УДК 517.5

Е. А. Севостьянов (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

УСТРАНЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ И АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ СОХОЦКОГО – ВЕЙЕРШТРАССА ДЛЯ Q-ОТОБРАЖЕНИЙ

It is proved that an open discrete Q-mapping $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ is removable at the isolated boundary point provided that the function $Q(x)$ has a finite mean oscillation or logarithmic singularities of order at most $n-1$ at this point. Moreover, the extended mapping is open, discrete, and is a Q-mapping. As corollaries, an analog of the well-known Sokhotskii – Weierstrass theorem on Q-mappings are obtained. In particular, it is proved that the open discrete Q-mapping takes any value infinitely many times in the neighborhood of the essential singular point except for, possibly, some set of capacity zero.

Доведено, що відкрите дискретне Q-відображення $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ має неперервне продовження в ізольовану межову точку, якщо функція $Q(x)$ має скінченне середнє коливання, або логарифмічні сингулярності порядку не вище, ніж $n-1$ у цій точці. Більш того, продовжене відображення також є відкритим, дискретним і Q-відображенням. Як наслідок, отримано аналог добре відомої теореми Сохоцького – Вейєрштрасса щодо Q-відображень. Зокрема, доведено, що в околі суттєвої особливої точки відкрите дискретне Q-відображення набуває будь-якого значення нескінченно багато разів, крім, можливо, деякої множини, що має ємність нуль.

1. Введение. Как известно, в основу определения квазиконформных отображений, заданных в области D из $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, положено неравенство

$$M(f\Gamma) \leq KM(\Gamma) \tag{1}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D, где M — модуль семейства кривых (внешняя мера, определенная на семействах кривых в $\mathbb{R}^n$), а $K \geq 1$ — некоторая постоянная. Другими словами, модуль любого семейства кривых искажается не более, чем в K раз. На языке емкостей соотношение (1) означает, что отображение f искажает емкость любого конденсатора в D не более, чем в K раз. Предположим теперь, что в основе определения рассматриваемого класса отображений, вместо соотношения (1) лежит неравенство вида

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_D Q(x)\rho^n(x)\,dm(x), \tag{2}$$

где $m(x)$ — n-мерная мера Лебега, ρ — произвольная неотрицательная борелевская функция, такая, что произвольная кривая γ семейства Γ имеет длину, не меньшую 1 в метрике ρ, а $Q\colon D \to [1,\infty]$ — фиксированная вещественнозначная функция. В случае, когда $Q(x) \leq K$ почти всюду, снова приходим к неравенству (1). В общем случае, последнее неравенство означает, что искажение модуля исходного семейства Γ происходит с некоторым весом $Q(x)$ (см. [1])

$$M(f\Gamma) \leq M_{Q(x)}(\Gamma).$$

В данной статье рассматривается задача нахождения условий на функцию $Q(x)$, входящую в определение отображения f (см. соотношение (2)), при которых f продолжается по непрерывности в изолированную граничную точку. Отображение f предполагается здесь только открытым и дискретным; для гомеоморфизмов аналогичные теоремы были получены в [2]. Техника исследования отображений с ветвлением во многом отличается от исследования гомеоморфизмов. Как мы увидим позднее, из полученных теорем вытекают довольно интересные следствия, в частности теорема Сохоцкого – Вейерштрасса. Точные определения и понятия будут даны ниже.

Теория Q-*гомеоморфизмов* — гомеоморфизмов, для которых выполнено (2), а также близких к ним классов, развивалась в основном для случая, когда мажоранта принадлежала известному пространству *BMO* (функций ограниченного среднего колебания по Джону – Ниренбергу [3]) (см., например, [4]). Возможность непрерывного продолжения в изолированную граничную точку для квазирегулярных отображений была показана в работах О. Мартио, С. Рикмана и Ю. Вяйсяля (см., например, [5, 6]).

2. Предварительные сведения. Приведем основные определения и обозначения, используемые в дальнейшем. Всюду далее D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется *дискретным,* если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым,* если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. Везде далее запись $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f непрерывно в области задания. Запись $G \Subset D$ означает, что $\overline{G}$ — компактное подмножество области D. Говорят, что отображение f сохраняет ориентацию (антисохраняет), если топологический индекс $\mu(y, f, G) > 0$ $(\mu(y, f, G) < 0)$ для произвольной области $G \Subset D$ и произвольного $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$. В дальнейшем

$$B(x_0, r) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\right\}, \qquad B(r) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\right\},$$

$$\mathbb{B}^n = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\right\},$$

$m(x)$ — n-мерная мера Лебега. Приведенные выше понятия естественным образом распространяются на отображения $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, где область $D \subset \mathbb{R}^n$ и $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$ — одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$.

