УДК 517.5

А. И. Степанец, **А. С. Сердюк, А. Л. Шидлич** (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КЛАССИФИКАЦИЯ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

The set $\mathcal{D}^\infty$ of infinitely differentiable periodic functions is studied in terms of generalized $\bar{\psi}$-derivatives defined by a pair $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ of sequences ψ_1 and ψ_2. In particular, it is established that every function f from the set $\mathcal{D}^\infty$ has at least one derivative whose parameters ψ_1 and ψ_2 decrease faster than any power function. At the same time, for an arbitrary function $f \in \mathcal{D}^\infty$ different from a trigonometric polynomial, there exists a pair ψ whose parameters ψ_1 and ψ_2 have the same rate of decrease and for which the $\bar{\psi}$-derivative no longer exists. We also obtain new criteria for 2π-periodic functions real-valued on the real axis to belong to the set of functions analytic on the axis and to the set of entire functions.

Вивчається множина $\mathcal{D}^\infty$ нескінченно диференційовних періодичних функцій у термінах узагальнених $\bar{\psi}$-похідних, що визначаються парою $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ послідовностей ψ_1 і ψ_2. Зокрема, показано, що кожна функція f, яка належить множині $\mathcal{D}^\infty$, має хоча б одну похідну, параметри якої ψ_1 і ψ_2 спадають до нуля швидше за будь-яку степеневу функцію, і водночас для будь-якої функції $f \in \mathcal{D}^\infty$, відмінної від тригонометричного полінома, знайдеться пара $\bar{\psi}$, параметри ψ_1 і ψ_2 якої мають таку саму швидкість спадання і для якої $\bar{\psi}$-похідна вже не існує. Встановлено також нові критерії належності 2π-періодичних дійснозначних на дійсній осі функцій множинам аналітичних на осі та цілих функцій.

1. Введение. Пусть L — пространство интегрируемых 2π-периодических функций f и

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x) \qquad (1)$$

— ряд Фурье функции f. Пусть, далее, $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ — пара произвольных числовых последовательностей таких, что $\psi^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\psi_1(k)}{\psi^2(k)} A_k(f;x) - \frac{\psi_2(k)}{\psi^2(k)} \tilde{A}_k(f;x) \right), \qquad (2)$$

где $\tilde{A}_k(f;x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx$, является рядом Фурье некоторой функции $\varphi \in L$, то φ называют *$\bar{\psi}$-производной функции* f и записывают $\varphi(\cdot) = D^{\bar{\psi}}(f;\cdot) = f^{\bar{\psi}}(\cdot)$. Подмножество всех функций $f \in L$, у которых существуют $\bar{\psi}$-производные, обозначают через $L^{\bar{\psi}}$. Если C — пространство всех непрерывных 2π-периодических функций, то полагают $C^{\bar{\psi}} = L^{\bar{\psi}} \cap C$.

Заметим, что в случае, когда

$$\psi_1(k) = k^{-r} \cos \frac{r\pi}{2}, \qquad \psi_2(k) = k^{-r} \sin \frac{r\pi}{2}, \quad r > 0,$$

$\bar{\psi}$-производная совпадает с дробной производной в смысле Вейля, которая, в свою очередь, при натуральных значениях r является обычной производной порядка r.

Наряду с множеством $L^{\bar{\psi}}$ будем также использовать множества $L^{\psi}_{\bar{\beta}}$, которые определяются следующим образом. Пусть $f \in L$ и ряд (1) — ее ряд Фурье. Пусть, далее, $\psi = \psi(k)$ и $\bar{\beta} = \beta_k$ — произвольные фиксированные последовательности действительных чисел. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\left(a_k\cos\left(kx+\beta_k\frac{\pi}{2}\right)+b_k\sin\left(kx+\beta_k\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\beta_k\frac{\pi}{2}}{\psi(k)}A_k(f;x)-\frac{\sin\beta_k\frac{\pi}{2}}{\psi(k)}\tilde{A}_k(f;x) \tag{3}$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $f^{\psi}_{\bar\beta}(\cdot)$, то ее называют $(\psi,\bar\beta)$-производной функции $f(\cdot)$. Множество всех функций из L, имеющих $(\psi,\bar\beta)$-производные, обозначают через $L^{\psi}_{\bar\beta}$. Если выполняется тождество $\beta_k\equiv\beta$, то $(\psi,\bar\beta)$-производная обозначается через $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$, а множество $L^{\psi}_{\bar\beta}$ — через L^{ψ}_{β}. Кроме того, полагают $C^{\psi}_{\bar\beta}=C\cap L^{\psi}_{\bar\beta}$ и $C^{\psi}_{\beta}=C\cap L^{\psi}_{\beta}$. Множество $C^{\psi}_{\bar\beta}$ при $\psi(k)=q^{k^r}$, где $q\in(0,1)$ и $r>0$, для удобства обозначим через $C^{q,r}_{\bar\beta}$, а при $\psi(k)=q^k$ — через $C^{q}_{\bar\beta}$. Если $f\in C^{q}_{\bar\beta}$, то ее $(\psi,\bar\beta)$-производную при $\psi(k)=q^k$ будем обозначать через $f^{q}_{\bar\beta}$.

Понятно, что каждая $(\psi,\bar\beta)$-производная функции $f\in L$ является и $\bar\psi$-производной, если компоненти $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$ подобраны согласно равенствам

$$\psi_1(k)=\psi(k)\cos\beta_k\frac{\pi}{2},\qquad \psi_2(k)=\psi(k)\sin\beta_k\frac{\pi}{2}, \tag{4}$$

и любая $\bar\psi$-производная является $(\psi,\bar\beta)$-производной, если параметры $\psi(k)$ и β_k определить с помощью формул

$$\psi(k)=\sqrt{\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)}, \tag{5}$$

$$\cos\beta_k\frac{\pi}{2}=\frac{\psi_1(k)}{\psi(k)},\quad \sin\beta_k\frac{\pi}{2}=\frac{\psi_2(k)}{\psi(k)}. \tag{6}$$

В обоих случаях выполняется равенство $L^{\bar\psi}=L^{\psi}_{\bar\beta}$.

Обобщенные $\bar\psi$-производные ($(\psi,\bar\beta)$-производные) были введены А. И. Степанцом в 80-х годах прошлого века (см., например, [1 – 4]). С помощью этих производных удается ранжировать весь спектр интегрируемых 2π-периодических функций, начиная с функций, ряды Фурье которых могут даже расходиться, и заканчивая бесконечно дифференцируемыми, аналитическими и целыми функциями. При этом оказалось, что без существенных потерь общности последовательности ψ_1 и ψ_2 можно выбирать только из множества $\mathfrak{M}$ всех положительных выпуклых вниз убывающих к нулю последовательностей,

$$\mathfrak{M}=\Big\{\lambda(k)\colon\lambda(k)>0,\ \lambda(k)-2\lambda(k+1)+\lambda(k+2)\ge 0\ \ \forall k\in\mathbb{N}\ \ \lim_{k\to\infty}\lambda(k)=0\Big\},$$

поскольку, как показано в [2, с. 1075] (предложение 8) (см. также [5] (гл. III)), *каждая функция $f\in C$ (или же $f\in L$) имеет хотя бы одну $\bar\psi$-производную $f^{\bar\psi}(\cdot)$, которая содержится в C (или же в L), причем пару $\bar\psi=(\psi_1,\psi_2)$ можно выбирать так, чтобы ψ_1, $\psi_2\in\mathfrak{M}$. Таким образом, выполняются равенства*

$$\bigcup_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}} L^{\bar\psi} = L, \qquad \bigcup_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}} C^{\bar\psi} = C. \tag{7}$$

Если $\mathcal{T}$ — множество всех тригонометрических полиномов и $f \in \mathcal{T}$, то понятно, что какова бы ни была пара $\bar\psi$, функция f имеет $\bar\psi$-производную. Отсюда, в частности, следует, что множество $L^{\bar\psi}$ не может быть пустым. Понятно также, что $\bigcap_{\bar\psi} L^{\bar\psi} = \mathcal{T}$, если $\bar\psi$ пробегает все множество пар, для которых $\psi^2(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Более того, выполняется равенство

$$\bigcap_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}} L^{\bar\psi} = \mathcal{T}. \tag{8}$$

Этот факт базируется на следующем утверждении, доказательство которого во многом повторяет доказательство предложения 11 из [2] (см. также предложение 3.11.10 из [5, с. 157]).

Предложение 1. *Для каждой отличной от тригонометрического полинома функции $f \in L$ можно указать последовательность $\psi \in \mathfrak{M}$ такую, что $f \bar\in L^{\bar\psi}$ для любых пар $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$, для которых $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, т. е. $f^{\bar\psi}$ не существует, и при этом существует бесконечно возрастающая последовательность натуральных чисел $\{i_s\}_{s=1}^{\infty}$, для которой*

$$\psi(i_s) = \sqrt{a_{i_s}^2 + b_{i_s}^2}, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

где $a_k(f)$ и $b_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции f.

