УДК 517.9

В. Д. Кошманенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПОВНА МІРА МНОЖИНИ СИНГУЛЯРНО НЕПЕРЕРВНИХ МІР*

On the space of similarly structured measures, we construct a nontrivial measure **m** such that a subclass of all purely singularly continuous measures is a set of the full **m**-measure.

На пространстве структурно-подобных мер построена нетривиальная мера **m** такая, что подкласс всех чисто сингулярно непрерывных мер является множеством полной **m**-меры.

1. Вступ. У 1981 році румунський математик Замфіреску [1] показав, що переважна більшість монотонних функцій мають сингулярно неперервну похідну. Еврістично це означає, що звичайні функції (прості та абсолютно неперервні), які відповідають точковим та абсолютно неперервним мірам, складають екзотично малу підмножину першої категорії Бера.

Аналогічний результат отримано в роботі Саймона [2] (див. також [3, 4]), де показано, що в певному сенсі практично всі лінійні оператори у гільбертовому просторі мають сингулярно неперервний спектр і лише деякі — точковий або абсолютно неперервний: "Operators with singular continuous spectrum are generic in the Baire sense".

У зв'язку із застосуваннями поняття спектральної міри в теорії збурень з фрактальним потенціалом [5] та в теорії конфліктів [6, 7], виникла потреба охарактеризувати точніше „вагу" множини сингулярно неперервних мір, які зустрічаються в цих теоріях.

У цій статті на просторі структурно-подібних мір $\mathcal{M}^{ss}$ побудовано нетривіальну ймовірнісну „глобальну" міру $\mathbf{m}$, для якої підклас сингулярно неперервних мір $\mathcal{M}^{ss}_{sc}$ є множиною повної міри: $\mathbf{m}(\mathcal{M}^{ss}_{sc}) = 1$. Водночас, підкласи чисто точкових та абсолютно неперервних мір мають нульову $\mathbf{m}$-міру. Зазначимо, що простір $\mathcal{M}^{ss}$ є досить широким і включає в себе всі самоподібні міри, введені Хатчінсоном [8]. Зауважимо, що траєкторії динамічних систем конфлікту, як правило, належать простору $\mathcal{M}^{ss}$ (див. [9, 10]). З іншого боку, якщо структурно-подібні міри трактувати як спектральні міри певних самоспряжених операторів, то встановлений факт змістовно доповнює згадані твердження про потужність множини сингулярно неперервних функцій та операторів з сингулярно неперервним спектром.

Варто зазначити, що, незважаючи на потужний розвиток фрактальної геометрії [11], наявність глибоких досліджень по спектральних асимптотиках диференціальних операторів з сингулярними потенціалами, зокрема фрактальними [5], виникнення мультифрактальної теорії сингулярних розподілів з багаторівневим аналізом та градацією [12], дослідженнями явного вигляду граничних станів динамічних систем конфлікту [13 – 15], послідовної теорії сингулярно неперервних спектрів та мір ще не створено.

2. Структурно-подібні міри. Введемо простір імовірнісних структурно-подібних мір на відрізку $[0,1] \equiv \Delta_0$ (див. [9, 10]), який позначаємо через $\mathcal{M}^{ss}([0,1]) \equiv \mathcal{M}^{ss}$.

Розглянемо сім'ю $T = \{T_{ik}\}_{i=1}^{n}$, $k = 1, 2, \ldots$, $2 \le n < \infty$, стискуючих подібностей у $\mathbb{R}^1$. Припустимо, що для всіх k виконуються умови

$$0 < c \le c_{ik} < 1,$$

де c_{ik} — коефіцієнт стиску перетворення T_{ik};

* Частково підтримано проектом DFG 436 UKR 113/78.

$$\Delta_0 = \bigcup_{i=1}^{n} T_{ik}\Delta_0;$$

$$\lambda\big(T_{ik}\Delta_0 \cap T_{i'k}\Delta_0\big) = 0, \quad i \neq i',$$

λ позначає міру Лебега. Нехай

$$U_{i_1\ldots i_k, i'_1\ldots i'_k} := T_{i_1 1}\ldots T_{i_k k}(T_{i'_1 1}\ldots T_{i'_k k})^{-1}, \qquad 1 \leq i_k, \quad i'_k \leq n.$$

Множину $S \subset \Delta_0$ називаємо структурно-подібною, якщо для деякої фіксованої сім'ї стискуючих подібностей T з наведеними вище властивостями ця множина допускає нескінченну послідовність подрібнень (розкладів) на подібні між собою підмножини:

$$S = \bigcup_{i_1=1}^{n} s_{i_1}, \qquad s_{i_1} = \bigcup_{i_2=1}^{n} s_{i_1 i_2}, \ \ldots, \qquad s_{i_1\ldots i_{k-1}} = \bigcup_{i_k=1}^{n} s_{i_1 i_2\ldots i_k}, \ \ldots, \tag{1}$$

де для кожного фіксованого рангу $k = 1, 2, \ldots$ непорожні підмножини $s_{i_1 i_2\ldots i_k} \subset$ $\subset T_{i_1 1}\ldots T_{i_1 k}\Delta_0$ пов'язані між собою:

$$s_{i_1 i_2\ldots i_k} = U_{i_1\ldots i_k, i'_1\ldots i'_k}\, s_{i'_1\ldots i'_k}. \tag{2}$$

При цьому припускаємо, що

$$\operatorname{diam}(s_{i_1 i_2\ldots i_k}) \leq \varepsilon_k \to 0, \quad k \to \infty,$$

та

$$\lambda\Big(s^{\mathrm{cl}}_{i_1\ldots i_k} \cap s^{\mathrm{cl}}_{i'_1\ldots i'_k}\Big) = 0,$$

якщо $i_l \neq i'_l$ хоча б для одного $1 \leq l \leq k$, де cl позначає замикання множини.