Напомним, что борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если $\int_\gamma \rho(x)|dx| \geq 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. В этом случае пишем $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int_D \rho^n(x)\, dm(x).$$

Пусть $Q\colon D \to [1, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Отображение $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ называется Q-*отображением,* если

$$M(f\Gamma) \leq \int_D Q(x) \rho^n(x)\, dm(x)$$

для любого семейства Γ кривых γ в D и для каждой допустимой функции $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$. Данное определение незначительно отличается от введенного в разделе 1 в [4] (см. также [7], где модульное неравенство изучалось для специального класса отображений). Упомянутое выше отличие, впрочем, никак не сказывается на приложениях к другим известным классам отображений (см. последний пункт).

Следуя [6] (раздел 10, гл. II), *конденсатором* в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называем пару $E = (A, C)$, где A — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а C — компактное подмножество A. *Емкостью* конденсатора E называется следующая величина:

$$\operatorname{cap} E = \operatorname{cap}(A, C) = \inf_{u \in W_0(E)} \int_A |\nabla u|^n\, dm(x), \tag{3}$$

где $W_0(E) = W_0(A, C)$ — семейство неотрицательных непрерывных функций $u\colon A \to \mathbb{R}$ с компактным носителем в A таких, что $u(x) \geq 1$ при $x \in C$ и $u \in$

$\in ACL$. В формуле (3), как обычно, $|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^{n}(\partial_i u)^2\right)^{1/2}$. Напомним, что отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется *абсолютно непрерывным на линиях* (пишут $f \in ACL$), если в любом n-мерном параллелепипеде P с ребрами, параллельными осям координат, и таком, что $\overline{P} \subset D$, все координатные функции $f = (f_1, \ldots, f_n)$ абсолютно непрерывны на почти всех прямых, параллельных осям координат. Более подробно о применении модулей (емкостей) в теории отображений см., например, в [8], а также [9]. Некоторые полезные сведения о модулях, емкостях, а также различных характеристиках конденсаторов и связях между ними содержатся в [10]. Мы не будем здесь останавливаться на указанных связях более детально.

В дальнейшем в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$ используется *сферическая* (*хордальная*) *метрика* $h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, где π — стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(e_{n+1}/2, 1/2)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}, \qquad h(x, y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\,\sqrt{1+|y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y.$$

Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — открытое дискретное отображение, $\beta\colon [a, b) \to \mathbb{R}^n$ — некоторая кривая и $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Кривая $\alpha\colon [a, c) \to D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x, если: 1) $\alpha(a) = x$; 2) $f \circ \alpha = \beta|_{[a,c)}$; 3) если $c < c' \leq b$, то не существует кривой $\alpha'\colon [a, c') \to D$ такой, что $\alpha = \alpha'|_{[a,c)}$ и $f \circ \alpha' = \beta|_{[a,c')}$. Пусть f — открытое дискретное отображение и $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Тогда кривая β имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x (см. следствие 3.3, гл. II в [6]).

Лемма 1. *Пусть $E = (A, C)$ — произвольный конденсатор в $\mathbb{R}^n$ и Γ_E — семейство всех кривых вида*

$$\gamma\colon [a, b) \to A, \qquad \gamma(a) \in C \quad \text{и} \quad |\gamma| \bigcap (A \setminus F) \neq \varnothing$$

для произвольного компакта $F \subset A$. Тогда $\operatorname{cap} E = M(\Gamma_E)$ (*см. предложение* 10.2, *гл.* II *в* [6]).

***Замечание* 1.** Понятие конденсатора и емкости конденсатора в $\mathbb{R}^n$ можно перенести в $\overline{\mathbb{R}^n}$ (см. раздел 2.1 в [5]). Лемма 1 остается справедливой для конденсаторов в $\overline{\mathbb{R}^n}$ (см. замечание 10.8(1), гл. II в [6]).

Говорят, что компакт C в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, имеет *нулевую емкость* (пишут $\operatorname{cap} C = 0$), если существует ограниченное открытое множество A с $C \subset A$ такое, что $\operatorname{cap}(A, C) = 0$. Известно, что (см. лемму 3.4, гл. II в [11]) в последнем случае и для любого другого ограниченного открытого множества A в $\mathbb{R}^n$, содержащего C, будет выполнено $\operatorname{cap}(A, C) = 0$. В противном случае полагаем $\operatorname{cap}(A, C) > 0$. Легко видеть, что произвольное одноточечное множество $C = \{a\}$ имеет емкость нуль. Аналогично тому, как последнее определение введено в $\mathbb{R}^n$, можно определить понятие множества емкости нуль в $\overline{\mathbb{R}^n}$ (см., например, раздел 2.12 в [5]).

