}} \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{\omega\left(2^{-s}\right)}{2^{-\alpha s}}\, 2^{-s\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)} = I_3.$$

Оскільки $\omega(t)$ задовольняє умову (S) з $\alpha > \frac{1}{2}$, то, продовживши оцінку I_3, матимемо

$$I_3 \ll 2^n + \omega^{-1}\left(2^{-n}\right) 2^{\frac{n}{2}} \frac{\omega\left(2^{-n}\right)}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-s\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)} \ll$$

$$\ll 2^n + 2^{\frac{n}{2}}\, 2^{\alpha n} 2^{-n\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)} \ll 2^n \asymp M.$$

Для наступних міркувань скористаємось оцінкою з [19] (наслідок 5.1), яка має вигляд

$$e_{M_s}\left(\delta_s(f, x)\right)_\infty \ll \left(\frac{2^s}{M_s}\right)^{1/2} \log\frac{2^s}{M_s} \|\delta_s(f, x)\|_2. \tag{40}$$

Таким чином, внаслідок вибору чисел M_s і оцінки (40) для $f \in B^{\Omega}_{2,\theta}$ можемо записати

$$e_M(f)_\infty \le \sum_{s>n} e_{M_s}\left(\delta_s(f, x)\right)_\infty \ll \sum_{s>n} \left(\frac{2^s}{M_s}\right)^{1/2} \log\frac{2^s}{M_s} \|\delta_s(f, x)\|_2. \tag{41}$$

Далі, оскільки для $f \in B^{\Omega}_{2,\theta}$ $\|\delta_s(f, x)\|_2 \ll \omega\left(2^{-s}\right)$, то з (41) з урахуванням (39) будемо мати

$$e_M(f)_\infty \ll \sum_{s>n} \left(2^s\, \omega\left(2^{-n}\right) 2^{-\frac{n}{2}}\, \omega^{-1}\left(2^{-s}\right) 2^{-\frac{s}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[\log 2^s - \log\left(\omega^{-1}\left(2^{-n}\right) 2^{\frac{n}{2}}\, \omega\left(2^{-s}\right) 2^{\frac{s}{2}}\right)\right] \omega\left(2^{-s}\right) =$$

$$= \omega^{\frac{1}{2}}\left(2^{-n}\right) 2^{-\frac{n}{4}} \sum_{s>n} \left(\frac{\omega\left(2^{-s}\right)}{2^{-\alpha s}} 2^{-s\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[\log 2^{s} - \log\left(\omega^{-1}\left(2^{-n}\right) 2^{\frac{n}{2}} \frac{\omega\left(2^{-s}\right)}{2^{-\gamma s}} 2^{-s\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)} \right) \right] = I_4. \qquad (42)$$

Беручи до уваги те, що $\omega(t)$ задовольняє умови (S) та (S_l), продовжимо оцінку I_4:

$$I_4 \ll \omega^{\frac{1}{2}}\left(2^{-n}\right) 2^{-\frac{n}{4}} \left(\frac{\omega\left(2^{-n}\right)}{2^{-\alpha n}} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{s>n} \left(2^{-s\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[\log 2^{s} - \log\left(\omega^{-1}\left(2^{-n}\right) 2^{\frac{n}{2}} \frac{\omega\left(2^{-n}\right)}{2^{-\gamma n}} 2^{-s\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)} \right) \right] \ll$$

$$\ll \omega\left(2^{-n}\right) 2^{-\frac{n}{4}} 2^{\frac{\alpha n}{2}} \sum_{s>n} 2^{-\frac{s}{2}\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)} \left[s - \left(\frac{n}{2} + \gamma n - s\gamma + \frac{s}{2} \right) \right] \ll$$

$$\ll \omega\left(2^{-n}\right) 2^{-\frac{n}{4}} 2^{\frac{\alpha n}{2}} \sum_{s>n} 2^{-\frac{s}{2}\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)} (s-n) \ll$$

$$\ll \omega\left(2^{-n}\right) 2^{-\frac{n}{4}} 2^{\frac{\alpha n}{2}} 2^{-\frac{n}{2}\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)} = \omega\left(2^{-n}\right) \asymp \omega\left(M^{-1}\right). \qquad (43)$$

Оцінку зверху у випадку $p = 2$ встановлено.

Оцінки зверху у випадках $1 \le p < 2$ та $2 < p \le \infty$ випливають з (43) згідно з вкладеннями $B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega_1}_{2,\theta}$ $\left(\Omega_1(t) = \omega_1(t) = \omega(t) t^{-\frac{1}{2}} \right)$ та $B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega}_{2,\theta}$ відповідно.

Оцінка знизу у випадку $p = 1$ випливає з теореми 1, а у випадках $1 < p \le 2$ та $2 < p < \infty$ — з теорем 1 та 2 [14]. Якщо ж $p = \infty$, то оцінку знизу величини $e_M\left(B^{\Omega}_{\infty,\theta}\right)_\infty$, $1 \le \theta \le \infty$, було отримано при доведенні теореми 3.

Теорему доведено.

***Зауваження* 5**. Покладаючи в теоремі 4 $\theta = \infty$, отримуємо оцінку

$$e_M\left(H^{\Omega}_p\right)_\infty \asymp \omega\left(M^{-1}\right) M^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)_+}.$$

1. *Sun Youngsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1997. – **219**. – С. 356 – 377.
2. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
3. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. – 1994. – **20**. – P. 35 – 48.
4. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.

5. *Стасюк С. А., Федуник О. В.* Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 5. – С. 692 – 704.
6. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1955. – **102**, № 1. – С. 37 – 40.
7. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
8. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. – 419 p.
9. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей" системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Яраслав. ун-т, 1988. – С. 16 – 33.
10. *Романюк А. С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2003. – **67**, № 2. – С. 61 – 100.
11. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
12. *Jakson D.* Certain problem of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. – 1933. – **39**. – P. 889 – 906.
13. *Федуник О. В.* Оцінки апроксимативних характеристик класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних в просторі L_q // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 2. – С. 268 – 294.
14. *Стасюк С. А.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів функцій багатьох змінних $B^{\Omega}_{p,\theta}$ // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 3. – С. 381 – 394.
15. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
16. *Конограй А. Ф., Стасюк С. А.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2007. – **4**, № 1. – С. 151 – 171.
17. *Стасюк С. А.* Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 11. – С. 1551 – 1559.
18. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 // Мат. заметки. – 1994. – **56**, № 5. – С. 57 – 86.
19. *De Vore R. A., Temlyakov V. N.* Nonlinear approximation by trigonometric sums // J. Fourier Anal. Appl. – 1995. – **2**, № 1. – P. 29 – 48.

Одержано 06.04.07