Доказательство. Пусть функция f принадлежит множеству L. Записывая ее ряд Фурье в виде

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos\Big(kx - \frac{\gamma_k \pi}{2}\Big), \tag{10}$$

где

$$d_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \qquad \cos\frac{\gamma_k\pi}{2} = \frac{a_k}{d_k}, \qquad \sin\frac{\gamma_k\pi}{2} = \frac{b_k}{d_k}, \tag{11}$$

видим, что

$$\lim_{k\to\infty} d_k = 0.$$

Поэтому функция

$$d(t) = \max_{k\geq t}\{d_k\}, \quad t \geq 1, \tag{12}$$

является кусочно-постоянной, не возрастает, и для нее справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty} d(t) = 0.$$

Условие $f \bar\in \mathcal{T}$ равносильно тому, что $d(t) > 0$ $\forall t \geq 1$.

Обозначим через $k_j, j = 1, 2, \ldots$, точки, занумерованные в порядке их возрастания, в которых функция $d(t)$ меняет значения. Ясно, что $d(k_j) = d_{k_j}$. Положим $z_j = (k_j, d_{k_j})$ и построим функцию $l(t)$ следующим образом. Луч l_1, выходящий из z_1 в направлении, противоположном оси ординат, будем вращать против часовой стрелки, пока на нем не окажется одна из точек z_j, $j > 1$. Эту точку обозначим через

z_{j_1}. Если на луче окажется сразу несколько таких точек, то через z_{j_1} обозначим ту, у которой наибольшая абсцисса. На промежутке $[1, k_{j_1}]$ определим $l(t)$ так, чтобы ее график совпадал с прямой, соединяющей точки z_1 и z_{k_1}. Далее, луч l_2, выходящий из точки z_{j_1}, направление которого совпадает с лучом l_1 в последнем положении, опять будем вращать против часовой стрелки, пока он не встретит одну из оставшихся точек z_j, $j > j_1$. Эту точку обозначим через z_{j_2}. Если при этом на луче окажется несколько таких точек, то через z_{j_2} опять обозначаем ту из них, у которой наибольшая абсцисса. На промежутке $[k_{j_1}, k_{j_2}]$ определим $l(t)$ так, чтобы ее график совпадал с прямой, соединяющей точки z_{j_1} и z_{j_2}. Продолжая этот процесс, построим функцию $l(t)$ для всех $t \geq 1$. Она будет характеризоваться такими свойствами:

а) $l(t)$ выпукла вниз и $\lim\limits_{t\to\infty} l(t) = 0$;

б) $l(k_{j_s}) = d(k_{j_s}) = d_{k_{j_s}}$, $s = 1, 2, \ldots$;

в) $l(k) = d(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, если $d = \{d_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathfrak{M}$.

Поэтому, полагая $\psi_f(k) = l(k)$, вследствие свойства а) заключаем, что $\psi_f \in \mathfrak{M}$, а в силу свойства б) для последовательности $i_s = k_{j_s}$, $s = 1, 2, \ldots$, выполняется равенство (9):

$$\psi_f(i_s) = \psi_f(k_{j_s}) = d_{k_{j_s}} = d_{i_s} = \sqrt{a_{i_s}^2 + b_{i_s}^2}, \quad s = 1, 2, \ldots .$$

Рассмотрим произвольную пару $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$, для которой $\sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)} = \psi_f(k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Соответствующий ей и функции $f(\cdot)$ ряд (2) можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\psi_1(k)}{\psi_f^2(k)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) - \frac{\psi_2(k)}{\psi_f^2(k)} (a_k \sin kx - b_k \cos kx) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi_f(k)} \left(\frac{\psi_1(k)}{\psi_f(k)} d_k \cos\left(kx - \frac{\gamma_k \pi}{2}\right) - \frac{\psi_2(k)}{\psi_f(k)} d_k \sin\left(kx - \frac{\gamma_k \pi}{2}\right) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{\psi_f(k)} \cos\left(kx - \frac{(\gamma_k - \beta_k)\pi}{2}\right), \tag{13}$$

где последовательности β_k определяются с помощью системы

$$\begin{aligned} \cos\frac{\beta_k \pi}{2} &= \frac{\psi_1(k)}{\psi_f(k)}, \\ \sin\frac{\beta_k \pi}{2} &= \frac{\psi_2(k)}{\psi_f(k)}, \end{aligned} \tag{14}$$

а последовательности γ_k — с помощью равенств (11). В силу соотношения (9) коэффициенты этого ряда не стремятся к нулю. Значит, он не может быть рядом Фурье никакой функции из L. Следовательно, $\bar{\psi}$-производной с такими параметрами функция $f(\cdot)$ не имеет, и последовательность ψ_f — искомая.

Предложение 1 доказано.

Если для произвольной функции $f \in L \setminus \mathcal{T}$ через $\psi_f = \psi_f(k)$, как и раньше, обозначать последовательность положительных чисел, построенную в ходе доказательства предложения 1, то на основании формул (4)–(6), выражающих взаимосвязь между параметрами классов $L^{\bar{\psi}}$ и $L^{\psi}_{\bar{\beta}}$, можем заключить, что имеет место следующее утверждение.

Предложение 1$'$. *Для каждой отличной от тригонометрического полинома функции $f \in L$ и для любой последовательности действительных чисел $\bar{\beta} = \{\beta_k\}$:*

а) $f \bar{\in} L^{\psi_f}_{\bar{\beta}}$;

б) *существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{i_s\}_{s=1}^{\infty}$, для которой*

$$\psi_f(i_s) = \sqrt{a^2_{i_s}(f) + b^2_{i_s}(f)}, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

где $a_k(f)$ и $b_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции f.

Если же последовательность чисел $d_k = \sqrt{a^2_k(f) + b^2_k(f)}$, $k = 1, 2, \ldots$, принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, то

$$\psi_f(k) = d_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{16}$$

Оказывается, что для довольно широкого множества функций f из $L \setminus \mathcal{T}$ последовательность $\psi_f(k)$ среди всех последовательностей $\psi(k)$, для которых $f \bar{\in} L^{\psi}_{\bar{\beta}}$ $\forall \beta_k \in \mathbb{R}$, имеет в определенном смысле „наименьшую” скорость стремления к нулю. А именно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Для любой функции $f \in L \setminus \mathcal{T}$, у которой последовательность чисел $d_k = \sqrt{a^2_k(f) + b^2_k(f)}$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, найдется последовательность действительных чисел β_k таких, что какова бы ни была последовательность $\varepsilon(k) \in \mathfrak{M}$ функция f принадлежит пространству $L^{\psi_f/\varepsilon}_{\bar{\beta}}$.*

Доказательство. Пусть $f \in L \setminus \mathcal{T}$. Определим числа β_k с помощью равенств

$$\cos \frac{\beta_k \pi}{2} = \frac{a_k}{d_k},$$
$$\sin \frac{\beta_k \pi}{2} = \frac{b_k}{d_k},$$

и для произвольной последовательности $\varepsilon \in \mathfrak{M}$ положим $\psi(k) = \dfrac{\psi_f(k)}{\varepsilon(k)}$. Поскольку последовательность $d = \{d_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, выполняется равенство (16). Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta_k \pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta_k \pi}{2}\right)\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{\psi(k)} \cos kx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k \varepsilon(k)}{\psi_f(k)} \cos kx = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon(k) \cos kx.$$

В силу того, что $\varepsilon(k) \in \mathfrak{M}$, из теоремы 2 (§2 раздела 10) монографии [7] заключаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon(k) \cos kx$ является рядом Фурье суммируемой функции, а значит, $f \in L^{\psi_f/\varepsilon}_{\bar{\beta}}$.

Предложение доказано.

Заметим, что равенства (7) означают, что если пара $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$ пробегает множество $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$, то все множество L (или C) разбивается на подмножества (классы) $L^{\bar\psi}$ (или $C^{\bar\psi}$). Равенство (8) означает, что при такой классификации остаются неразличимыми только тригонометрические полиномы. Следует отметить, что общая часть известных классов Соболева W^r состоит из множества $\mathcal{D}^\infty$ всех бесконечно дифференцируемых 2π-периодических функций, поскольку, как известно, функция f принадлежит множеству $\mathcal{D}^\infty$ тогда и только тогда, когда ее коэффициенты Фурье $c_k(f)$ убывают к нулю быстрее любой степенной функции:

$$f \in \mathcal{D}^\infty \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} k^r c_k(f) = 0 \quad \forall r > 0. \tag{17}$$

Следовательно, в шкале классов W^r такие функции различить нельзя.

В данной работе получены необходимые и достаточные условия того, чтобы 2π-периодическая функция f принадлежала одному из множеств $\mathcal{D}^\infty$, $\mathcal{A}$ или $\mathcal{E}$, где $\mathcal{A}$ — множество всех 2π-периодических действительнозначных на вещественной оси функций, допускающих аналитическое продолжение на полосу $|\mathrm{Im}\, z| < c$, $c > 0$, а $\mathcal{E}$ — подмножество всех функций из $\mathcal{A}$, допускающих аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость (т. е. множество всех 2π-периодических действительнозначных на вещественной оси целых функций). Эти условия формулируются в терминах $\bar\psi$-производных, компоненты ψ_1 и ψ_2 которых выбираются из множества $\mathfrak{M}$ и позволяют классифицировать множества $\mathcal{D}^\infty$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{E}$ в зависимости от скорости убывания последовательностей ψ, определяющих эти производные.