Лемма 2. *Пусть E — компактное собственное подмножество $\overline{\mathbb{R}^n}$ такое, что* $\operatorname{cap} E > 0$. *Тогда для каждого $a > 0$ существует положительное число $\delta > 0$ такое, что* $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus E, C\right) \geq \delta$ *для произвольного континуума $C \subset$*

$\subset \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$, *удовлетворяющего условию* $h(C) \geq a$ (*см. лемму* 3.11 *в* [5] *или лемму* 2.6 *гл.* III *в* [6]).

***Замечание* 2.** Если компакт F в $\mathbb{R}^n$, $F \subset D$, имеет емкость нуль, то при каждом $\alpha > 0$ α-мерная хаусдорфова мера $\Lambda_\alpha(F)$ множества F равна нулю (см. лемму 2.13 в [5]). Следовательно, $\operatorname{mes} F = 0$, $\operatorname{Int} F = \varnothing$ и $D \setminus F$ является областью по теореме Менгера – Урысона (см., например, теорему IV.4 в [12]).

3. Основная лемма о продолжении.

Лемма 3. *Пусть* $f: \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, — *открытое дискретное* Q-*отображение, такое, что* $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})\right) > 0$. *Предположим, что существует* $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < 1$ *такое, что при* $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \psi^n(|x|) dm(x) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)), \tag{4}$$

где $\psi(t)$ — *неотрицательная на* $(0, \infty)$ *функция такая, что* $\psi(t) > 0$ *для почти всех* t *и*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon') = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \psi(t) dt < \infty$$

для всех (*фиксированных*) ε' *из* $(0, \varepsilon_0]$ *и* $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$. *Тогда* f *имеет непрерывное продолжение* $\underline{f}: \mathbb{B}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *в* $\mathbb{B}^n$. *Непрерывность понимается в смысле пространства* $\overline{\mathbb{R}^n}$ *относительно хордальной метрики* h.

Доказательство. Предположим противное, а именно, что отображение f не может быть продолжено по непрерывности в точку $x_0 = 0$. Тогда найдутся две последовательности x_j и x_j', принадлежащие $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, такие, что $x_j \to 0$, $x_j' \to 0$ и $h(f(x_j), f(x_j')) \geq a > 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что x_j и x_j' лежат внутри шара $B(\varepsilon_0)$. Положим $r_j = \max\{|x_j|, |x_j'|\}$. Соединим точки x_j и x_j' замкнутой кривой, лежащей в $\overline{B(r_j)} \setminus \{0\}$. Обозначим эту кривую через C_j и рассмотрим конденсатор $E_j = (\mathbb{B}^n \setminus \{0\}, C_j)$. В силу открытости и непрерывности отображения f fE_j также является конденсатором. Рассмотрим семейства кривых Γ_{E_j} и Γ_{fE_j} (см. обозначения леммы 1). Пусть Γ_j^* — семейство максимальных поднятий Γ_{fE_j} при отображении f с началом в C_j, лежащих в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Покажем, что $\Gamma_j^* \subset \Gamma_{E_j}$.

Предположим противное. Тогда существует кривая $\beta: [a, b) \to \mathbb{R}^n$ семейства Γ_{fE_j}, для которой соответствующее максимальное поднятие $\alpha: [a, c) \to$ $\to \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ лежит со своим замыканием $\overline{\alpha}$ в некотором компакте внутри $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Следовательно, $\overline{\alpha}$ — компакт в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Заметим, во-первых, что $c \neq$ $\neq b$, поскольку в противном случае $\overline{\beta}$ — компакт в fA, что противоречит условию $\beta \in \Gamma_{fE_j}$. Рассмотрим множество $G = \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon x = \lim_{k\to\infty} \alpha(t_k)\right\}$, где $t_k \in [a, c)$ такие, что $\lim_{k\to\infty} t_k = c : \lim_{k\to\infty} \alpha(t_k) = x$. Заметим, что, переходя к подпоследовательностям, здесь можно ограничиться монотонными последовательностями t_k. Для $x \in G$, в силу непрерывности f в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, будем иметь $f(\alpha(t_k)) \to f(x)$ при $k \to \infty$, где $t_k \in [a, c)$, $t_k \to c$ при $k \to \infty$.