Таким чином, для структурно-подібної множини S, що допускає зображення (1), усі підмножини фіксованого рангу $s_{i_1 i_2\ldots i_k}$ подібні між собою. Подібність між собою підмножин різного рангу не вимагається, тобто множини

$$S, \ s_{i_1}, \ s_{i_1 i_2}, \ldots, \ s_{i_1\ldots i_k}, \ldots$$

взагалі не є подібними. Тому поняття структурно-подібної множини є загальнішим, ніж поняття самоподібної множини (див. [8]).

Імовірнісну міру μ на відрізку $[0,1]$ називаємо структурно-подібною, якщо геометричний носій цієї міри $S_\mu := \operatorname{supp}\mu$ є структурно-подібною множиною і виконуються наступні умови: для непорожніх підмножин із розкладу (1) відношення

$$\frac{\mu(s_{i_1\ldots i_{k-1} i_k})}{\mu(s_{i_1\ldots i_{k-1}})} =: p_{i_k k} > 0, \quad s_{i_0} \equiv \Delta_0, \tag{3}$$

не залежать від індексів $i_1 \ldots i_{k-1}$ та

$$\mu(s_{i_1\ldots i_{k-1} i_k} \cap s_{i'_1\ldots i'_k}) = 0, \tag{4}$$

якщо $i_l \neq i'_l$ хоча б для одного $l = 1, \ldots, k$.

Покажемо, що міри $\mu \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ можна будувати методом Q-зображення дійсних чисел (див. [16]). З цією метою розглянемо нескінченну вправо прямокутну матрицю

$$Q = \{\mathbf{q}_k\}_{k=1}^{\infty} = \{q_k\}_{i=1,k=1}^{n,\infty}, \quad n > 1,$$

де вектори $\mathbf{q}_k$, які утворюють стовпчики матриці Q, є стохастичними:

$$\mathbf{q}_k = (q_{1k}, \ldots, q_{nk}) \in \mathbb{R}^n_+, \qquad q_{1k} + \ldots + q_{nk} = 1.$$

Нехай виконано умови

$$q_{ik} > 0, \qquad \inf_{i,k} \{q_{ik}\} > 0. \tag{5}$$

Q-зображення точок $x \in \Delta_0 \equiv [0,1]$ задається послідовністю ітерацій. На першому кроці Δ_0 розкладається на впорядковану сім'ю, що містить n замкнених відрізків рангу 1:

$$\Delta_0 \equiv [0,1] = \bigcup_{i_1=1}^{n} \Delta_{i_1}, \qquad \lambda(\Delta_{i_1}) = q_{i_1 1}.$$

На другому кроці кожен відрізок Δ_{i_1} розкладається в об'єднанння впорядкованих відрізків рангу 2:

$$\Delta_{i_1} = \bigcup_{i_2=1}^{n} \Delta_{i_1 i_2}, \qquad \lambda(\Delta_{i_1 i_2}) = q_{i_1 1} q_{i_2 2}$$

так, що всі відношення

$$\frac{\lambda(\Delta_{i_1 i_2})}{\lambda(\Delta_{i_1})} = q_{i_2 2}$$

є незалежними від номера відрізка першого рангу. Аналогічно, на k-му кроці

$$\Delta_{i_1 \ldots i_{k-1}} = \bigcup_{i_k=1}^{n} \Delta_{i_1 \ldots i_k}, \qquad \lambda(\Delta_{i_1 \ldots i_k}) = q_{i_1 1} \ldots q_{i_k k}, \tag{6}$$

$$\frac{\lambda(\Delta_{i_1 \ldots i_k})}{\lambda(\Delta_{i_1 \ldots i_{k-1}})} = q_{i_k k}.$$

В результаті виникає злічення послідовність покриттів:

$$\Delta_0 = \bigcup_{i_1=1}^{n} \Delta_{i_1} = \bigcup_{i_1 i_2=1}^{n} \Delta_{i_1 i_2} \ldots \bigcup_{i_1 \ldots i_k=1}^{n} \Delta_{i_1 \ldots i_k} = \ldots .$$

Очевидно, що на підставі (5) та (6) лінійні розміри відрізків $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$ прямують до нуля при зростанні k:

$$\lambda\left(\Delta_{i_1 \ldots i_k}\right) \to 0, \quad k \to \infty.$$

Тому кожна фіксована послідовність вкладених відрізків $\Delta_{i_1} \supset \Delta_{i_1 i_2} \supset \ldots$ $\ldots \supset \Delta_{i_1 \ldots i_k} \supset \ldots$ в перетині містить лише одну точку:

$$\Delta_0 \Pi x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{i_1 \ldots i_k}.$$

Цей факт природно записуємо у вигляді

$$x = \Delta_{i_1 \ldots i_k \ldots}, \tag{7}$$

де індекси i_k називають координатами точки x, а сам запис (7) — Q-зображенням точки x.