Не умаляя общности, будем считать, что последовательности $\psi(k)$ из множества $\mathfrak{M}$ являются сужениями на множество натуральных чисел некоторых положительных непрерывных выпуклых вниз функций $\psi(t)$ непрерывного аргумента $t \geq 1$, которые убывают к нулю при $t \to \infty$. Множество всех таких функций также будем обозначать через $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M} = \Big\{\psi(t)\colon \psi(t) > 0,\ \ \psi(t_1) - 2\psi((t_1+t_2)/2) + \psi(t_2) \geq 0 \quad \forall t_1,\ t_2 \in [1,\infty),$$

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0\Big\}.$$

Для характеристики скорости убывания к нулю функций ψ из $\mathfrak{M}$ удобно использовать пару функций $\eta(t) = \eta(\psi;t)$ и $\mu(t) = \mu(\psi;t)$, которые определяются следующим образом. При любом $t \geq 1$

$$\psi(\eta(t)) = \frac{1}{2}\psi(t).$$

В силу строгой монотонности функции ψ значение $\eta(t)$ при каждом $t \geq 1$ определяется однозначно:

$$\eta(t) = \eta(\psi;t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right).$$

Функция $\mu(t)$ задается равенством

$$\mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t}.$$

Через $\mathfrak{M}_\infty^+$ обозначим подмножество всех функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых величина $\mu(\psi; t)$ монотонно и неограниченно возрастает при $t \to \infty$:

$$\mathfrak{M}_\infty^+ = \{\psi(t) \in \mathfrak{M} \colon \mu(\psi; t) \uparrow \infty\}.$$

Заметим, что естественными представителями множества $\mathfrak{M}_\infty^+$ являются функции $t^s \ln^\varepsilon(t+e)\, e^{-\alpha t^r}$ при любых $\alpha > 0$, $r > 0$, $s < 0$, $\varepsilon < 0$.

2. Критерии принадлежности функций множеству $\mathcal{D}^\infty$.

Теорема 1. *Если $f \in \mathcal{D}^\infty$, то можно указать функцию ψ из множества $\mathfrak{M}_\infty^+$ такую, что $f \in C^{\bar\psi}$ для всех пар $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$, для которых $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$, $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть функция f принадлежит множеству $\mathcal{D}^\infty$. Записывая ряд Фурье в виде (10) и учитывая (17), видим, что при любом $r > 0$

$$\lim_{k \to \infty} k^r d_k = 0.$$

Поэтому функция

$$a(t) = \sup_{k \geq t} \{d_k k^2\}, \quad t \geq 1, \tag{18}$$

является кусочно-постоянной, не возрастает, и для нее справедливо равенство

$$\lim_{t \to \infty} a(t) = 0.$$

Убедимся, что для доказательства теоремы достаточно показать существование функции $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ такой, что при всех $t \geq 1$ выполняется неравенство $a(t) \leq \psi(t)$. Действительно, в этом случае для любых последовательностей $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$ таких, что $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$, соответствующий им и функции f ряд (2) можно представить в виде (13). Вследствие того, что $\psi(k) \geq a(k) \geq k^2 d_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$, этот ряд будет сходиться абсолютно, а следовательно, будет рядом Фурье некоторой суммируемой функции $f^{\bar\psi}$, т. е. f будет принадлежать множеству $C^{\bar\psi}$.

Таким образом, следует установить существование функции $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, удовлетворяющей неравенству $a(t) \leq \psi(t)$.

Представим функцию $a(t)$ при $t > 1$ в виде $a(t) = t^{-r(t)}$. Тогда

$$r(t) = -\frac{\ln a(t)}{\ln t},$$

и поскольку для произвольного $r > 0$ $\lim\limits_{t \to \infty} t^r a(t) = 0$, при каждом $r > 0$ для достаточно больших значений t выполняется неравенство $a(t) t^r < 1$. Отсюда следует, что для таких t

$$r < -\frac{\ln a(t)}{\ln t} = r(t),$$

т. е.

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = +\infty.$$

Сначала построим положительную функцию $\varphi(t)$, $t \geq 1$, вторая производная которой $\varphi''(t)$ неположительна: $\varphi''(t) \leq 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = +\infty$, и для которой при всех t, больших некоторого числа $b \geq 1$, выполняется неравенство $\varphi(t) \leq r(t)$.

Построение функции φ можно провести, в частности, следующим образом. Построим сначала кусочно-постоянную неубывающую функцию $f_1(t)$, $t \geq 1$, такую, что $\lim\limits_{t\to\infty} f_1(t) = +\infty$ и $f_1(t) \leq r(t)$.

Положим $t_0 = 1$ и через t_1, $t_1 \geq t_0 + 1$, обозначим произвольное число такое, что при всех $t \geq t_1$ выполняется неравенство $r(t) > 0$. Понятно, что это число существует. Через t_2, $t_2 \geq t_1 + 1$ обозначим произвольное число такое, что при всех $t \geq t_2$ выполняется неравенство $r(t) > \inf\limits_{t\geq t_1} r(t)$, через t_3, $t_3 \geq t_2 + 1$, обозначим произвольное число такое, что при всех $t \geq t_3$ $r(x) > \inf\limits_{t\geq t_2} r(t)$ и т. д.

Определим функцию f_1 с помощью равенств

$$f_1(t) = \begin{cases} \inf\limits_{t\geq 1} r(t), & t \in [1, t_1), \\ \inf\limits_{t\geq t_{k-1}} r(t), & t \in [t_{k-1}, t_k), \quad k = 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

Построенная функция $f_1(t)$ не убывает, для нее выполняется неравенство $f_1(t) \leq$ $\leq r(t)$ и $\lim\limits_{t\to\infty} f_1(t) = +\infty$.

Далее, построим неотрицательную кусочно-линейную монотонно возрастающую к бесконечности функцию $f_2(t)$, $t > 0$, график которой является выпуклой вверх кривой и при всех $t \geq t_1$ лежит ниже графика функции $f_1(t)$. Для этого рассмотрим систему точек A_0, A_1, $A_2, \ldots$ таких, что $A_0 = A_0(0; 0)$, а при любом натуральном k $A_k = A_k(t_{k+1}, f_1(t_k))$.

Пусть $r_0 = r_0(t)$ — функция, графиком которой является луч A_0A_1. Если луч A_0A_1 лежит под графиком функции f_1 при $t \geq t_2$, то при $t \geq 0$ положим $f_2(t) = r_0(t)$, и процесс построения функции f_2 будет завершен. Если же этот луч пересекает график функции f_1, то положим $f_2(t) = r_0(t)$ на промежутке $[0, t_{k_0+1})$, где $t_{k_0+1} = t_2$, и через $\Delta_1 = [t_{k_1}, t_{k_1+1})$ обозначим полусегмент, содержащий точку пересечения данного луча с графиком функции f_1 (если же таких полусегментов несколько, то через $\Delta_1 = [t_{k_1}, t_{k_1+1})$ обозначим полусегмент, содержащий точку пересечения с наименьшей абсциссой).

Через $r_1 = r_1(t)$ обозначим функцию, графиком которой является луч $A_1A_{k_1}$, $A_{k_1} = A_{k_1}(t_{k_1+1}, f_1(t_{k_1}))$, и на промежутке $[t_{k_0+1}, t_{k_1+1})$ положим $f_2(t) = r_1(t)$.

Если луч $A_1A_{k_1}$ лежит под графиком функции f_1, то при всех $t \geq t_{k_1+1}$ положим $f_2(t) = r_1(t)$, и процесс построения функции f_2 будет завершен. Если же этот луч пересекает график функции f_1, то через $\Delta_2 = [t_{k_2}, t_{k_2+1})$ обозначим полусегмент, содержащий точку пересечения луча $A_1A_{k_1}$ с графиком функции f_1 (в случае, когда таких точек несколько, через $\Delta_2 = [t_{k_2}, t_{k_2+1})$ обозначим полусегмент, который содержит точку пересечения с наименьшей абсциссой).

Через $r_2 = r_2(t)$ обозначим функцию, графиком которой является луч $A_{k_1}A_{k_2}$, $A_{k_2} = A_{k_2}(t_{k_2+1}, f_1(t_{k_2}))$, и на промежутке $[t_{k_1+1}, t_{k_2+1})$ положим $f_2(t) = r_2(t)$.

При продолжении этого процесса на некотором, например i-м, шаге может оказаться, что луч $A_{k_{i-1}}A_{k_i}$ лежит под графиком функции f_1. В таком случае для произвольного $t \geq t_{k_i+1}$ положим $f_2(t) = r_i(t)$, где r_i — функция, графиком которой является луч $A_{k_{i-1}}A_{k_i}$. Если же этот луч пересекает график функции f_1, то через $\Delta_i = [t_{k_i}, t_{k_i+1})$ обозначим полусегмент, содержащий точку пересечения луча $A_{k_{i-1}}A_{k_i}$ с графиком функции f_1 (если же таких полусегментов несколько, то через $\Delta_i = [t_{k_i}, t_{k_i+1})$ обозначим полусегмент, содержащий точку пересечения с наименьшей абсциссой).