Однако $f(\alpha(t_k)) = \beta(t_k) \to \beta(c)$ при $k \to \infty$. Отсюда заключаем, что f постоянна на G в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. С другой стороны, по условию Кантора в компакте $\overline{\alpha}$ (см. [13, с. 8, 9])

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha([t_k, c))} = \limsup_{k\to\infty} \alpha([t_k, c)) = \liminf_{k\to\infty} \alpha([t_k, c)) \neq \varnothing$$

в силу монотонности последовательности связных множеств $\alpha([t_k, c))$ и, таким образом, G является связным по I (9.12) в [14]. Таким образом, в силу дискретности f G не может состоять более, чем из одной точки, и кривая $\alpha: [a, c) \to \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ продолжается до замкнутой кривой $\alpha: [a, c] \to \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Тогда имеем $f(\alpha(c)) = \beta(c)$, т. е. $\alpha(c) \in f^{-1}(\beta(c))$. С другой стороны, можно построить (см. следствие 3.3, гл. II в [6]) максимальное поднятие α' кривой $\beta|_{[c,b)}$ с началом в точке $\alpha(c)$. Тогда, объединяя поднятия α и α', получаем новое поднятие α'' кривой β, которое определено на $[a, c')$, что противоречит максимальности поднятия α.

Таким образом, $\Gamma_j^* \subset \Gamma_{E_j}$. Заметим, что $\Gamma_{fE_j} > f\Gamma_j^*$, и, следовательно,

$$M(\Gamma_{fE_j}) \le M(f\Gamma_j^*) \le M(f\Gamma_{E_j}). \tag{5}$$

Заметим, что семейство Γ_{E_j} разбивается на два подсемейства:

$$\Gamma_{E_j} = \Gamma_{E_{j_1}} \cup \Gamma_{E_{j_2}}, \tag{6}$$

где $\Gamma_{E_{j_1}}$ — семейство всех кривых $\alpha(t): [a, c) \to \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ с началом в C_j, таких, что найдется $t_k \in [a, c)$ с $\alpha(t_k) \to 0$ при $t_k \to c - 0$; $\Gamma_{E_{j_2}}$ — семейство всех кривых $\alpha(t): [a, c) \to \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ с началом в C_j таких, что найдется $t_k \in$ $\in [a, c)$ с $\operatorname{dist}(\alpha(t_k), \partial\mathbb{B}^n) \to 0$ при $t_k \to c - 0$.

В силу соотношений (5) и (6)

$$M(\Gamma_{fE_j}) \le M(f\Gamma_{E_{j_1}}) + M(f\Gamma_{E_{j_2}}). \tag{7}$$

Покажем, что $M(f\Gamma_{E_{j_1}}) = 0$ для любого фиксированного $j \in \mathbb{N}$. Зафиксируем целое число $j \ge 1$ и положим $l_j = \min\{|x_j|, |x_j'|\}$. Рассмотрим кольцо $A_{\varepsilon,j} =$ $= \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x| < l_j\}$. По теореме Лузина существует борелевская функция $\psi_*(t) = \psi(t)$ для почти всех t. Следовательно, функция

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} \psi_*(|x|)/I(\varepsilon, l_j), & x \in A_{\varepsilon,j}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus A_{\varepsilon,j}, \end{cases}$$

корректно определена и является борелевской. Кроме того, для любого $\gamma \in \Gamma_{E_{j_1}}$

$$\int_\gamma \rho_\varepsilon |dx| \ge \frac{1}{I(\varepsilon, l_j)} \int_\varepsilon^{l_j} \psi_*(t)\,dt = 1$$

(см. теорему 5.7 в [9]). Следовательно, $\rho_\varepsilon \in \operatorname{adm} \Gamma_{E_{j_1}}$ и, по определению Q-отображения,

$$M(f\Gamma_{E_{j_1}}) \le \mathcal{F}(\varepsilon) := \frac{1}{I(\varepsilon, l_j)^n} \int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} Q(x)\psi_*^n(|x|)\,dm(x). \tag{8}$$

Покажем, что $\mathcal{F}(\varepsilon) \to 0$. Учитывая (4), получаем соотношение

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\psi_*^n(|x|)\,dm(x) = G(\varepsilon)\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_*(t)\,dt\right)^n,$$

где $G(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Заметим, что

$$\mathcal{F}(\varepsilon) = G(\varepsilon)\left(1+\frac{\int_{l_j}^{\varepsilon_0} \psi_*(t)\,dt}{\int_{\varepsilon}^{l_j} \psi_*(t)\,dt}\right)^n.$$