Неважко бачити, що співвідношення

$$\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k} = T_{i_1 1} \ldots T_{i_k k} \Delta_0 \tag{8}$$

встановлюють взаємно однозначну відповідність між множиною всіх Q-зображень на Δ_0 та сім'ями введених вище стискаючих подібностей T.

Зрозуміло також, що клас структурно-подібних мір $\mathcal{M}^{ss}$ включає в себе всі ймовірнісні самоподібні міри на відрізку $[0,1] = \Delta_0$.

При фіксованому Q-зображенні для побудови міри $\mu \in \mathcal{M}^{ss}$ необхідно додатково задати ще одну стохастичну матрицю

$$P = \{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{\infty} = \{p_{ik}\}_{i,k=1}^{n,\infty}, \quad 1 \geq p_{ik} \geq 0,$$

стовпчики якої складаються з координат стохастичних векторів $\mathbf{p}_k \in \mathbb{R}_+^n$.

За матрицями Q та P вводимо послідовність кусково-рівномірно розподілених мір μ_k на Δ_0, визначених таким чином:

$$\mu_k := \sum_{i_1 \ldots i_k = 1}^{n} c_{i_1 \ldots i_k} \lambda_{i_1 \ldots i_k}, \tag{9}$$

де коефіцієнти

$$c_{i_1 \ldots i_k} := \frac{p_{i_1 1} \cdots p_{i_k k}}{q_{i_1 1} \cdots q_{i_k k}},$$

а $\lambda_{i_1 \ldots i_k} := \lambda | \Delta_{i_1 \ldots i_k}$ позначає звуження міри Лебега. На підставі (6) $\lambda(\Delta_{i_1 \ldots i_k}) = q_{i_1 1} \ldots q_{i_k k}$. Тому з (9) випливає, що графік функції розподілу $f_k(x) = \mu_k((-\infty, x))$ є кусково-лінійною ламаною лінією. За побудовою очевидною є справедливість співвідношень

$$\sum_{i_1 \ldots i_k = 1}^{n} \mu_k(\Delta_{i_1 \ldots i_k}) = 1,$$

$$\mu_k(\Delta_{i_1 \ldots i_k}) = \sum_{i_{k+1} = 1}^{n} \mu_{k+1}(\Delta_{i_1 \ldots i_k i_{k+1}}),$$

$$\mu_{k+1}(\Delta_{i_1 \ldots i_k i_{k+1}}) = \mu_k(\Delta_{i_1 \ldots i_k}) p_{i_{k+1} k+1}.$$

З цього випливає, що для послідовності мір (9) існує границя, $\mu = \lim_{k \to \infty} \mu_k$, у сенсі рівномірної збіжності. Пишемо $\mu = \mu_P$, щоб підкреслити залежність збудованої міри μ від матриці P.

Варто зазначити, що на циліндричних множинах $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$ значення мір μ_P, μ_k взагалі є різними:

$$\mu(\Delta_{i_1 \ldots i_k}) \neq \mu_k(\Delta_{i_1 \ldots i_k}) = p_{i_1 1} \ldots p_{i_k k}. \tag{10}$$

Очевидно також, що при $P = Q$ міра μ_P є мірою Лебега на Δ_0.

Переконаємося, що міра μ_P є структурно-подібною. З цією метою побудуємо підмножини

$$s_{i_1 \ldots i_k} := S_\mu \cap \Delta^{\#}_{i_1 \ldots i_k},$$

де # означає, що відрізок $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$ залишається замкненим, лише якщо

$$\prod_{s=0}^{\infty} p_{1,k+s} = \prod_{s=0}^{\infty} p_{n,k+s} = 0.$$

Використання $\Delta^{\#}_{i_1 \ldots i_k}$ замість $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$ обумовлено нерівністю (10) і є необхідним для забезпечення умов (3), (4). За побудовою

$$\mu(s_{i_1 \ldots i_k}) = \mu(\Delta^{\#}_{i_1 \ldots i_k}) = \mu_k(\Delta_{i_1 \ldots i_k}) = p_{i_1} \ldots p_{i_k}. \tag{11}$$

Зрозуміло, що на підставі (8) для кожної пари підмножин $s_{i_1\ldots i_k}$, $s_{i'_1\ldots i'_k}$ фіксованого рангу $k \geq 1$ існує перетворення подібності, яке їх поєднує:

$$s_{i'_1\ldots i'_k} = T_{i'_1\ldots i'_k, i_1\ldots i_k}\, s_{i_1\ldots i_k}.$$

Тепер, враховуючи (11), неважко бачити, що $\mu_P \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$.