Через $r_i = r_i(t)$ обозначим функцию, графиком которой является луч $A_{k_i-1}A_{k_i}$, $A_{k_i} = A_{k_i}(t_{k_i+1}, f_1(t_{k_i}))$, и на промежутке $[t_{k_i}, t_{k_i+1})$ положим $f_2(t) = r_i(t)$.

В результате данного процесса будет построена неотрицательная выпуклая вверх кусочно-линейная функция $f_2(t)$, $t > 0$, такая, что $f(0) = 0$, при всех $t \geq t_1$ выполняется неравенство $f_2(t) \leq f_1(t) \leq r(t)$ и

$$\lim_{t\to\infty} f_2(t) = +\infty.$$

Понятно, что функцию $f_2(t)$ в окрестностях узлов t_{k_i+1} можно сгладить так, чтобы полученная функция $\varphi(t)$, $t > 0$, имела следующие свойства:

а) $\varphi(0) = 0$,

б) $\varphi''(t) \leq 0 \quad \forall t > 0$,

в) $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = +\infty$,

г) $\varphi(t) \leq r(t)\ \forall t \geq t_1$.

Тогда при всех $t \geq t_1$ будет выполняться соотношение $g(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} t^{-\varphi(t)} \geq t^{-r(x)} = a(t)$, и поскольку

$$g''(t) =$$

$$= t^{-\varphi(t)} \left((\varphi'(t)\ln t)^2 + \frac{2\varphi(t)\varphi'(t)\ln t}{t} + \frac{\varphi^2(t)}{t^2} - \varphi''(t)\ln t - \frac{2\varphi'(t)}{t} + \frac{\varphi(t)}{t^2} \right) \geq$$

$$\geq \left(\varphi'(t)\ln t - \frac{1}{t\ln t} \right)^2 - \frac{1}{t^2\ln^2 t} + \frac{\varphi(t)}{t^2} \geq \frac{1}{t^2} \left(\varphi(t) - \frac{1}{\ln^2 t} \right),$$

начиная с некоторого числа $b_1 \geq 1$ функция $g(t)$ будет выпуклой вниз.

Рассмотрим теперь функцию

$$\psi(t) = \psi(t; K) = K \exp\left(-\frac{1}{2} \int\limits_1^t \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau \right), \quad t \geq 1, \tag{19}$$

где $K > 0$ — произвольная фиксированная постоянная. Понятно, что $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$. Ее производная имеет вид

$$\psi'(t) = -\frac{1}{2} K \exp\left(-\frac{1}{2} \int\limits_1^t \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau \right) \frac{\varphi(t)}{t}.$$

В силу выпуклости φ и того, что $\varphi(0) = 0$, угол наклона секущей, проходящей через начало координат и любую точку графика функции $\varphi(t)$, с увеличением значений аргумента t не возрастает. Отсюда вытекает, что отношение $t/\varphi(t)$ не убывает, и поэтому функция $\psi'(t)$ также является неубывающей. Таким образом, $\psi \in \mathfrak{M}$ и поскольку величина

$$\alpha(\psi; t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} = \frac{2}{\varphi(t)} \tag{20}$$

монотонно убывает к нулю при $t \to \infty$, вследствие теоремы 3.12.1 из монографии [5, с. 161] (см. также [6]) функция ψ принадлежит и множеству $\mathfrak{M}_\infty^+$.

Покажем, что при определенном виборе постоянной K график функции $\psi(t; K)$ будет находиться выше графика функции $a(t)$, определяющейся равенством (18).

Согласно построению функции $g(t)$ и определению характеристики $\eta = \eta(g; t)$ при любом $t \geq b_1$ имеем

$$t^{-\varphi(t)} = g(t) = 2g(\eta(t)) = 2\eta(g; t)^{-\varphi(\eta(g;t))}.$$

Поскольку

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(1 + 1/\varphi(t))}{1/\varphi(t)} = 1,$$

для произвольного $\varepsilon \in (0, 1 - \ln 2)$ существует число $t_* \geq b_1$ такое, что при всех $t \geq t_*$

$$\varphi\left(t + \frac{t}{\varphi(t)}\right) \ln\left(t + \frac{t}{\varphi(t)}\right) = \varphi\left(t + \frac{t}{\varphi(t)}\right) \left(\ln t + \ln\left(1 + \frac{1}{\varphi(t)}\right)\right) \geq$$

$$\geq \varphi\left(t + \frac{t}{\varphi(t)}\right) \left(\ln t + \frac{1 - \varepsilon}{\varphi(t)}\right) \geq \varphi(t) \left(\ln t + \frac{\ln 2}{\varphi(t)}\right) = \varphi(t) \ln t + \ln 2.$$

Отсюда следует, что для произвольного $t \geq t_*$

$$g\left(t + \frac{t}{\varphi(t)}\right) = \left(t + \frac{t}{\varphi(t)}\right)^{-\varphi\left(t + \frac{t}{\varphi(t)}\right)} \leq \frac{1}{2}\, t^{-\varphi(t)} = \frac{1}{2} g(t) = g(\eta(g; t)),$$

и поэтому

$$\eta(g; t) \leq t + \frac{t}{\varphi(t)}, \quad t \geq t_*.$$

Поскольку в силу (20) и известного неравенства

$$\frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} \leq 2\frac{\eta(\psi; t) - t}{t} \quad \forall t \geq 1, \quad \psi \in \mathfrak{M} \tag{21}$$

(см., например, [5, с. 164; 6]), выполняется соотношение

$$\alpha(\psi; t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} = \frac{2}{\varphi(t)} \leq 2\frac{\eta(\psi; t) - t}{t} \quad \forall t \geq 1,$$

при всех $t \geq t_*$ имеет место неравенство

$$\eta(g;t) \leq t + \frac{t}{\varphi(t)} \leq \eta(\psi;t). \tag{22}$$

Поэтому если для некоторого числа $t \geq t_*$ выполняется условие $g(t) \leq \psi(t)$, то

$$g(\eta(g;t)) = \frac{1}{2}g(t) \leq \frac{1}{2}\psi(t) = \psi(\eta(\psi;t)) \leq \psi(\eta(g;t)).$$

В равенстве (19) подберем число $K = K_0$ так, чтобы при всех $t \in \big[1, \eta(g;t_*)\big]$ выполнялось неравенство $\psi(t;K_0) \geq g(t)$. Тогда в силу (22) такое же неравенство будет выполняться и при всех $t > \eta(g;t_*)$, поэтому

$$a(t) \leq g(t) \leq \psi(t;K_0), \quad t \geq 1.$$

Таким образом, функция $\psi(t) = \psi(t;K_0)$, которая определяется равенством (19) при $K = K_0$, принадлежит множеству $\mathfrak{M}_\infty^+$, и для нее при всех $t \geq 1$ выполняется неравенство $\psi(t) \geq a(t)$, т. е. ψ является искомой.

Теорема доказана.

Теорема 1 позволяет получить несколько новых критериев принадлежности функции f множеству $\mathcal{D}^\infty$.

Пусть $\mathfrak{M}^\infty$ — подмножество всех функций $\psi \in \mathfrak{M}$, которые убывают к нулю быстрее любой степенной функции:

$$\mathfrak{M}^\infty = \big\{\psi \in \mathfrak{M}\colon \forall r > 0 \ \lim_{t\to\infty} t^r\psi(t) = 0\big\}, \tag{23}$$

Обозначим через $\mathfrak{M}^\alpha$ подмножество всех функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых величина $\alpha(\psi;t) = \dfrac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}$, $\psi'(t) = \psi'(t+0)$, убывает к нулю при $t \to \infty$:

$$\mathfrak{M}^\alpha = \big\{\psi(t) \in \mathfrak{M}\colon \lim_{t\to\infty} \alpha(\psi;t) = 0\big\},$$

через $\mathfrak{M}'_\infty$ подмножество всех функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых величина $\mu(\psi;t)$ стремится к бесконечности при $t \to \infty$:

$$\mathfrak{M}'_\infty = \big\{\psi(t) \in \mathfrak{M}\colon \lim_{t\to\infty} \mu(\psi;t) = \infty\big\}.$$

Если функция ψ принадлежит множеству $\mathfrak{M}'_\infty$, то вследствие (21) справедливо соотношение

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} \leq 2\lim_{t\to\infty} \frac{\eta(\psi;t) - t}{t} = 0,$$

а значит, ψ принадлежит множеству $\mathfrak{M}^\alpha$.

Для произвольной функции $\psi \in \mathfrak{M}$ при любом $t > 1$ выполняется равенство

$$\psi(t) = \psi(1)\exp\left(-\int\limits_1^t \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)}\right)$$

(см., например, [5, с. 164]). Поэтому если $\psi \in \mathfrak{M}^\alpha$, то для произвольного $r > 0$ и любого t_0 такого, что $1/\alpha(t) \geq r + 1$, $t \geq t_0$, имеем

$$\lim_{t\to\infty} t^r\psi(t) = \psi(1)\lim_{t\to\infty}\exp\left(r\ln t - \int\limits_1^t \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)}\right) \le$$

$$\le \psi(1)\lim_{t\to\infty}\exp\left(-\int\limits_{t_0}^t \frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\alpha(\tau)} - r\Big)d\tau + r\ln t_0\right) \le$$

$$\le \psi(1)\lim_{t\to\infty} e^{-\ln t + (r+1)\ln t_0} = 0,$$

и, следовательно, ψ принадлежит множеству $\mathfrak{M}^\infty$.