Здесь $\int_{l_j}^{\varepsilon_0} \psi_*(t)\,dt < \infty$ — фиксированное число, а $\int_{\varepsilon}^{l_j} \psi_*(t)\,dt \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, поскольку величина интеграла слева в (4) увеличивается при уменьшении ε. Таким образом, $\mathcal{F}(\varepsilon) \to 0$. Отметим, что левая часть неравенства (8) не зависит от ε, а j фиксировано. Отсюда получаем $M(f\Gamma_{E_{j_1}}) = 0$. Аналогично схеме, приведенной выше, рассмотрим кольцо $A_j = \left\{x \in \mathbb{R}^n\colon r_j < |x| < \varepsilon_0\right\}$. По теореме Лузина существует борелевская функция $\psi_*(t) = \psi(t)$ для почти всех t. Тогда функция

$$\rho_j(x) = \begin{cases} \psi_*(|x|)/I(r_j, \varepsilon_0), & x \in A_j, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus A_j, \end{cases}$$

также является борелевской и

$$\int\limits_{\gamma} \rho_j\,|dx| \ge \frac{1}{I(r_j, \varepsilon_0)} \int\limits_{r_j}^{\varepsilon_0} \psi_*(t)\,dt = 1$$

для произвольной кривой $\gamma \in \Gamma_{E_{j_2}}$. Таким образом, по определению Q-отображения согласно условиям (4) и (7)

$$M(f\Gamma_{E_j}) \le \mathcal{S}(r_j) := \frac{1}{I(r_j, \varepsilon_0)^n} \int\limits_{r_j<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\psi_*^n(|x|)\,dm(x),$$

где $\mathcal{S}(r_j) \to 0$ при $j \to \infty$. Окончательно, по лемме 1 и в силу соотношения (5) $\operatorname{cap} fE_j \to 0$ при $j \to \infty$. С другой стороны, по лемме 2 $\operatorname{cap} fE_j \ge \delta > 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Полученное противоречие опровергает предположение, что f не имеет предела при $x \to 0$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Теорема 1. *Пусть* $x_0 \in D$, $f\colon D\setminus\{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *— открытое дискретное* Q-*отображение такое, что* $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D\setminus\{x_0\})\right) > 0$. *Если*

$$q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right) \tag{9}$$

при $r \to 0$, *где* $q_{x_0}(r)$ *— среднее интегральное значение* $Q(x)$ *над сферой* $|x - x_0| = r$, *то* f *имеет непрерывное продолжение* $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$. *В частности, если при некотором* $\varepsilon(x_0)$ $Q(x) \le \left[\log\frac{1}{|x-x_0|}\right]^{n-1}$ $\forall x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$, *то выполнено* (9) *и, значит, справедливо заключение теоремы.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$ и $\mathbb{B}^n \subset D$. Фиксируем $\varepsilon_0 < 1$. Положим $\psi(t) = \dfrac{1}{t\log t^{-1}}$. Заметим, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)\,dm(x)}{\left(|x|\log|x|^{-1}\right)^n} = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \left(\int\limits_{|x|=r} \frac{Q(x)\,dm(x)}{\left(|x|\log|x|^{-1}\right)^n} dS \right) dr \le$$

$$\le C\omega_{n-1} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r\log r^{-1}} = C\omega_{n-1} \log\frac{\log\varepsilon^{-1}}{\log(\varepsilon_0)^{-1}} = C\omega_{n-1} I(\varepsilon,\varepsilon_0),$$

где $I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt$ и C — некоторая постоянная. Нужное заключение следует теперь непосредственно из леммы 3.

4. Конечное среднее колебание. Говорят, что функция $\varphi : D \to R$ с $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ имеет *ограниченное среднее колебание* в области D, $\varphi \in BMO$, если

$$\|\varphi\|_* = \sup_{B\subset D} \frac{1}{|B|} \int\limits_B |\varphi(x) - \varphi_B|\,dm(x) < \infty,$$

где точная верхняя грань берется по всем шарам $B \subset D$ и $\varphi_B = |B|^{-1} \times \times \int_B \varphi(x)\,dm(x)$ — среднее значение функции φ на шаре B (см. [3]). С целью упрощения записи мы обозначаем в дальнейшем

$$\fint\limits_A f(x)\,dm(x) := \frac{1}{|A|} \int\limits_A f(x)\,dm(x),$$

где, как обычно, $|A|$ обозначает лебегову меру множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Известно, что $L^\infty(D) \subset BMO(D) \subset L^p_{\mathrm{loc}}(D)$ (см., например, [3]). Следуя работе [2], введем следующие определения. Будем говорить, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$ (пишем $\varphi \in FMO$ в x_0), если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \fint\limits_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\,dm(x) < \infty, \tag{10}$$

где $\overline{\varphi}_\varepsilon = \fint_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\,dm(x)$. Заметим, что при выполнении условия (10) возможна ситуация, когда $\overline{\varphi}_\varepsilon \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Например, функция φ имеет конечное среднее колебание в точке x_0, если в точке $x_0 \in D$ выполнено $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x)|\,dm(x) < \infty$.