Далі матрицю Q вважаємо фіксованою і розглядаємо увесь клас $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ структурно-подібних мір $\mu = \mu_P$, асоційованих із стохастичними матрицями P. Для таких мір пишемо

$$\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}},\ \mathcal{M}_{\mathrm{ac}},\ \mathcal{M}_{\mathrm{sc}},$$

якщо μ є чисто точковою ($\mu = \mu_{\mathrm{pp}}$), чисто абсолютно неперервною ($\mu = \mu_{\mathrm{ac}}$) або чисто сингулярно неперервною ($\mu = \mu_{\mathrm{sc}}$) відповідно. Відомо (див. [6, 7, 9, 10]), що для мір $\mu \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ є справедливим аналог теореми Джессена – Вінтнера про чистоту спектрального типу. В термінах матриць P цей аналог можна сформулювати таким чином.

Теорема 1. *Кожна міра* $\mu = \mu_P \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ *має чистий спектральний тип*:

$$\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}} \iff P_{\max}(\mu) := \prod_{k=1}^{\infty} p_{\max,k} > 0, \qquad p_{\max,k} := \max_i \{p_{ik}\}, \tag{12}$$

$$\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ac}} \iff \rho(\mu,\lambda) := \prod_{k=1}^{\infty} \rho_k > 0, \qquad \rho_k := \sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_{ik}q_{ik}}, \tag{13}$$

$$\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{sc}} \iff P_{\max}(\mu) = 0 = \rho(\mu,\lambda). \tag{14}$$

3. Побудова міри m. У цьому пункті вводиться і досліджується ймовірнісна міра $\mathbf{m}$ на просторі структурно-подібних мір $\mu = \mu_P \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}} \equiv \mathcal{M}$ при фіксованому Q-зображенні. Доводиться, що клас сингулярно неперервних мір $\mathcal{M}_{\mathrm{sc}}$ є множиною повної $\mathbf{m}$-міри.

Міра $\mathbf{m}$ будується на σ-алгебрі, яка позначається через $\mathcal{J}^{\mathrm{ss}}$. Ця алгебра породжена сім'єю циліндричних підмножин $\{I_{i_1\ldots i_k}^{\beta_{i_1}\ldots\beta_{i_k}}\}$, які визначаються таким чином.

На першому кроці ($k = 1$) покладаємо

$$\mathcal{M} = \bigcup_{i_1=1}^{n} I_{i_1}, \qquad I_{i_1} := \bigcup_{\beta_{i_1} \in \mathcal{B}} I_{i_1}^{\beta_{i_1}},$$

де β_{i_1} позначає звичайну борелеву множину з відрізка $[1/n, 1]$, а

$$I_{i_1}^{\beta_{i_1}} := \left\{ \mu \in \mathcal{M} \mid \mu(\Delta_{i_1}) \in \beta_{i_1},\ \mu(\Delta_{i_1}) = \max_{j_1=1,\ldots,n} \{\mu(\Delta_{j_1})\} \right\}.$$

У термінах матриць P (нагадаємо, що $\mu = \mu_P$)

$$I_{i_1}^{\beta_{i_1}} := \left\{ \mu_P \in \mathcal{M} \mid p_{i_1 1} = p_{\max,1} \in \beta_{i_1} \right\},$$

$$p_{\max,1} := \max_{j=1,\ldots,n} \{p_{j1}\}.$$

Зазначимо, що

$$1/n \leq \max_{j_1=1,\ldots,n} \{\mu(\Delta_{j_1})\} \leq 1,$$

оскільки μ — ймовірнісна міра. Отже, борелівська σ-алгебра $\mathcal{B}$ складається лише з підмножин, розташованих на відрізку $[1/n, 1]$.

На другому кроці $(k = 2)$ розкладаємо кожну підмножину I_{i_1}:

$$I_{i_1} = \bigcup_{i_2=1}^{n} I_{i_1 i_2}, \qquad I_{i_1 i_2} := \bigcup_{\beta_{i_1}, \beta_{i_2} \in \mathcal{B}} I_{i_1 i_2}^{\beta_{i_1} \beta_{i_2}},$$

де

$$I_{i_1 i_2}^{\beta_{i_1} \beta_{i_2}} := \left\{ \mu \in I_{i_1}^{\beta_{i_1}} \;\middle|\; \frac{\mu(\Delta_{i_1 i_2})}{\mu(\Delta_{i_1})} \in \beta_{i_2},\ \mu(\Delta_{i_1 i_2}) = \max_{j_2 = 1, \ldots, n} \{\mu(\Delta_{i_1 j_2})\} \right\}.$$

Іншими словами,

$$I_{i_1 i_2}^{\beta_{i_1} \beta_{i_2}} := \left\{ \mu_P \in I_{i_1}^{\beta_{i_1}} \;\middle|\; p_{i_2 2} = p_{\max,2} \in \beta_{i_2} \right\}.$$

Отже,

$$I_{i_1 i_2} = \bigcup_{\beta_{i_2} \in \mathcal{B}} I_{i_1 i_2}^{\beta_{i_2}},$$