Таким образом, выполняются следующие вложения:

$$\mathfrak{M}_\infty^+ \subset \mathfrak{M}'_\infty \subset \mathfrak{M}^\alpha \subset \mathfrak{M}^\infty. \tag{24}$$

Если $f \in C^{\bar\psi}$ для некоторой пары $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$, для которой функция $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}^\infty$, то вследствие (23) ряд (2) можно дифференцировать произвольное количество раз. В результате будем получать равномерно сходящиеся ряды, и, следовательно, $f \in \mathcal{D}^\infty$.

Отсюда в силу вложений (24) и теоремы 1 получаем такое утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M}$ — любое из множеств $\mathfrak{M}_\infty^+$, $\mathfrak{M}'_\infty$, $\mathfrak{M}^\alpha$ или $\mathfrak{M}^\infty$. Эквивалентны следующие утверждения*:

i) *функция f принадлежит множеству $\mathcal{D}^\infty$*;

ii) *существует функция $\psi(t)$ из множества $\mathcal{M}$ такая, что $f \in C^{\bar\psi}$ для всех пар $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$, для которых при каждом $k \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$*;

iii) *$f \in C^{\bar\psi}$ для некоторой пары $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$ такой, что функция $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$ принадлежит множеству $\mathcal{M}$.*

На основании теорем 1 и 2 получаем следующий аналог соотношений (7):

$$\mathcal{D}^\infty = \bigcup_{\psi_1,\,\psi_2\in\mathfrak{M}^\infty} C^{\bar\psi} = \bigcup_{\psi_1,\,\psi_2\in\mathfrak{M}^\alpha} C^{\bar\psi} = \bigcup_{\psi_1,\,\psi_2\in\mathfrak{M}'_\infty} C^{\bar\psi} = \bigcup_{\psi_1,\,\psi_2\in\mathfrak{M}_\infty^+} C^{\bar\psi}.$$

3. Критерии принадлежности функций множеству $\mathcal{A}$.

Предложение 3. *Если $f \in \mathcal{A}$, то существует число $q \in (0,1)$ такое, что $f \in C_{\bar\beta}^q$ для произвольных последовательностей $\bar\beta = \{\beta_k\}$, $\beta_k \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть функция f принадлежит множеству $\mathcal{A}$. Как и при доказательстве предложения 1, запишем ее ряд Фурье в виде (10). Тогда (см. § 25 работы [7]) существуют постоянные $A > 0$ и $\varrho \in (0,1)$ такие, что

$$d_k \le A\varrho^k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{25}$$

Выберем произвольное число $\varepsilon \in (0, 1-\varrho)$ и положим $q = \varrho + \varepsilon$. В таком случае для любой последовательности действительных чисел β_k ряд

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{d_k}{q^k}\cos\left(kx - \frac{(\gamma_k - \beta_k)\pi}{2}\right) \tag{26}$$

сходится абсолютно, поскольку в силу соотношений (25) и выбора числа q

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{q^k} \cos\left(kx - \frac{(\gamma_k - \beta_k)\pi}{2}\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{q^k} \le A \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{\varrho+\varepsilon}\right)^k = \frac{A\varrho}{\varepsilon} < \infty.$$

Таким образом, ряд (26) является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $\varphi = f^q_{\bar\beta}$, т. е. $f \in C^q_{\bar\beta}$, и предложение 3 доказано.

Из предложения 3 можно получить несколько критериев принадлежности функции f множеству $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{D}^\varrho$, $\varrho \in (0,1)$, — множество всех последовательностей $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ положительных чисел таких, что

$$\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} \le \varrho, \qquad \varrho \in (0,1), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{27}$$

$\mathcal{D}_q$, $q \in [0,1)$, — множество всех последовательностей положительных чисел, удовлетворяющих условию Даламбера:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q, \quad q \in [0,1). \tag{28}$$

Пусть также $\mathfrak{M}^K_\infty$ — подмножество всех функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых существует постоянная $K > 0$ такая, что

$$\eta(\psi;t) - t \le K, \quad t \ge 1, \tag{29}$$

и $\mathfrak{M}_{\infty,c}$ — подмножество всех функций $\psi \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{t\to\infty} (\eta(\psi;t) - t) = c, \quad c \in [0,\infty). \tag{30}$$

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{M}^*$ — любое из множеств $\bigcup\limits_{\varrho\in(0,1)} \mathcal{D}^\varrho$, $\bigcup\limits_{q\in[0,1)} \mathcal{D}_q$, $\bigcup\limits_{K>0} \mathfrak{M}^K_\infty$ или $\bigcup\limits_{c\ge0} \mathfrak{M}_{\infty,c}$. Эквивалентны следующие утверждения*:

i) *функция f принадлежит множеству $\mathcal{A}$;*

ii) *существует число $q \in (0,1)$ такое, что $f \in C^q_{\bar\beta}$ для любой последовательности $\bar\beta = \beta_k \in \mathbb{R}$;*

iii) *существует функция $\psi(t)$, принадлежащая множеству $\mathcal{M}^*$, такая, что $f \in C^{\bar\psi}$ для всех пар $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$, для которых при каждом $k \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$;*

iv) *$f \in C^q_{\bar\beta}$ для некоторого $q \in (0,1)$ и некоторой последовательности действительных чисел $\bar\beta = \beta_k$;*

v) *$f \in C^{\bar\psi}$ для некоторой пары $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$ такой, что функция $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$ принадлежит множеству $\mathcal{M}^*$.*

Доказательство. В силу предложения 2

$$\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}.$$

Кроме того, поскольку функция $\psi(k) = q^k$ принадлежит каждому из множеств $\bigcup\limits_{\varrho\in(0,1)} \mathcal{D}^\varrho$, $\bigcup\limits_{q\in[0,1)} \mathcal{D}_q$, $\bigcup\limits_{K>0} \mathfrak{M}^K_\infty$ и $\bigcup\limits_{c\ge0} \mathfrak{M}_{\infty,c}$, то очевидными являются следующие импликации:

$$\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)} \Rightarrow \text{v)}$$

и

$$\text{ii)} \Rightarrow \text{iv)} \Rightarrow \text{v)}.$$

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\text{v)} \Rightarrow \text{i)}. \tag{31}$$

Поскольку

$$\bigcup_{c\geq 0} \mathfrak{M}_{\infty,c} \subset \bigcup_{K>0} \mathfrak{M}_{\infty}^{K},$$

импликацию (31) достаточно доказать только в случае, когда $\mathcal{M}^*$ является одним из множеств $\bigcup\limits_{\varrho\in(0,1)} \mathcal{D}^{\varrho}$, $\bigcup\limits_{q\in[0,1)} \mathcal{D}_q$ или $\bigcup\limits_{K>0} \mathfrak{M}_{\infty}^{K}$.

Если $f \in C^{\bar\psi}$, то ее ряд Фурье в комплексной форме запишется в виде

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{|k|\geq 1} \mu_k \gamma_k e^{ikx}, \tag{32}$$

где

$$\gamma_k = \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2}, \qquad \gamma_{-k} = \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\mu_k = \begin{cases} \psi_1(k) - i\psi_2(k), & k \geq 1, \\ \psi_1(|k|) + i\psi_2(|k|), & k \leq -1, \end{cases}$$

а α_k и β_k — коэффициенты Фурье функции $\varphi = f^{\bar\psi}$. Согласно (32)

$$\big|c_k(f)\big| = \sqrt{\psi_1^2(|k|) + \psi_2^2(|k|)}|\gamma_k| = \psi(|k|)|\gamma_k|, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{33}$$

Как следует из результатов § 25 работы [7], включение $f \in \mathcal{A}$ будет доказано, если будет установлено существование постоянных $A > 0$ и $\varrho \in (0,1)$ таких, что

$$\big|c_k(f)\big| < A\varrho^{|k|}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{34}$$

Пусть сначала $\psi \in \mathcal{D}^{\varrho}$, $\varrho \in (0,1)$. Тогда в силу (27) и (33) имеем

$$\big|c_k(f)\big| = \prod_{j=1}^{|k|-1} \frac{\psi(|j|+1)}{\psi(|j|)} \psi(1)|\gamma_k| \leq \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\gamma_k| \varrho^{|k|-1}\psi(1), \quad k \in \mathbb{Z},$$

и тем самым равенство (34) доказано.

Пусть, далее, $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in [0,1)$. Полагая

$$\varepsilon_n = \sup_{k\geq n} \left| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q \right|, \quad n \in \mathbb{N},$$

видим, что вследствие (28) существует номер n_0 такой, что $\varepsilon_n < 1 - q$ для всех $n = n_0, n_0+1, \ldots$. Тогда, используя (33), получаем

$$\left|c_k(f)\right| = \prod_{j=n_0}^{|k|-1} \frac{\psi(|j|+1)}{\psi(|j|)} \psi(n_0)|\gamma_k| \leq \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\gamma_k| \psi(n_0)(q+\varepsilon_{n_0})^{|k|-n_0}, \qquad (35)$$

$$k \in \mathbb{Z}, \quad |k| \geq n_0.$$

Из (35) вытекает существование постоянной $A > 0$ и числа $\varrho = q + \varepsilon_{n_0}$, для которых выполняется неравенство (34).

