УДК 517.21

Е. В. Остапенко (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ”, Киев)

О МАРКОВСКИХ МЕРОЗНАЧНЫХ ПРОЦЕССАХ НА КОНЕЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ*

Stochastic flows with the interaction on a finite phase space are considered. We describe flows with a variable generator that give rise to evolutionary measure-valued processes. We establish how the interaction of particles influences the entropy of the flow.

Розглядаються стохастичні потоки з взаємодією на скінченному фазовому просторі. Описано такі потоки зі змінним генератором, що породжують еволюційні мірозначні процеси. Встановлено, як взаємодія частинок впливає на ентропію потоку.

В работе [1] рассматривались марковские мерозначные процессы с постоянной массой, которые описываются как перенос некоторой начальной меры стохастическими потоками. В настоящей статье описаны стохастические потоки на конечном пространстве с переменным генератором, порождающие такие процессы. В качестве примера установлено, как взаимодействие частиц влияет на энтропию потока.

Приведем общее определение мерозначного процесса. Пусть $(\mathfrak{X}, \rho)$ — полное сепарабельное метрическое пространство с борелевской σ-алгеброй $B(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{M}$ — пространство вероятностных мер на $\mathfrak{X}$ с метрикой слабой сходимости, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ на нем.

Определение. *Марковский процесс* $\{\mu_t, t \geq 0\}$ *в* $\mathfrak{M}$ *относительно потока* σ*-алгебр* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *называется эволюционным, если для любой начальной меры* $\mu_0 \in \mathfrak{M}$ *существует измеримая функция* $f\colon \Omega \times [0, +\infty) \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ *такая, что*:

1) *для любого* $t \geq 0$ *сужение* f *на* $[0, t]$ *является* $\mathcal{F}_t \times B([0, t]) \times B(\mathfrak{X})$*-измеримым*;

2) *для любого* $t \geq 0$ $\mu_t = \mu_0 \circ f_t^{-1} (\operatorname{mod} \mathrm{P})$;

3) *для любых* $n \geq 1$, $u_1, \ldots, u_n \in \mathfrak{X}$ *случайный процесс* $\{(\mu_t, f_t(u_1), \ldots \ldots f_t(u_n)), t \geq 0\}$ *является марковским относительно потока* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$.

Поток $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *называется стохастическим потоком со взаимодействием, соответствующим эволюционному процессу* $\{\mu_t, t \geq 0\}$.

В случае дискретного пространства $\mathfrak{X}$ стохастический поток на $\mathfrak{X}$ удобно интерпретировать как описание движения частиц, стартующих из каждой точки пространства $\mathfrak{X}$. При этом вероятностные характеристики положения движения отдельной частицы в будущем зависят от положения всех частиц в настоящий момент.

Пусть $\mathfrak{X} = \{1, \ldots, d\}$. Тогда пространство отображений из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}$ конечно, что дает возможность управлять инфинитезимальными характеристиками процесса $\{f_t, t \geq 0\}$.

Опишем класс управляемых стохастических потоков $\{f_t, t \geq 0\}$ на $\mathfrak{X}$, соответствующих эволюционным процессам $\{\mu_t, t \geq 0\}$.

Рассмотрим стохастически непрерывный марковский процесс $\{f_t, t \geq 0\}$ на множестве отображений $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}$ и введем следующие обозначения. Через $i = (i_1, \ldots, i_d)$ обозначим элемент пространства $\mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}$; с элементом i ассоциируем

* Поддержано грантом GP/F13/0195.

отображение $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, при котором $f(1) = i_1, \ldots, f(d) = i_d$. Вероятность перехода за время s из состояния j в момент времени t в состояние i обозначим через $P_{t,t+s}(j,i)$, а вектор этих вероятностей — через $P_{t,t+s}(j) = \left(P_{t,t+s}(j,i)\right)_{i\in\mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}}$.

Как переходные вероятности стохастически непрерывного марковского процесса на конечном пространстве, $P_{t,t+s}(j)$ удовлетворяют некоторому дифференциальному уравнению [2]. Выделим класс уравнений, решения которых определяют переходные вероятности процессов на $\mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}$, соответствующих марковским эволюционным процессам.