де

$$I_{i_1 i_2}^{\beta_{i_2}} := \left\{ \mu \in I_{i_1} \;\middle|\; \frac{\mu(\Delta_{i_1 i_2})}{\mu(\Delta_{i_1})} \in \beta_{i_2},\ \mu(\Delta_{i_1 i_2}) = \max_{j_2 = 1, \ldots, n} \{\mu(\Delta_{i_1 j_2})\} \right\}.$$

На k-му $(k = 1, 2, \ldots)$ кроці визначаємо

$$I_{i_1 \ldots i_k}^{\beta_{i_1} \ldots \beta_{i_k}} := \left\{ \mu \in I_{i_1 \ldots i_{k-1}}^{\beta_{i_1} \ldots \beta_{i_{k-1}}} \;\middle|\; \frac{\mu(\Delta_{i_1 \ldots i_k})}{\mu(\Delta_{i_1 \ldots i_{k-1}})} \in \beta_{i_k},\ \mu(\Delta_{i_1 \ldots i_k}) = \max_{j_k = 1, \ldots, n} \{\mu(\Delta_{i_1 \ldots i_{k-1} j_k})\} \right\}$$

з $\mu(\Delta_{i_0}) \equiv \mu(\Delta_0) = 1$. Зокрема, для довільних чисел $b_{i_1}, \ldots, b_{i_k} \in [1/n, 1]$ маємо

$$I_{i_1 \ldots i_k}^{b_{i_1} \ldots b_{i_k}} := \left\{ \mu \in I_{i_1 \ldots i_{k-1}}^{b_{i_1} \ldots b_{i_{k-1}}} \;\middle|\; \frac{\mu(\Delta_{i_1 \ldots i_k})}{\mu(\Delta_{i_1 \ldots i_{k-1}})} = b_{i_k} = \max_{j_k = 1, \ldots, n} \{\mu(\Delta_{i_1 \ldots i_{k-1} j_k})\} \right\}.$$

Хоча може статися, що множина $I_{i_1 \ldots i_k}^{b_{i_1} \ldots b_{i_k}}$ є порожньою, наприклад, якщо $b_{i_k} > b_{i_{k-1}}$ або $b_{i_k} < b_{i_{k-1}}/n$.

Отже, за проведеною побудовою

$$\mathcal{M} = \bigcup_{i_1=1}^{n} I_{i_1} = \bigcup_{i_1 i_2 = 1}^{n} I_{i_1 i_2} = \ldots = \bigcup_{i_1 \ldots i_k = 1}^{n} I_{i_1 \ldots i_k} = \ldots,$$

де множини $I_{i_1 \ldots i_k}$ допускають визначення в термінах матриць P:

$$I_{i_1 \ldots i_k} = \bigcup_{\beta_{i_1} \ldots \beta_{i_k} \in \mathcal{B}} I_{i_1 \ldots i_k}^{\beta_{i_1} \ldots \beta_{i_k}} = \left\{ \mu_P \in \mathcal{M} \mid p_{i_l l} = p_{\max,l} \in \beta_{i_l},\ 1 \le l \le k \right\}.$$

Сім'я циліндричних підмножин

$$\left\{ I_{i_1 \ldots i_k}^{\beta_{i_1} \ldots \beta_{i_k}},\ \beta_{i_k} \in \mathcal{B},\ i_k = 1, \ldots, n,\ k = 1, 2, \ldots \right\}$$

генерує (згідно зі стандартною процедурою (див., наприклад, [17])) деяке кільце $\mathcal{R}$.

Вводимо на кільці $\mathcal{R}$ міру $\mathbf{m}$ таким чином. Спочатку покладаємо

$$\mathbf{m}\left(I_{i_1}^{\beta_{i_1}}\right) := q_{i_1 1} \lambda'(\beta_{i_1}), \qquad \lambda'(\beta_{i_1}) := c_n \lambda(\beta_{i_1}), \quad c_n = \frac{n}{n-1},$$

де враховано, що $\lambda([1/n, 1]) = \dfrac{n-1}{n}$. Тому $\mathbf{m}(I_{i_1}) = q_{i_1 1}$ і

$$\sum_{i_1=1}^{n} \mathbf{m}(I_{i_1}) = \mathbf{m}\left(\bigcup_{i_1=1}^{n}\left(\bigcup_{\beta_{i_1}\in\mathcal{B}} I_{i_1}^{\beta_{i_1}}\right)\right) = 1.$$

Далі покладаємо

$$\mathbf{m}\left(I_{i_1 i_2}^{\beta_{i_1}\beta_{i_2}}\right) := q_{i_1 1} q_{i_2 2}\,\lambda'(\beta_{i_1})\lambda'(\beta_{i_2}).$$

Звичайно, $\mathbf{m}(I_{i_1 i_2}) = q_{i_1 1} q_{i_2 2}$ та

$$\sum_{i_1 i_2=1}^{n} \mathbf{m}(I_{i_1 i_2}) = \mathbf{m}\left(\bigcup_{i_1 i_2=1}^{n}\left(\bigcup_{\beta_{i_1},\beta_{i_2}\in\mathcal{B}} I_{i_1 i_2}^{\beta_{i_1}\beta_{i_2}}\right)\right) = 1.$$