Пусть наконец $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^K$. В силу (21) и (29)

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} \leq -\frac{1}{2K}, \quad t \geq 1.$$

Интегрируя последнее неравенство по промежутку $[1, x]$, получаем

$$\psi(x) \leq \psi(1) e^{-\frac{x-1}{2K}}, \quad x \geq 1. \qquad (36)$$

Из (33) и (36) следует неравенство

$$|c_k(f)| \leq \psi(1) \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\gamma_k| e^{-\frac{|k|-1}{2K}}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

а вместе с ним и неравенство (34) при $\varrho = e^{-\frac{1}{2K}}$.

Теорема доказана.

На основании теоремы 3 получаем равенства

$$\mathcal{A} = \bigcup_{q\in(0,1),\, \beta_k\in\mathbb{R}} C_{\bar{\beta}}^q = \bigcup_{\psi_1,\psi_2 \in \bigcup\limits_{\varrho\in(0,1)} \mathcal{D}^\varrho} C^{\bar{\psi}} = \bigcup_{\psi_1,\psi_2 \in \bigcup\limits_{q\in[0,1)} \mathcal{D}_q} C^{\bar{\psi}} =$$

$$= \bigcup_{\psi_1,\psi_2 \in \bigcup\limits_{K>0} \mathfrak{M}_\infty^K} C^{\bar{\psi}} = \bigcup_{\psi_1,\psi_2 \in \bigcup\limits_{c>0} \mathfrak{M}_{\infty,\, c}} C^{\bar{\psi}}.$$

4. Критерии принадлежности функций множеству $\mathcal{E}$.

Предложение 4. *Для того чтобы 2π-периодическая действительнозначная на вещественной оси функция f с рядом Фурье*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}$$

принадлежала множеству $\mathcal{E}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{k\to\pm\infty} |c_k(f)| e^{\alpha|k|} = 0 \quad \forall \alpha > 0. \qquad (37)$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f \in \mathcal{E}$. Тогда в силу следствия 3.8.1 из работы [5, с. 141]

$$|c_k(f)| = e^{-\varphi(k)|k|}, \quad k \in \mathbb{Z}, \qquad \lim_{k\to\pm\infty} \varphi(k) = +\infty.$$

Отсюда для произвольного $\alpha > 0$ имеем

$$\lim_{k\to\pm\infty}|c_k(f)|e^{\alpha|k|}=\lim_{k\to\pm\infty}e^{-|k|\varphi(k)}e^{\alpha|k|}=\lim_{k\to\pm\infty}e^{-|k|(\varphi(x)-\alpha)}=0.$$

Достаточность. Пусть для 2π-периодической действительнозначной на вещественной оси функции f выполняется соотношение (37). Возьмем произвольное число $z\in\mathbb{C}$, $z=x+iy$, и покажем, что оно находится в полосе аналитичности функции f. Выберем любое число $d>|\operatorname{Im}z|$. Вследствие (37) существует постоянная $K>0$ такая, что при всех $k\in\mathbb{Z}$ выполняется неравенство

$$|c_k(f)|\le Ke^{-d|k|}.$$

Тогда согласно теореме 3.8.3 из монографии [5, с. 139, 140] функция f является аналитической внутри полосы $|y|<d$, которая согласно выбору числа d содержит и точку z.

Предложение доказано.

Обозначим через $\mathfrak{M}^+_{\infty,\,0}$ множество всех функций $\psi\in\mathfrak{M}^+_\infty$, для которых

$$\lim_{t\to\infty}\big(\eta(\psi;t)-t\big)=0. \tag{38}$$

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Если $f\in\mathcal{E}$, то можно указать функцию ψ из множества $\mathfrak{M}^+_{\infty,\,0}$ такую, что $f\in C^{\bar\psi}$ для всех пар $\bar\psi=(\psi_1,\psi_2)$, для которых $\psi(k)=\sqrt{\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)}$, $k\in\mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть функция f принадлежит множеству $\mathcal{E}$. Запишем ее ряд Фурье в виде (10) и рассмотрим функцию $a(t)$, определяющуюся равенством (18). Как и при доказательстве теоремы 1, нетрудно убедиться, что для доказательства теоремы 4 достаточно установить существование функции $\psi\in\mathfrak{M}^+_{\infty,0}$, которая бы при всех $t\ge1$ удовлетворяла неравенству $a(t)\le\psi(t)$.

Представим функцию $a(t)$, $t>1$, в виде $a(t)=e^{-\xi(t)t}$. Тогда

$$\xi(t)=-\frac{\ln a(t)}{t}.$$

Поскольку $f\in\mathcal{E}$, вследствие предложения 4, при любом $\alpha>0$ выполняется соотношение (37). Отсюда в силу определения функции $a(t)$ делаем вывод, что для произвольного $\alpha>0$ $\lim\limits_{t\to\infty}e^{\alpha t}a(t)=0$. Поэтому при каждом $\alpha>0$ для достаточно больших значений t выполняется неравенство $e^{\alpha t}a(t)<1$. Отсюда следует, что для таких t

$$\alpha<-\frac{\ln a(t)}{t}=\xi(t),$$

а следовательно,

$$\lim_{t\to+\infty}\xi(t)=+\infty.$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, строим положительную функцию $\varphi(t)$, $t\ge0$, имеющую следующие свойства:

а) $\varphi(0)=0$,

б) $\varphi''(t)\le0\quad\forall t>0$,

в) $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)=+\infty$, г) $\varphi(t) \le \xi(t)$ при всех t, больших некоторого числа $b_1 \ge 1$.

В таком случае при всех $t \ge b_1$ будет выполняться соотношение $g(t) \overset{\mathrm{df}}{=} e^{-\varphi(t)t} \ge \ge e^{-\xi(t)t} = a(t)$. В силу того, что

$$g''(t) = e^{-t\varphi(t)}\Big((\varphi'(t)t + \varphi(t))^2 - \varphi''(t) - 2\varphi'(t)\Big) =$$

$$= e^{-t\varphi(t)}\left(\left(\varphi'(t)t - \frac{1}{t}\right)^2 + 2\varphi(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)t + \varphi^2(t) - \frac{1}{t^2}\right) \ge$$

$$\ge e^{-t\varphi(t)}\left(\left(\varphi'(t)t - \frac{1}{t}\right)^2 + \varphi^2(t) - \frac{1}{t^2}\right),$$

„подправим” функцию φ так, чтобы полученная при этом функция $\varphi_1(t)$, $t \ge 1$, оставалась положительной, $\varphi_1''(t) \le 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi_1(t) = +\infty$; при всех t, больших некоторого числа $b_0 \ge b_1 \ge 1$, $\varphi_1(t) \le \xi(t)$, и при этом для всех $t \ge 1$ выполнялось неравенство $\varphi_1(t) \ge \dfrac{1}{t}$. С этой целью в случае, когда φ является линейной, луч l, выходящий из точки $(1;1)$ в направлении оси Oy, будем вращать по часовой стрелке до тех пор, пока он не пересечет ее график. Если же функция φ не является линейной, то будем вращать по часовой стрелке луч l, пока он не коснется ее графика. Обозначим через $(b_2, \varphi(b_2))$ в первом случае точку пересечения, а во втором — точку касания луча l и графика функции $\varphi(t)$. В силу свойств а) – г) такая точка $(b_2, \varphi(b_2))$ всегда существует.

Определим φ_1, $t \ge 1$, в первом случае как функцию, графиком которой является луч l, во втором случае как функцию, график которой при $t \in [1, b_2]$ совпадает с лучем l, а при $t > b_2$ — с графиком функции φ. Тогда для нее будем иметь $\varphi_1(t) \ge 0$, $t \ge 1$, $\varphi_1(t) \ge \dfrac{1}{t}$, $\varphi_1''(t) \le 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi_1(t) = +\infty$; и при всех t, больших числа $b_0 = \max\{b_1,\, b_2\}$, выполняется неравенство $\varphi_1(t) \le \xi(t)$.

Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = K e^{-\varphi_1(t)t}, \tag{39}$$

где постоянная K подобрана так, чтобы при всех $t \ge 1$ выполнялось неравенство $a(t) \le K e^{-\varphi_1(t)t}$. Понятно, что такая постоянная существует, поскольку согласно построению при всех $t \ge b_0$ справедливо соотношение $e^{-\varphi_1(t)t} \ge e^{-\xi(t)t} = a(t)$. Функция $\psi(t)$ является положительной, убывает к нулю при $t \to \infty$ и в силу того, что

$$\psi''(t) = e^{-t\varphi_1(t)}\Big((\varphi_1'(t)t + \varphi_1(t))^2 - \varphi_1''(t) - 2\varphi_1'(t)\Big) \ge$$

$$\ge K e^{-t\varphi(t)}\left(\left(\varphi_1'(t)t - \frac{1}{t}\right)^2 + \varphi_1^2(t) - \frac{1}{t^2}\right) \ge 0,$$

является выпуклой вниз, а следовательно, принадлежит множеству $\mathfrak{M}$. Кроме того, поскольку величина

$$\alpha(\psi;t)=\frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}=\frac{Ke^{-\varphi_1(t)t}}{tKe^{-\varphi_1(t)t}(t\varphi'(t)+\varphi(t))}=\frac{1}{t(t\varphi'(t)+\varphi(t))}$$

монотонно убывает к нулю при $t\to\infty$, согласно теореме 3.12.1 из [6, с. 161] (см. также [5]) функция ψ принадлежит множеству $\mathfrak{M}^+_\infty$.