Пусть $\mu_0 = \sum_{l\in\mathfrak{X}} a_l\delta_l$, $a_l \ge 0$, $l \in \mathfrak{X}$, $\sum_{l\in\mathfrak{X}} a_l = 1$, — начальная мера на $\mathfrak{X}$. Определим отображение Ψ, действующее из пространства отображений $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}$ в пространство $\mathfrak{M}$ следующим образом:

$$\Psi(i) = \sum_{l\in\mathfrak{X}} a_l\delta_{i_l}, \quad i \in \mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}.$$

Пусть A — непрерывное отображение отрезка $[0,1]$ в пространство стохастических матриц на $\mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}$ такое, что элементы матрицы $A_j^i(\cdot)$ для фиксированного i зависят только от $\Psi(i)$, т. е. $A_j^i(\cdot) = A_r^i(\cdot)$, если $\Psi(j) = \Psi(r)$.

Лемма. *Если переходные вероятности $P_{t,t+s}(j)$ стохастически непрерывного марковского процесса $\{f_t, t \ge 0\}$ удовлетворяют уравнению*

$$\frac{d}{ds}P_{t,t+s}(j) = P_{t,t+s}(j)\,(A(u(t+s)) - E) \tag{1}$$

с начальным условием $P_{t,t}(j,i) = 1$, где A имеет указанное свойство, E — единичная матрица, то для любого k, $0 \le k \le d$, процесс $\{(\mu_t, f_t(1),\ldots, f_t(k))\}$, где $\mu_t = \mu_0 \circ (f_t)^{-1}$, является марковским.

Доказательство. Для матричнозначной функции $B(t)$, $t \ge 0$, обозначим через $\Omega_t^{t+s}(B)$ матрицант уравнения $\dot{x} = x\,B(t)$, $x(t) = x_0$. Согласно [3], матрицант уравнения (1) имеет вид $\Omega_t^{t+s}(A-E) = \Omega_t^{t+s}(A)\,e^{-s}$, а матрицант $\Omega_t^{t+s}(A)$ представим в виде

$$\Omega_t^{t+s}(A) = E + \int_t^{t+s} A(\tau)d\tau + \int_t^{t+s} A(\tau)\int_t^{t+\tau} A(\tau_1)d\tau_1\,d\tau + \ldots .$$

Отсюда следует, что матрица $\left(\Omega_t^{t+s}(A) - E\right)$ имеет указанное для матрицы A свойство, а для $P_{t,t+s}(j)$ получаем представление $P_{t,t+s}(j) = P_{t,t}(j)\left(\Omega_t^{t+s}(A) - E\right)e^{-s} + P_{t,t}(j)\,e^{-s}$, где первое слагаемое зависит только от $\Psi(j)$.

Заметим, что $\mu_t = \Psi(f_t)$. Тогда для произвольных t, $s \ge 0$ и $\Delta \in \mathfrak{M}$, $i_1 \in \mathfrak{X}, \ldots, i_k \in \mathfrak{X}$

$$\mathrm{P}\left\{\mu_{t+s}\in\Delta, f_{t+s}(1) = i_1,\ldots,f_{t+s}(k) = i_k / \mu_r, f_r(1),\ldots,f_r(k), r\le t\right\} =$$

$$= \mathrm{M}\left\{I_\Delta\left(\Psi(f_{t+s})\right) I_{(i_1,\ldots,i_k)}\left(f_{t+s}(1),\ldots,f_{t+s}(k)\right)/\Psi(f_r), f_r(1),\ldots,f_r(k), r\le t\right\} =$$

$$= \sum_{i_{k+1},\ldots,i_d} \mathrm{M}\left\{I_{\Psi^{-1}(\Delta)}(f_{t+s})\, I_{(i_1,\ldots,i_k,i_{k+1},\ldots,i_d)}\left(f_{t+s}(1),\ldots,f_{t+s}(d)\right)/\Psi(f_r),\right.$$

$$f_r(1),\dots,f_r(k),\,r\le t\Big\} = \sum_{i_{k+1},\dots,i_d} \mathrm{M}\Big\{I_{\Psi^{-1}(\Delta)}(f_{t+s})\,I_i(f_{t+s})/\Psi(f_r),$$
$$f_r(1),\dots,f_r(k),\,r\le t\Big\}.$$