Теорема 2. *Пусть* $x_0 \in D$, $f : D\setminus\{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — *открытое дискретное* Q*-отображение такое, что* $\mathrm{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D\setminus\{x_0\})\right) > 0$. *Если функция* $Q(x)$ *имеет конечное среднее колебание в точке* x_0, *то* f *имеет непрерывное продолжение* $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$ и $\mathbb{B}^n \subset D$. Пусть $\varepsilon_0 < e^{-1}$. На основании следствия 2.3 в [2] для функции $0 < < \psi(t) = (t\log t^{-1})^{-1}$ имеем

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^n(|x|)\,dm(x) = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Заметим также, что

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) \ := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt \ = \ \log \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon_0)}.$$

Оставшаяся часть утверждения следует из леммы 3.

***Следствие* 1.** *В частности, если*

$$\int\limits_{|x-x_0|<\varepsilon} Q(x)\,dm(x) \ = \ O(\varepsilon^n) \tag{11}$$

при $\varepsilon \to 0$, *то* f *имеет непрерывное продолжение в* D.

5. Следствия. Аналог теоремы Сохоцкого – Вейерштрасса. Напомним, что изолированная точка x_0 границы ∂D области D в $\mathbb{R}^n$ называется *устранимой,* если существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Если $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, точку x_0 будем называть *полюсом.* Изолированная точка x_0 границы ∂D называется *существенной особой точкой* отображения $f\colon D \to \to \overline{\mathbb{R}^n}$, если не существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Теорема 3. *Пусть* x_0 *— изолированная точка границы* D, $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *— открытое дискретное* Q*-отображение, а функция* $Q(x)$ *имеет конечное среднее колебание в точке* x_0 *либо удовлетворяет хотя бы одному из условий* (9), (11). *Если* x_0 *— существенная особая точка отображения* f, *то* $\operatorname{cap}\big(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})\big) = 0$ *для любой окрестности* U *точки* x_0.

Доказательство непосредственно вытекает, соответственно, из теорем 2, 1 и следствия 1.

Теорема 4. *Пусть* x_0 *— изолированная точка границы* D, $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *— открытое дискретное* Q*-отображение, а функция* $Q(x)$ *имеет конечное среднее колебание в точке* x_0 *либо удовлетворяет хотя бы одному из условий* (9), (11). *Тогда точка* x_0 *является устранимой для отображения* f *в том и только в том случае, когда* f *ограничено в некоторой окрестности* U *точки* x_0.

Доказательство. Предположим, что точка x_0 устранима, т. е. существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A < \infty$. Тогда $|f(x)| \le |A| + 1$ в достаточно малой окрестности U точки x_0. Обратно, пусть существует окрестность U точки x_0 такая, что $|f(x)| \le M$ для некоторого $M \in (0, \infty)$ и всех $x \in U \setminus \{x_0\}$. Тогда $\operatorname{cap}\big(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})\big) > 0$, и заключение следует из теоремы 3.

Теорема 5. *Пусть* x_0 *— изолированная точка границы* D, $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *— открытое дискретное* Q*-отображение, а функция* $Q(x)$ *имеет конечное среднее колебание в точке* x_0 *либо удовлетворяет хотя бы одному из условий* (9), (11). *Если* $\operatorname{cap}\big(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})\big) > 0$ *для некоторой окрестности* U *точки* x_0, *то* f *может быть непрерывным образом продолжено до открытого дискретного* Q*-отображения* $f\colon D \cup \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$.

Доказательство. Действительно, f продолжается до непрерывного отображения $f\colon D \cup \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в силу, соответственно, теорем 2, 1 и следствия 1. Модуль семейства кривых в $\mathbb{R}^n$, проходящих через точку, равен нулю (см. 7.9 в [9]), откуда следует, что продолженное отображение $f\colon D \cup \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является Q-отображением.