Для завершення доказательства теоремы осталось убедиться в том, что $\lim\limits_{t\to\infty}(\eta(\psi;t)-t)=0$. Поскольку $\psi\in\mathfrak{M}^+_\infty$, в силу неравенства

$$K_1|\psi'(t)|(\eta(\psi;t)-t)\le\psi(t)\qquad K_1>0,\quad K_1=\mathrm{const},$$

выполняющегося для произвольного $t\ge 1$ (см., например, [5, с. 166]), имеем

$$\eta(\psi;t)-t\le\frac{1}{K_1}\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|}=\frac{1}{K_1(t\varphi'(t)+\varphi(t))}\to 0,\quad t\to\infty.$$

Таким образом, $\psi\in\mathfrak{M}^+_{\infty,0}$, т. е. функция ψ — искомая.

Теорема доказана.

Пусть, как и выше, $\mathcal{D}_0$ — множество всех последовательностей положительных чисел, для которых

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}=0. \tag{40}$$

Поскольку для функции $\psi(t)$, определяющейся равенством (39), при любом натуральном k имеем

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}=\lim_{k\to\infty}\frac{Ke^{-(k+1)\varphi_1(k+1)}}{Ke^{-k\varphi_1(k)}}=\lim_{k\to\infty}e^{-\varphi_1(k+1)+k(\varphi_1(k)-\varphi_1(k+1))}=0,$$

последовательность $\psi(k)$, $k=1,2,\ldots$, принадлежит множеству $\mathcal{D}_0$. Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема 4$'$. *Если $f\in\mathcal{E}$, то можно указать последовательность ψ из множества $\mathcal{D}_0$ такую, что $f\in C^{\bar\psi}$ для всех пар $\bar\psi=(\psi_1,\psi_2)$, для которых $\psi(k)=\sqrt{\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)}$, $k\in\mathbb{N}$.*

На основании теорем 4 и 4$'$ можно получить следующие критерии принадлежности 2π-периодической функции множеству $\mathcal{E}$.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{M}$ — любое из множеств $\mathfrak{M}^+_{\infty,0}$ или $\mathcal{D}_0$. Эквивалентны следующие утверждения:*

i) $f\in\mathcal{E}$;

ii) *существует функция ψ, принадлежащая множеству $\mathcal{M}$ такая, что $f\in C^{\bar\psi}$ для всех пар $\bar\psi=(\psi_1,\psi_2)$, для которых при каждом $k\in\mathbb{N}$ выполняется равенство $\psi(k)=\sqrt{\psi_1^2(t)+\psi_2^2(t)}$;*

iii) *$f\in C^{\bar\psi}$ для некоторой пары $\bar\psi=(\psi_1,\psi_2)$ такой, что функция $\psi(k)=\sqrt{\psi_1^2(t)+\psi_2^2(t)}$ принадлежит множеству $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Импликация i) $\Rightarrow$ ii) следует из теорем 4 и 4$'$, импликация ii) $\Rightarrow$ iii) очевидна.

Убедимся в справедливости импликации iii) $\Rightarrow$ i). Пусть функция f принадлежит множеству $C^{\bar\psi}$ для некоторой пары $\bar\psi=(\psi_1,\psi_2)$ такой, что функция $\psi(k)=\sqrt{\psi_1^2(t)+\psi_2^2(t)}$ принадлежит множеству $\mathcal{M}$. Покажем, что тогда $f\in\mathcal{E}$. Как следует из рассуждений § 3.8 работы [5], для этого достаточно доказать соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \ln \psi^{-1/k}(k) = \infty. \tag{41}$$

Пусть $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty,0}$ и M — произвольное положительное число. В силу (38) и (21) для любого $\varepsilon > 0$ и, в частности, для $\varepsilon = 1/(2M)$ при всех t, больших некоторого числа $t_\varepsilon > 1$, выполняется неравенство

$$\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} \le 2(\eta(\psi;t) - t) < \varepsilon,$$

из которого следует, что

$$\frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{42}$$

Пусть K_0 — произвольное число, превышающее t_ε, для которого $\psi(K_0) < 1$. Интегрируя левую и правую части неравенства (42) по промежутку $[K_0, K]$, получаем

$$\ln\frac{1}{\psi(K)} > \frac{1}{\varepsilon}(K - K_0) + \ln\frac{1}{\psi(K_0)}.$$

Отсюда заключаем, что при всех $k > 2K_0$ имеет место соотношение

$$\ln\psi^{-1/k}(k) = \frac{1}{k}\ln\frac{1}{\psi(k)} > \frac{k-K_0}{\varepsilon\, k} + \frac{1}{k}\ln\frac{1}{\psi(K_0)} > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon} = M_0,$$

а это означает, что выполняется соотношение (41), и, следовательно, $f \in \mathcal{E}$.

Пусть теперь $\psi \in \mathcal{D}_0$. Для любого натурального n положим

$$\varepsilon_n = \sup_{k\ge n}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}.$$

Понятно, что $\varepsilon_1 \ge \varepsilon_2 \ge \ldots$, и вследствие (40) для сколь угодно большого числа $M_0 > 0$ существует номер n_0 такой, что $\varepsilon_m < 1/e^{2M_0}$ для всех $m = n_0,\ n_0+1, \ldots$. Тогда для всех $k > n_0$ таких, что $\psi(n_0) < 1$, имеем

$$\ln\psi^{-1/k}(k) = \ln\left(\prod_{j=n_0}^{k-1}\frac{\psi(j+1)}{\psi(j)}\psi(n_0)\right)^{-1/k} \ge \ln\left(\psi(n_0)\varepsilon_{n_0}^{k-n_0}\right)^{-1/k} =$$

$$= \frac{k-n_0}{k}\ln\frac{1}{\varepsilon_{n_0}} + \frac{1}{k}\ln\frac{1}{\psi(n_0)} > M_0.$$

Следовательно, справедливо соотношение (41), откуда следует, что функция f принадлежит множеству $\mathcal{E}$.

Теорема доказана.

На основании теоремы 5 получаем равенства

$$\mathcal{E} = \bigcup_{\psi_1,\,\psi_2\in\mathfrak{M}^{+}_{\infty,0}} C^{\bar\psi} = \bigcup_{\psi_1,\,\psi_2\in\mathcal{D}_0} C^{\bar\psi}.$$

Теоремы 1 – 4 устанавливают существование для каждой бесконечно дифференцируемой, аналитической или целой функции f существование функции $\psi \in \mathcal{M}$, имеющей определенные дополнительные свойства, зависящие от ее гладкости, такой, что $f \in C^{\bar{\psi}}$ для всех пар $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$, для которых $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$, $k \in \mathbb{N}$. С другой стороны, как следует из предложения 1, для любой отличной от тригонометрического полинома функции $f \in \mathcal{D}^\infty$ существует $\psi \in \mathfrak{M}$ такая, что $f \bar{\in} C^{\bar{\psi}}$ для всех пар $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$, для которых $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$. В связи с этим возникает вопрос: может ли при этом последовательность ψ принадлежать таким подмножествам множества $\mathfrak{M}$, как $\mathfrak{M}^\infty$, $\mathfrak{M}^\alpha$, $\mathfrak{M}'_\infty$, $\mathfrak{M}^+_\infty$ и $\mathfrak{M}^+_{\infty,\,0}$, или, например, выбираться из множеств $\mathcal{D}_q$? Два следующих утверждения вместе с цепочкой вложений (24) дают положительный ответ на поставленный вопрос.

Теорема 6. *Для произвольной функции $f \in L \setminus \mathfrak{T}$ можно указать $\psi \in \mathfrak{M}^+_{\infty,\,0}$ такую, что $f \bar{\in} L^{\bar{\psi}}$ (т. е. $f^{\bar{\psi}}$ не существует) для всех пар $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$, для которых $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$, $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. В ходе доказательства предложения 1 для каждой 2π-периодической суммируемой функции f, которая не принадлежит множеству $\mathfrak{T}$, была построена функция $\psi_f \in \mathfrak{M}$ такая, что $f \bar{\in} L^{\bar{\psi}_f}$ для всех пар последовательностей $\bar{\psi}_f = (\psi_1, \psi_2)$, для которых $\psi_f(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому для окончательного доказательства теоремы 6 достаточно установить существование функции $\psi \in \mathfrak{M}^+_{\infty,\,0}$, график которой находится не выше графика функции ψ_f.

Построим функцию $\varphi(t) \in \mathfrak{M}$ такую, чтобы ее график лежал не выше графика функции $\xi(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \eta(\psi_f; t) - t$ и при этом выполнялось неравенство

$$|\varphi'(t)| \leq \frac{3}{2}. \tag{43}$$

Понятно, что в случае, когда $\eta(\psi_f; t) - t \geq C > 0$, построение функции φ тривиально. Если же $\varliminf\limits_{t\to\infty} (\eta(\psi_f; t) - t) = 0$, то построить функцию φ можно, например, слегка модифицировав схему, использованную при доказательстве предложения 1 (см. также предложение 3.11.10 из [5, с. 157]).