Возьмем условное математическое ожидание по более широкой σ-алгебре, порожденной процессом $\{f_r, r\le t\}$:

$$\mathrm{M}\Big\{I_{\Psi^{-1}(\Delta)}(f_{t+s})\,I_i(f_{t+s})/\Psi(f_r),\,f_r(1),\dots,f_r(k),\,r\le t\Big\} =$$
$$= \mathrm{M}\Big\{\mathrm{M}\Big\{I_{\Psi^{-1}(\Delta)}(i)\,I_i(f_{t+s})/f_r,\,r\le t\Big\}/\Psi(f_r),\;f_r(1),\dots,f_r(k),\,r\le t\Big\} =$$
$$= \mathrm{M}\Big\{I_{\Psi^{-1}(\Delta)}(i)\,P_{t,t+s}(f_t,i)/\Psi(f_r),\,f_r(1),\dots,f_r(k),\,r\le t\Big\}.$$

Воспользуемся представлением $P_{t,t+s}(f_t,i)$:

$$\mathrm{P}\Big\{\mu_{t+s}\in\Delta,\,f_{t+s}(1)=i_1,\dots,f_{t+s}(k)=i_k/\mu_r,\,f_r(1),\dots,f_r(k),\,r\le t\Big\} =$$
$$= \sum_{i_{k+1},\dots,i_d} \mathrm{M}\Big\{I_{\Psi^{-1}(\Delta)}(i)\left(\Omega_t^{t+s}(A)-E\right)_{f_t}^{i} e^{-s}/\Psi(f_r),\;f_r(1),\dots,f_r(k),\,r\le t\Big\} +$$
$$+ \sum_{i_{k+1},\dots,i_d} e^{-s}\,\mathrm{M}\Big\{I_{\Psi^{-1}(\Delta)}(i)\,I_{\{i\}}(f_t)/\Psi(f_r),\;f_r(1),\dots,f_r(k),\,r\le t\Big\} =$$
$$= \sum_{i_{k+1},\dots,i_d} \mathrm{M}\Big\{I_{\Psi^{-1}(\Delta)}(i)\left(\Omega_t^{t+s}(A)-E\right)_{f_t}^{i} e^{-s}/\Psi(f_t)\Big\} +$$
$$+ e^{-s}\,\mathrm{M}\left\{\left(\sum_{i\in\mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}} I_{\Psi^{-1}(\Delta)}(i)\,I_i(f_t)\right) I_{(i_1,\dots,i_k)}(f_t(1),\dots,f_t(k))/\Psi(f_r),\right.$$
$$\left. f_r(1),\dots,f_r(k),\;r\le t\right\} =$$
$$= \sum_{i_{k+1},\dots,i_d} \mathrm{M}\Big\{I_{\Psi^{-1}(\Delta)}(i)\left(\Omega_t^{t+s}(A)-E\right)_{f_t}^{i} e^{-s}/\Psi(f_t)\Big\} +$$
$$+ \Big\{e^{-s}\,\mathrm{M}\,I_{\Psi^{-1}(\Delta)}(f_t)\,I_{(i_1,\dots,i_k)}\big(f_t(1),\dots,f_t(k)\big)/\Psi(f_t),\;f_t(1),\dots,f_t(k)\Big\}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{P}\Big\{\mu_{t+s}\in\Delta,\,f_{t+s}(1)=i_1,\dots,f_{t+s}(k)=i_k/\mu_r,f_r(1),\dots,f_r(k),\,r\le t\Big\} =$$
$$= \mathrm{P}\Big\{\mu_{t+s}\in\Delta,\,f_{t+s}(1)=i_1,\dots,f_{t+s}(k)=i_k/\mu_t,\,f_t(1),\dots,f_t(k)\Big\}.$$

Лемма доказана.

Таким образом, случайный процесс μ_t, $t\ge 0$ является марковским эволюционным процессом в $\mathfrak{M}$, относительно стохастического потока $\{f_t,\, t\in\in[0,T]\}$.

Рассмотрим случай дискретного времени $\{k, k\ge 0\}$ и цепь Маркова $\{f_k, k\ge 0\}$ с матрицей переходных вероятностей $A(u)=uQ+(1-u)P$, где $u\in\in[0,1]$ $\big($ для процесса с непрерывным временем можно рассмотреть вложенную цепь Маркова $\{f^u_{t_k}, k \ge 0\}$, где $\{t_k, k \ge 0\}$ — моменты скачков процесса $\{f^u_t, t \ge 0\}$).