Для довільного k визначаємо

$$\mathbf{m}\left(I_{i_1\ldots i_k}^{\beta_{i_1}\ldots\beta_{i_k}}\right) := q_{i_1 1}\ldots q_{i_k k}\prod_{l=1}^{k}\lambda'(\beta_{i_l})$$

і легко перевіряємо, що

$$\sum_{i_1\ldots i_k=1}^{n} \mathbf{m}(I_{i_1\ldots i_k}) = \mathbf{m}\left(\bigcup_{i_1\ldots i_k=1}^{n}\left(\bigcup_{\beta_{i_1}\ldots\beta_{i_k}\in\mathcal{B}} I_{i_1\ldots i_k}^{\beta_{i_1}\ldots\beta_{i_k}}\right)\right) = 1,$$

оскільки $\sum_{i_1\ldots i_k=1}^{n} q_{i_1}\ldots q_{i_k} = 1$ та $\lambda'([1/n,1]) = 1$. З циліндричних множин міру $\mathbf{m}$ розширюємо на кільце $\mathcal{R}$, а потім до зовнішньої міри $\mathbf{m}^*$, визначеної на усіх підмножинах з $\mathcal{M}$. При цьому використовується той факт, що

$$\mathbf{m}\left(I_{i_1\ldots i_k}^{\beta_{i_1}\ldots\beta_{i_k}} \cap I_{i'_1\ldots i'_k}^{\beta_{i'_1}\ldots\beta_{i'_k}}\right) := \prod_{l=1}^{k}\delta_{i_l i'_l} q_{i_l l}\,\lambda'\left(\beta_{i_l}\cap\beta_{i'_l}\right),$$

де враховано, що наступна множина не є порожньою,

$$I_{i_1\ldots i_k}^{\beta_{i_1}\ldots\beta_{i_k}} \cap I_{i'_1\ldots i'_k}^{\beta_{i'_1}\ldots\beta_{i'_k}} \neq \varnothing,$$

лише якщо для всіх $l = 1,\ldots,k$ $i_l = i'_l$ та $\beta_{i_l}\cap\beta_{i'_l} \neq \varnothing$. Це забезпечує σ-адитивність міри $\mathbf{m}$.

Сім'я циліндричних підмножин

$$\left\{I_{i_1\ldots i_k}^{\beta_{i_1}\ldots\beta_{i_k}},\ k = 1,2,\ldots,\ \beta_{i_k}\in\mathcal{B}\right\}$$

після застосування стандартної процедури стає σ-алгеброю, яку ми позначаємо через $\mathcal{J}^{\text{ss}}$. Отже, $\mathcal{J}^{\text{ss}}$ є мінімальною σ-алгеброю $\mathbf{m}^*$-вимірних (за Каратеодорі) підмножин, породжених кільцем $\mathcal{R}$. Після звуження зовнішньої міри $\mathbf{m}^*$ на σ-алгебру $\mathcal{J}^{\text{ss}}$ одержуємо ймовірнісну міру, яку знову позначаємо через $\mathbf{m}$. Таким чином, $\mathbf{m}$ є σ-адитивною мірою на алгебрі $\mathcal{J}^{\text{ss}}$.

Основним результатом статті є наступна теорема.

Теорема 2. *Підмножина структурно-подібних сингулярно неперервних мір є множиною повної* $\mathbf{m}$*-міри*:

$$\mathbf{m}(\mathcal{M}_{\text{sc}}^{\text{ss}}) = 1.$$

Доведення випливає з теореми 6.1 з [17] та рівності $\mathbf{m}^*(\mathcal{M}_{\text{pp}}^{\text{ss}}) = \mathbf{m}^*(\mathcal{M}_{\text{ac}}^{\text{ss}}) = 0$ з наступної леми. Зокрема, з (15) випливає вимірність множин чисто точкових та абсолютно неперервних мір, $\mathcal{M}_{\text{pp}}^{\text{ss}}$, $\mathcal{M}_{\text{ac}}^{\text{ss}} \in \mathcal{J}^{\text{ss}}$. Тому, враховуючи (14), робимо висновок, що $\mathcal{M}_{\rm sc}^{\rm ss} \in \mathcal{J}^{\rm ss}$, як доповнення до $\mathcal{M}_{\rm pp}^{\rm ss} \cup \mathcal{M}_{\rm ac}^{\rm ss}$ у множині $\mathcal{M}^{\rm ss}$. Отже, $\mathbf{m}^*(\mathcal{M}_{\rm sc}^{\rm ss}) = \mathbf{m}(\mathcal{M}_{\rm sc}^{\rm ss}) = 1$.