Построим вспомогательную функцию $l = l(t)$. Для этого положим $z_0 = (1, \xi(1))$. Луч l_1, выходящий из точки z_0 в направлении, противоположном оси ординат, будем вращать против часовой стрелки, пока он не коснется графика функции $\xi(t)$. Точку касания обозначим через $z_1 = (t_1, y_1)$. Если таких точек касания несколько, то через $z_1 = (t_1, y_1)$ обозначим точку с наибольшей абсциссой. На промежутке $[1, t_1]$ определим функцию $l(t)$ так, чтобы ее график совпал с отрезком, соединяющим точки z_0 и z_1.

Далее, луч l_2, выходящий из точки z_1, направление которого совпадает с направлением луча l_1 в последнем положении, снова будем вращать против часовой стрелки, пока он не коснется графика функции $\xi(t)$. Точку касания обозначим через $z_2 = (t_2, y_2)$. Если таких точек касания несколько, то через $z_2 = (t_2, y_2)$ обозначим точку с наибольшей абсциссой. На промежутке $[t_1, t_2]$ определим функцию $l(t)$ так, чтобы ее график совпал с отрезком, соединяющим точки z_1 и z_2.

Продолжив этот процесс, в результате построим функцию $l(t)$, $t \geq 1$, которая будет принадлежать множеству $\mathfrak{M}$, такую, что $l(t) \leq \xi(t)$, $t \geq 1$. Согласно построению при всех достаточно больших t, за исключением узлов t_i, выполняется неравенство $|l'(t)| \leq \dfrac{3}{2}$. Понятно, что функцию l можно изменить на конечном промежутке таким образом, чтобы полученная при этом функция φ принадлежала множеству $\mathfrak{M}$ и при $t \geq 1$ удовлетворяла неравенству (43) и условию

$$\varphi(t) \leq \xi(t) = \eta(\psi_f; t) - t. \tag{44}$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \psi(t; K) = K \exp\left(-\frac{3}{2}\int\limits_1^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right), \quad t \geq 1, \tag{45}$$

где K — произвольная положительная постоянная. Поскольку

$$\psi'(t) = -\frac{3}{2} K \exp\left(-\frac{3}{2}\int\limits_1^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\frac{1}{\varphi(t)} < 0, \tag{46}$$

и

$$\psi''(t) = \frac{3}{2} K \exp\left(-\frac{3}{2}\int\limits_1^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\frac{1}{\varphi^2(t)}\left(\frac{3}{2} + \varphi'(t)\right) \geq 0,$$

то $\psi \in \mathfrak{M}$. Величина

$$\alpha(\psi; t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} = \frac{2\varphi(t)}{3t}$$

монотонно убывает к нулю при $t \to \infty$, поэтому в силу теоремы 3.12.1 из работы [5, с. 161] (см. также [6]) делаем вывод, что $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$.

Далее, поскольку $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, для любого $t \geq 1$

$$\eta'(\psi; t) \leq 1 + \gamma(t),$$

где $\gamma(t)$ — некоторая функция, стремящаяся к нулю при $t \to \infty$ (см., например, [5, с. 166]). Поэтому при всех t, больших некоторого числа $\bar{t} \geq 1$, выполняется соотношение

$$\eta'(\psi; t) = \frac{\psi'(t)}{2\psi'(\eta(\psi; t))} \leq \frac{3}{2}.$$

Отсюда, в силу (45), (46) и того, что

$$\big|\psi'(\eta(\psi; t))\big|(\eta(\psi; t) - t) \leq -\int\limits_t^{\eta(\psi;\, t)} \psi'(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\psi(t), \quad t \geq 1$$

(см., например, [5, с. 164]), заключаем, что при всех $t \geq \bar{t}$

$$\eta(\psi; t) - t \leq \frac{\psi(t)}{2|\psi'(\eta(\psi; t))|} \leq \frac{3}{2}\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} = \varphi(t). \tag{47}$$

Согласно построению $\varphi \in \mathfrak{M}$, следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(\psi; t) - t = 0$, т. е. $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty,\,0}^+$.

Наконец убедимся, что при определенном выборе постоянной K график функции $\psi(t;K)$ будет лежать под графиком функции $\psi_f(t)$. Вследствие (47) и (44) при всех $t \geq \bar{t}$ имеем

$$\eta(\psi;t) \leq \eta(\psi_f;t). \tag{48}$$

Выберем в (45) число $K = K_0$ так, чтобы при всех $t \in [1, \eta(\psi;\bar{t})]$ выполнялось неравенство $\psi(t;K_0) \leq \psi_f(t)$. Тогда вследствие (48) такое же неравенство будет выполняться и при всех $t > \eta(\psi;\bar{t})$.

Следовательно, функция $\psi(t) = \psi(t;K_0)$, которая при любом $t \geq 1$ определяется равенством (45), где $K = K_0$, принадлежит множеству $\mathfrak{M}_\infty^+$, и для нее при всех $t \geq 1$ выполняется неравенство $\psi(t) \leq \psi_f(t)$, т. е. ψ — искомая.

Теорема доказана.

Рассмотрим также последовательность $\psi(k)$ значений функции $\psi(t)$, задающейся равенством (45), в точках $k = 1, 2, \ldots$. В силу того, что $\varphi \in \mathfrak{M}$, при любом натуральном k имеем

$$\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = \exp\left(-\frac{3}{2}\int\limits_k^{k+1}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right) \leq e^{-3/(2\varphi(k))}.$$

Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = 0$. Таким образом, последовательность $\psi(k)$ значений функции ψ в точках $k = 1, 2, \ldots$ принадлежит множеству $\mathcal{D}_0$ и справедлива следующая теорема.

Теорема 6′. *Для произвольной функции $f \in L \setminus \mathfrak{T}$ можно указать последовательность $\psi \in \mathcal{D}_0$ такую, что $f \bar{\in} L^{\bar{\psi}}$ для всех пар $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$, для которых $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$, $k \in \mathbb{N}$.*

На основании теорем 6 и 6′ с учетом вложений (24) получаем следующие аналоги соотношений (8):

$$\bigcap_{\psi_1,\psi_2 \in \mathfrak{M}^\infty} C^{\bar{\psi}} = \bigcap_{\psi_1,\psi_2 \in \mathfrak{M}^\alpha} C^{\bar{\psi}} = \bigcap_{\psi_1,\psi_2 \in \mathfrak{M}'_\infty} C^{\bar{\psi}} = \bigcap_{\psi_1,\psi_2 \in \mathfrak{M}^+_\infty} C^{\bar{\psi}} = \mathfrak{T},$$

$$\bigcap_{\psi_1,\psi_2 \in \bigcup\limits_{q\in[0,1)} \mathcal{D}_q} C^{\bar{\psi}} = \bigcap_{\psi_1,\psi_2 \in \bigcup\limits_{c>0} \mathfrak{M}_{\infty,\,c}} C^{\bar{\psi}} = \mathfrak{T},$$

$$\bigcap_{\psi_1,\,\psi_2 \in \mathfrak{M}^+_{\infty,0}} C^{\bar{\psi}} = \bigcap_{\psi_1,\,\psi_2 \in \mathcal{D}_0} C^{\bar{\psi}} = \mathfrak{T}.$$

Таким образом, весь спектр 2π-периодических бесконечно дифференцируемых функций можно проранжировать с помощью их $\bar{\psi}$-производных, причем пары $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ достаточно выбирать так, чтобы функции $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$ принадлежали одному из множеств $\mathfrak{M}^+_\infty$, $\mathfrak{M}'_\infty$, $\mathfrak{M}^\alpha$ или $\mathfrak{M}^\infty$. Для разграничения функций из $\mathcal{A}$ с помощью их $\bar{\psi}$-производных пары $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ достаточно выбирать так, чтобы функция $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$ принадлежала одному из множеств $\bigcup\limits_{\varrho\in(0,1)}\mathcal{D}^{\varrho}$, $\bigcup\limits_{q\in[0,1)}\mathcal{D}_q$, $\bigcup\limits_{K>0}\mathfrak{M}_{\infty}^{K}$ или $\bigcup\limits_{c\geq 0}\mathfrak{M}_{\infty,c}$, а для разграничения функций из $\mathcal{E}$ — так, чтобы $\psi(k)=\sqrt{\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)}$ принадлежала одному из множеств $\mathfrak{M}_{\infty,0}^{+}$ или $\mathcal{D}_0$. Неразличимыми при такой классификации остаются только тригонометрические полиномы.

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\bar{\psi}$-интегралов // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1069 – 1113.
3. *Степанец А. И.* Приближение $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). I // Там же. – 1997. – **49**, № 3. – С. 388 – 400.
4. *Степанец А. И.* Приближение $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). II // Там же. – 1998. – **50**, № 2. – С. 274 – 291.
5. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Труды Ин-та математики НАН Украины. – 2002. – **40**, ч. I. – 427 с.
6. *Степанец А. И.* Несколько утверждений для выпуклых функций // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 5. – С. 688 – 702.
7. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.

Получено 31.10.07