Опишем движения частиц, соответствующие матрицам P и Q. Пусть переход каждой частицы в любое состояние равновероятен и равен $1/d$. Тогда если все частицы движутся независимо, то матрица переходных вероятностей имеет вид $P = \left(1/d^d\right)^{i \in \mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}}_{j \in \mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}}$, а если встретившиеся частицы продолжают двигаться вместе, то $Q = \left(q^i_j\right)^{i \in \mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}}_{j \in \mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}}$, где $q^i_j = 0$, если существуют m, n такие, что $j_n = j_m$, но $i_n \ne i_m$; в противном случае $q^i_j = 1/d^s$, где $S = |\{j_1, \ldots, j_d\}|$ — количество разных координат вектора j.

Пусть начальная мера $\mu_0 = \frac{1}{d}\sum_{l \in \mathfrak{X}} \delta_l$. Рассмотрим энтропию меры $\mu^u_k = \mu_0 \circ \left(f^u_k\right)^{-1}$:

$$H_k = -\sum_{l \in \mathfrak{X}} \mu^u_k(l) \ln \mu^u_k(l).$$

Обозначим через $H(i)$ значение энтропии в случае, когда $f^u_k = i$, через π_u инвариантное распределение в $\mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}$ для матрицы $A(u)$. Поскольку $P^i_j = 1/d^d \ne 0$, $j \in \mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}$, $i \in \mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}$, такое распределение единственно. Через H_u обозначим соответствующее π_u среднее значение энтропии

$$H_u = \sum_{i \in \mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}} H(i)\, \pi_u(i).$$

Теорема. *Если* $u_1 < u_2$, *то* $H_{u_1} > H_{u_2}$.

Доказательство. Пусть $\{\nu_k; k \ge 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин:

$$\nu_k = \begin{cases} 0 & \text{с вероятностью} \quad (1-u), \\ 1 & \text{с вероятностью} \quad u. \end{cases}$$

При фиксированной последовательности $\{\nu_k; k \ge 1\}$ все $\mathbf{N}$ разбиваются на интервалы, состоящие из нулей и единиц. Рассмотрим неоднородную цепь Маркова $\{g_k, k \ge 1\}$ с матрицами переходных вероятностей на каждом шаге P, если $\nu_k = 0$, и Q, если $\nu_k = 1$, $g_0 = e$ — тождественное отображение. Тогда

$$M_\nu \mathrm{P}\left\{g_1 = i^1, \ldots, g_k = i^k\right\} = \mathrm{P}\left\{f_1 = i^1, \ldots, f_k = i^k\right\}, \quad i^1, \ldots, i^k \in \mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}.$$

Поэтому изучим поведение энтропии вдоль $\{g_k, k \ge 1\}$.

Обозначим через π_k распределение g_k. Начальное распределение является равномерным:

$$\pi_0(j) = \frac{1}{d^d}, \quad j \in \mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}.$$

На интервалах, состоящих из нулей распределение не меняется, так как $\pi_k = \pi_{k-1} P = \pi_0$ для любого π_{k-1}, а следовательно, не меняется и $M_{g_0 = e} H_k = -\ln 1/d = H_0$.

На интервалах, состоящих из единиц, математические ожидание H_k убывает. Действительно, пусть $\nu_k = \nu_{k+1} = 1$, тогда

$$M_{g_0=e}\, H_{k+1} \;=\; \sum_j \sum_i H(i)\, q_j^i\, \pi_k(j).$$

Поскольку $q_j^i = 0$, если $H(j) < H(i)$, то $\sum_i H(i) q_j^i < H(j)$. Следовательно, $M_{g_0=e}\, H_{k+1} < \sum_j H(j)\, \pi_k(j) = M_{g_0=e}\, H_k$.

Обозначим через I_0^l и I_1^l l-е интервалы, состоящие из нулей и единиц соответственно. Рассмотрим следующие случайные величины: τ_0^l — длина I_0^l, τ_1^l — длина I_1^l, $\xi_l = \sum_{k\in I_0^l} M_{g_0=e}\, H_k$, $\eta_l = \sum_{k\in I_1^l} M_{g_0=e}\, H_k$.