Известно, что дискретные открытые отображения в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, либо сохраняют ориентацию, либо не сохраняют (см., например, раздел 4, гл. I в [6]). Пусть, для определенности, f сохраняет ориентацию. Покажем, что продолженное отображение сохраняет ориентацию, открыто и дискретно. Обозначим, как обычно, через $B_f(D)$ множество точек ветвления отображения f в области D, а через $B_f(D')$ множество точек ветвления отображения f в области $D' = D \bigcup \{x_0\}$. Если x_0 — точка локальной гомеоморфности отображения f, доказывать нечего.

Пусть точка $x_0 \in B_f(D')$. По теореме Чернавского $\dim B_f(D) = \dim f(B_f(D)) \leq \leq n - 2$ (см., например, теорему 4.6, гл. I в [6]), где $\dim$ обозначает топологическую размерность множества (см. [12]). Тогда получим

$$\dim f(B_f(D')) \leq n - 2, \tag{12}$$

так как $f(B_f(D')) = f(B_f(D)) \bigcup \{f(x_0)\}$, множество $\{f(x_0)\}$ замкнуто и топологическая размерность каждого из множеств $f(B_f(D))$ и $\{f(x_0)\}$ не превышает $n - 2$ (см. следствие 1, гл. III, раздел 3 в [12]).

Пусть G — область в D' с $G \Subset D'$ и $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$. Тогда в силу (12) существует точка $y_0 \notin f(B_f(D'))$, принадлежащая той же компоненте связности множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\partial G)$, что и y. В силу того, что топологический индекс есть величина постоянная на каждой связной компоненте множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\partial G)$ (см. § 2, гл. I в [11]), имеем

$$\mu(y, f, G) = \mu(y_0, f, G) = \sum_{x \in G \bigcap f^{-1}(y_0)} i(x, f) > 0.$$

Таким образом, отображение f сохраняет ориентацию в D'.

Наконец, для любого $y \in f(D')$, в силу дискретности отображения f в области D, множество $\{f^{-1}(y)\}$ не более чем счетно, и потому $\dim\{f^{-1}(y)\} = 0$. Следовательно [15, с. 333], отображение f открыто и дискретно, что и требовалось доказать.

Теорема 6 (аналог теоремы Сохоцкого – Вейерштрасса). *Пусть x_0 — изолированная точка границы D, $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное Q-отображение, а функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 либо удовлетворяет хотя бы одному из условий* (9), (11). *Если x_0 — существенная особая точка отображения f, то для любого $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ найдется последовательность $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$ такая, что $f(x_k) \to a$ при $k \to \infty$.*

Доказательство. Допустим, что заключение теоремы неверно для некоторого $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$. Тогда существуют окрестность U точки x_0 и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что

$$h(f(x), a) \geq \varepsilon_0 \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}$$

и по неравенству треугольника $d_0 = h(B(a, \varepsilon_0/2), f(U \setminus \{x_0\})) \geq \varepsilon_0/2$. Следовательно, $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})\right) > 0$. Отсюда по теореме 3 следует существование предела (конечного или бесконечного) отображения f в точке x_0, что противоречит первоначальному предположению о невозможности устранения.

Теорема 7. *Пусть x_0 — изолированная точка границы D, $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное Q-отображение, а функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 либо удовлетворяет хотя бы одному из условий* (9), (11). *Если x_0 — существенно особая точка отображения f, то сущест-*

вует множество $C \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ *емкости нуль типа* F_σ *в* $\overline{\mathbb{R}^n}$ *такое, что*

$$N(y, f, U \setminus \{x_0\}) = \infty \tag{13}$$

для любой окрестности U *точки* x_0 *и для всех* $y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus C$.

Доказательство. Пусть U — произвольная окрестность точки x_0. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x_0 = 0$ и $U = \mathbb{B}^n$. Рассмотрим множества $V_k = B(1/k) \setminus \{0\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Полагаем

$$C = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(V_k). \tag{14}$$

По теореме 3 каждое из множеств $B_k := \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(V_k)$ в объединении правой части соотношения (14) имеет емкость нуль. Тогда C также имеет емкость нуль (см., например, [8, с. 126]).

Осталось доказать соотношение (13). Фиксируем $y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus C$. Тогда

$$y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} f(V_k). \tag{15}$$

Из (15) вытекает существование подпоследовательности $\{x_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ такой, что $x_{k_i} \to 0$ при $i \to \infty$ и $f(x_{k_i}) = y$, $i = 1, 2, \ldots$.

Теорема 7 доказана.