Лема. *Зовнішня міра* $\mathbf{m}^*$ *множин* $\mathcal{M}_{\rm pp}^{\rm ss}$, $\mathcal{M}_{\rm ac}^{\rm ss}$ *дорівнює нулю*:

$$\mathbf{m}^*(\mathcal{M}_{\rm pp}^{\rm ss}) = \mathbf{m}^*(\mathcal{M}_{\rm ac}^{\rm ss}) = 0. \tag{15}$$

Доведення. Зафіксуємо деяку послідовність $\varepsilon_k \to 0$, $k \to \infty$, наприклад, покладемо $\varepsilon_k = 1/k$. Введемо послідовність підмножин

$$\mathcal{T}_k := \bigcup_{i_1 \ldots i_k = 1}^{n} I_{i_1 \ldots i_k}^{\beta_{i_1} \ldots \beta_{i_k}}, \qquad \beta_{i_1} = [a_1, 1], \ldots, \ \beta_{i_k} = [a_k, 1],$$

де числа a_k вибрано так, щоб $\lambda'(\beta_{i_k}) = \varepsilon_k$. Позначимо

$$\mathcal{T}_{{\rm pp},k} := \left\{ \mu \in \mathcal{M}_{\rm pp}^{\rm ss} \middle| \ \mu \in \mathcal{T}_k \right\} = \mathcal{T}_k \cap \mathcal{M}_{\rm pp}^{\rm ss}.$$

Зрозуміло, що

$$\mathbf{m}^*(\mathcal{T}_{{\rm pp},k}) \le \mathbf{m}(\mathcal{T}_k) \le \sum_{i_1 \ldots i_k = 1}^{n} \mathbf{m}\left(I_{i_1 \ldots i_k}^{\beta_{i_1} \ldots \beta_{i_k}} \right) =$$

$$= \sum_{i_1 \ldots i_k = 1}^{n} q_{i_1 1} \ldots q_{i_k k} \prod_{l=1}^{k} \lambda'(\beta_{i_l}) \le \sum_{i_1 \ldots i_k = 1}^{n} q_{i_1 1} \ldots q_{i_k k} \lambda'(\beta_{i_k}) = \varepsilon_k,$$

оскільки $\sum_{i_1 \ldots i_k = 1}^{n} q_{i_1 1} \ldots q_{i_k k} = 1$.

Неважко показати, що для кожної міри $\mu \in \mathcal{M}_{\rm pp}^{\rm ss}$ існує номер $k_0 = k_0(\mu)$ такий, що $\mu \in \mathcal{T}_k$ для всіх $k \ge k_0$. Це випливає з того, що для довільної фіксованої міри $\mu = \mu_P \in \mathcal{M}_{\rm pp}^{\rm ss}$ на підставі співвідношення (12) виконується умова $\prod_k p_{\max,k} > 0$. У свою чергу з цього випливає, що $p_{\max,k} > 1 - 1/k = 1 - \varepsilon_k$ для всіх $k \ge k_0$ починаючи з деякого $k_0 = k_0(\mu)$. Тому $\mu_P \in \mathcal{T}_k$, $k \ge k_0$. Отже, кожна міра $\mu \in \mathcal{M}_{\rm pp}^{\rm ss}$ належить усім множинам $\mathcal{T}_{{\rm pp},k}$ починаючи з деякого k, залежного від μ. Отже,

$$\delta_k := \mathbf{m}\left(\mathcal{T}_{{\rm pp},k} \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} \mathcal{T}_{{\rm pp},l} \right) \to 0, \quad k \to \infty. \tag{16}$$

Позначимо $\mathcal{T}'_{{\rm pp},k} := \bigcup_{l=1}^{k} \mathcal{T}_{{\rm pp},l}$. Зрозуміло, що $\mathcal{T}'_{{\rm pp},k} \subset \mathcal{T}'_{{\rm pp},k+1}$, а також $\mathcal{M}_{\rm pp}^{\rm ss} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{T}'_{{\rm pp},k}$. Тому згідно з (16) завдяки σ-адитивності зовнішньої міри $\mathbf{m}^*(\mathcal{M}_{\rm pp}^{\rm ss}) = 0$. Дійсно, за теоремою про неперервність міри для об'єднань підмножин (див. [17], теорема 6.2) маємо

$$\mathbf{m}^*(\mathcal{M}_{\rm pp}^{\rm ss}) = \lim_{k \to \infty} \mathbf{m}^*\left(\bigcup_{l=1}^{k} \mathcal{T}'_{{\rm pp},l} \right) = \lim_{k \to \infty} \mathbf{m}^*(\mathcal{T}_{{\rm pp},k}) \le \lim_{k \to \infty} \mathbf{m}(\mathcal{T}_k) = \lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0.$$

Аналогічним чином можемо довести, що $\mathbf{m}(\mathcal{M}_{\rm ac}^{\rm ss}) = 0$.

З цією метою введемо іншу послідовність підмножин

$$\mathcal{T}_k := \left\{ \mu \in \mathcal{M}^{\rm ss} \ \middle| \ \mu \in I_{i_1 \ldots i_k}^{\beta_{i_1} \ldots \beta_{i_k}}, \ b_{i_l} = [q_{i_l l} - \varepsilon_l/2, \ q_{i_l l} + \varepsilon_l/2], \ l = 1, \ldots, k \right\}$$

і позначимо

$$\mathcal{T}_{\mathrm{ac},k} := \left\{\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}^{\mathrm{ss}} \middle| \mu \in \mathcal{T}_k\right\} = \mathcal{T}_k \cap \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}^{\mathrm{ss}}.$$

Зокрема, у випадку, коли всі $q_{i_k k} = 1/n$, можна покласти $\beta_{i_k} = [1/n, 1/n + \varepsilon_k]$.