В силу свойств последовательности $\{\nu_k, k\ge 1\}$ случайные величины $\left\{\left(\tau_0^l + \tau_1^l\right), l\ge 1\right\}$, $\{\xi_l, l\ge 1\}$ и $\{\eta_l, l\ge 1\}$ являются независимыми одинаково распределенными.

Пусть

$$l_0 \;=\; \mathrm{M}\tau_0^l \;=\; \sum_{k\ge 1} u(1-u)^{k-1} k \;=\; \frac{1}{u}$$

и

$$l_1 \;=\; \mathrm{M}\tau_1^l \;=\; \sum_{k\ge 1} (1-u) u^{k-1} k \;=\; \frac{1}{1-u}$$

— средние длины интервалов. В силу закона больших чисел почти всюду справедливы соотношения

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\left(\tau_0^l + \tau_1^l\right) \to (l_0 + l_1), \quad n\to\infty,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\xi_l \to l_0 H_0, \quad n\to\infty,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\eta_l \to \mathrm{M}\eta_1, \quad n\to\infty.$$

Для $N\ge 1$ считаем n таким, что

$$N \;=\; \sum_{l=1}^{n}\left(\tau_0^l + \tau_1^l\right) \;+\; \tau,$$

где $0\le \tau < \tau_0^{n+1} + \tau_1^{n+1}$. Тогда почти всюду

$$\frac{N}{n} \;=\; \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\left(\tau_0^l + \tau_1^l\right) \;+\; \frac{\tau}{n} \to (l_0 + l_1), \quad n\to\infty.$$

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{N} M_{g_0=e}\, H_k \;=\; \sum_{l=1}^{n}\xi_l \;+\; \sum_{l=1}^{n}\eta_l \;+\; \sum_{k=N-\tau+1}^{N} M_{g_0=e}\, H_k,$$

и

$$0 \le \sum_{k=N-\tau+1}^{N} M_{g_0=e} H_k \le \tau H_0,$$

то

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M_{g_0=e} H_k \to \frac{l_0 H_0 + \mathrm{M}\eta_1}{l_0 + l_1}, \quad n \to \infty.$$

Преобразуем выражение $\dfrac{l_0 H_0 + \mathrm{M}\eta_1}{l_0 + l_1}$:

$$\frac{l_0 H_0 + \mathrm{M}\eta_1}{l_0 + l_1} = (1-u)H_0 + u(1-u)\mathrm{M}\left(\sum_{k=1}^{\tau_1^1} M_{g_0=e} H_k\right) =$$

$$= (1-u)H_0 + u(1-u)\sum_{n\ge 1}\mathrm{P}\left\{\tau_1^1 = n\right\}\sum_{k=1}^{n} M_{g_0=e} H_k =$$

$$= (1-u)H_0 + u(1-u)\sum_{k\ge 1}\left(M_{g_0=e} H_k\right)u^{k-1} =$$

$$= (1-u)H_0 + \sum_{k\ge 1}\left(M_{g_0=e} H_k\right)u^{k} - \sum_{k\ge 1}\left(M_{g_0=e} H_k\right)u^{k+1} =$$

$$= H_0 + \sum_{k\ge 1} u^k\left(M_{g_0=e} H_k - M_{g_0=e} H_{k-1}\right).$$

Вследствие того, что на интервале, состоящем из единиц, $M_{g_0=e} H_k < M_{g_0=e} \times \times H_{k-1}$, полученное выражение убывает с ростом u.

С другой стороны, согласно индивидуальной эргодической теореме, для последовательности случайных величин $\{H_k, k \ge 1\}$ почти всюду

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} H_k \to H_u, \quad N \to \infty,$$

откуда

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M_{g_0=e} H_k \to H_u, \quad N \to \infty.$$

Следовательно, $H_u = \dfrac{l_0 H_0}{l_0 + l_1} + \dfrac{\mathrm{M}\eta_1}{l_0 + l_1}$ убывает с ростом u.

Теорема доказана.

1. *Dorogovtsev A. A.* Stochastic flows with interaction and measure-valued processes // Int. J. Math. and Math. Statist. – 2003. – № 63. – P. 3963 – 3977.
2. *Скороход А. В.* Лекції з теорії випадкових процесів. – Київ: Либідь, 1990. – 168 с.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

Получено 18.06.07