6. Аналоги теоремы Пикара. Пусть D — область в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$. Будем говорить, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке ∞, если функция $\varphi^*(x) = \varphi\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$ имеет конечное среднее колебание в точке 0.

Заметим, что отображение $\psi(x) = \frac{x}{|x|^2}$ подобно отображает сферу $S(0, r)$ на сферу $S(0, 1/r)$, откуда следует $|J(x, \psi)| = (|x|^{-1})^{2n}$. Согласно изложенному, выполняя замену переменной в интеграле, мы можем переформулировать определение конечного среднего колебания в точке ∞ следующим образом.

Будем говорить, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке ∞ (пишем $\varphi \in FMO(\infty)$), если при $R \to \infty$

$$\int_{|x|>R} |\varphi(x) - \varphi_R| \frac{dm(x)}{|x|^{2n}} = O\left(\frac{1}{R^n}\right),$$

где

$$\varphi_R = \frac{R^n}{\Omega_n} \int_{|x|>R} \varphi(x) \frac{dm(x)}{|x|^{2n}},$$

а Ω_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Аналогично для бесконечности можно переформулировать условия вида (9), (11) соответственно:

$$\fint_{S(0,R)} Q(x)\,dS = O([\log R]^{n-1}), \tag{16}$$

$$\int_{|x|>R} Q(x) \frac{dm(x)}{|x|^{2n}} = O\left(\frac{1}{R^n}\right). \tag{17}$$

Таким образом, на основании теорем 2, 1 и следствия 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 8 (аналог теоремы Лиувилля). *Пусть* $f:\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *— открытое дискретное* Q*-отображение, а функция* $Q(x)$ *имеет конечное среднее колебание в* ∞ *либо удовлетворяет хотя бы одному из условий* (16), (17). *Тогда* $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(\mathbb{R}^n)\right) = 0$. *В частности,* f *не может отображать все* $\mathbb{R}^n$ *на ограниченную область.*

7. Несколько слов о приложении результатов к другим известным классам. Практически для всех известных ныне классов отображений установлены оценки вида (2). Сформулированные в статье результаты могут быть применены, например, к отображениям с конечным искажением длины (см., например, теорему 6.10 [4]). Более того, все изложенное выше справедливо для так называемых отображений с конечным искажением. Отображение $f:D\to\mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением,* если $f\in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$ и почти всюду $\|f'(x)\|^n \le K(x)\,J(x,f)$ для некоторой функции $K(x):D\to[1,\infty)$ (см., например, [16]).

Теорема 9. *Каждое открытое дискретное отображение* $f:D\to\mathbb{R}^n$ *с конечным искажением такое, что* $K(x)\in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}$ *и мера множества* B_f *точек ветвления отображения* f *равна нулю, является* Q*-отображением с* $Q = K^{n-1}(x)$ (*см., замечание* 4.10, *теорему* 6.10 *и неравенство* (4.14) *в* [4]).

Полученные результаты также можно применить к отображениям типа Q на поверхностях (см., например, [17]).

1. *Тамразов П. М.* Модули и экстремальные метрики в неориентированных и скрученных римановых многообразиях // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 10. – С. 1388 – 1398.
2. *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395 – 417.
3. *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation // Communs Pure and Appl. Math. – 1961. – **14**. – P. 415 – 426.
4. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. D. Anal. Math. – 2004. – **93**. – P. 215 – 236.
5. *Martio O., Rickman S., Vaisala J.* Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1970. – **465**. – P. 1 – 13.
6. *Rickman S.* Quasiregular mappings. Results in Mathematic and Related Areas (3), 26. – Berlin: Springer, 1993.
7. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397 – 1420.
8. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. – Новосибирск: Наука, 1983.
9. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – Berlin etc.: Springer, 1971. – **229**.
10. *Зорий Н. В.* Модульные, функциональные и потенциальные характеристики конденсаторов в области; соотношения между ними // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 5. – С. 604 – 613.
11. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982.
12. *Hurewicz W., Wallman H.* Dimension theory. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1948.
13. *Куратовский К.* Топология. – М.: Мир, 1969. – Т. 2.
14. *Whyburn G. T.* Analytic topology. – Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1942.
15. *Titus C. J., Yong G. S.* The extension of interiority, with some applications // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 329 – 340.
16. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical function theory and non-linear analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001.
17. *Миклюков В. М.* Оптимальное расстояние М. А. Лаврентьева и простые концы на непараметрических поверхностях // Укр. мат. вестн. – 2004. – **1**, № 3. – С. 349 – 372.

Получено 18.12.07,
после доработки — 21.04.08