Неважко зрозуміти, що для кожної міри $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}^{\mathrm{ss}}$ існує номер $k_0 = k_0(\mu)$ такий, що $\mu \in \mathcal{T}_{\mathrm{ac},k}$ для всіх $k \geq k_0$. Це випливає із співвідношення (13). Тому

$$\delta_k := \mathbf{m}\left(\mathcal{T}_{\mathrm{ac},k} \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} \mathcal{T}_{\mathrm{ac},l}\right) \to 0, \quad k \to \infty.$$

Позначимо $\mathcal{T}'_{\mathrm{ac},k} := \bigcup_{l=1}^{k} \mathcal{T}_{\mathrm{ac},l}$. Зрозуміло, що $\mathcal{T}'_{\mathrm{ac},k} \subset \mathcal{T}'_{\mathrm{ac},k+1}$, а також $\mathcal{M}_{\mathrm{ac}}^{\mathrm{ss}} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{T}'_{\mathrm{ac},k}$. Таким чином, можна стверджувати, що $\mathbf{m}^*(\mathcal{M}_{\mathrm{ac}}^{\mathrm{ss}}) = 0$ внаслідок σ-адитивності зовнішньої міри. Дійсно,

$$\mathbf{m}^*(\mathcal{M}_{\mathrm{ac}}^{\mathrm{ss}}) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{m}^*\left(\bigcup_{l=1}^{k} \mathcal{T}'_{\mathrm{ac},l}\right) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{m}^*(\mathcal{T}_{\mathrm{ac},k}) \leq \lim_{k\to\infty} \mathbf{m}(\mathcal{T}_k) = \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0,$$

де використано співвідношення

$$\mathbf{m}^*(\mathcal{T}_{\mathrm{ac},k}) \leq \mathbf{m}(\mathcal{T}_k) = \sum_{i_1 \ldots i_k = 1}^{n} q_{i_1 1} \ldots q_{i_k k} \lambda'(\beta_{i_k}) = \varepsilon_k.$$

Отже, лему, а разом з нею і теорему 2 доведено.

1. *Zamfirescu T.* Most monotone functions are singular // Amer. Math. Mon. – 1981. – **88**. – P. 47 – 79.
2. *Simon B.* Operators with singular continuous spectrum: I. Genaral operators // Ann. Math. – 1995. – **141**. – P. 131 – 145.
3. *del Rio R., Jitomirskaya S., Makarov N., Simon B.* Operators with singular continuous spectrum are generic // Bull. Amer. Math. Soc. – 1994. – **31**. – P. 208 – 212.
4. *Jitomirskaya S., Simon B.* Operators with singular continuous spectrum: III. Almost periodic Schrodinger operators // J. Communs Math. Phys. – 1994. – **165**, № 1. – P. 201 – 205.
5. *Triebel H.* Fractals and spectra related to Fourier analysis and functional spaces. – Basel etc.: Birkhäuser, 1997.
6. *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Spectral properties of image measures under infinite conflict interactions // Positivity. – 2006. – **10**. – P. 39 – 49.
7. *Koshmanenko V., Kharchenko N.* Spectral properties of image measures after conflict interactions // Theory Stochast. Process. – 2004. – **10**, № 3 – 4. – P. 73 – 81.
8. *Hutchinson J. E.* Fractals and selfsimilarity // Indiana Univ. Math. J. – 1981. – **30**. – P. 713 – 747.
9. *Кошманенко В. Д.* Відновлення спектрального типу граничних розподілів у динамічних системах конфлікту // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 6. – С. 771 – 784.
10. *Karataieva T., Koshmanenko V.* Origination of the singular continuous spectrum in the conflict dynamical systems // Meth. Func. Anal. and Top. – 2009. – **14**, № 1. – P. 16 – 29.
11. *Falconer K. J.* Fractal geometry. – Chichester: Wiley, 1990.
12. *Торбін Г. М.* Мультифрактальний аналіз сингулярно неперервних імовірнісних мір // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 5. – С. 706 – 721.
13. *Koshmanenko V.* On the conflict theorem for a pair of stochastic vectors // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, № 4. – P. 555 – 560.
14. *Koshmanenko V.* The theorem of conflict for probability measures // Math. Meth. Oper. Res. – 2004. – **59**, № 2. – P. 303 – 313.
15. *Albeverio S., Bodnarchuk M., Koshmanenko V.* Dynamics of discrete conflict interactions between non-annihilating opponent // Meth. Func. Anal. and Top. – 2005. – **11**, № 4. – P. 309 – 319.
16. *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* $\tilde{Q}$-representation of real numbers and fractal probability distributions. – Bonn, 2002. – (Preprint / Bonn Univ., No. 12) arcXiv:math., PR/03 08 007 v1, 2003.
17. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Вища шк., 1990. – 600 с.

Одержано 29.01.08