УДК 917.956.45

С. П. Дегтярев (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О МГНОВЕННОЙ КОМПАКТИФИКАЦИИ НОСИТЕЛЯ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

We study the phenomenon of instantaneous support shrinking in a Cauchy problem for a doubly nonlinear parabolic equation with anisotropic degeneration and with strong absorption. In terms of the behavior of locally integrable initial data we formulate necessary and sufficient conditions for the phenomenon of instantaneous support shrinking to take place and, in the same terms, we establish bilateral estimates sharp with respect to order for the size of the support of the solution.

Розглянуто явище миттєвої компактифікації носія розв'язку в задачі Коші для параболічного рівняння з анізотропним виродженням, подвійною нелінійністю та сильною абсорбцією. У термінах поведінки локально інтегровних початкових даних сформульовано необхідну та достатню умову наявності миттєвої компактифікації та встановлено точні за порядком двосторонні оцінки розмірів носія розв'язку.

1. Постановка задачи и основной результат. В области $R^N \times [0,T]$ N — размерность пространства R^N, $T > 0$, рассмотрим следующую задачу Коши для неизвестной функции $u(x,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{\beta-1}u) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + |u|^{\lambda-1}u = 0, \quad (x,t) \in R^N \times (0,T), \tag{1.1}$$

$$|u|^{\beta-1}u(x,0) = |u_0|^{\beta-1}u_0(x), \quad x \in R^N, \tag{1.2}$$

где $\beta > 0$, $p_i > 0$, $i = \overline{1,N}$, $\lambda > 0$ — заданные постоянные, $|u_0|^{\beta-1}u_0(x)$ — заданная начальная локально интегрируемая функция. При этом будем рассматривать случай медленной диффузии по всем направлениям и сильной абсорбции, что выражается в следующем ограничении на параметры задачи:

$$\beta > 0, \quad p_i > 1 + \beta, \quad i = \overline{1,N}, \quad 0 < \lambda < \beta. \tag{1.3}$$

В случае изотропного уравнения, т. е. когда $p_i = p$, $i = \overline{1,N}$, известно, что при определенных условиях на начальную функцию $|u_0|^{\beta-1}u_0(x)$ задача (1.1), (1.2) разрешима в слабом смысле и наблюдается явление мгновенной компактификации носителя (см. [1 – 10]). Суть этого явления состоит в том, что носитель решения становится компактным в любой сколь угодно малый момент времени $t > 0$ и сжимается при малых t, несмотря на то, что носитель начальной функции совпадает со всем R^N. Не останавливаясь подробно на истории вопроса (см. [1 – 10]), отметим, что, в частности, в [10] в случае изотропного уравнения была получена точная по порядку двусторонняя оценка размера $D(t)$ носителя решения задачи (1.1), (1.2)

$$\psi_{Mt}^{-1}(\gamma_1 t^{\beta/(\beta-\lambda)}) \le D(t) \le (1+\varepsilon)\psi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\beta/(\beta-\lambda)}), \tag{1.4}$$

где

$$D(t) = \inf\left\{r\colon u(x,t) \equiv 0,\, |x| > r\right\},$$

ε, γ_0, γ_1, M — некоторые положительные постоянные, и для $\rho > 0$

$$\psi_t(\rho) \equiv \sup_{|x_0|=\rho} \frac{1}{|B_{t^\varkappa}(x_0)|} \int\limits_{B_{t^\varkappa}(x_0)} |u_0(x)|^\beta\, dx \equiv \sup_{|x_0|=\rho} \oint\limits_{B_{t^\varkappa}(x_0)} |u_0|^\beta\, dx,$$

причем $\varkappa = (p-1-\lambda)/p(\beta-\lambda)$, $B_{t^\varkappa}$ — шар с центром в точке x_0 радиуса $t^\varkappa$ и при немонотонной $\psi_t(\rho)$

$$\psi_t^{-1}(s) = \inf_\rho \{\rho\colon \psi_t(k) < s,\ k > \rho\}.$$

Таким образом, было, в частности, показано, что мгновенная компактификация носителя имеет место тогда и только тогда, когда $\psi_t(\rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$.

Целью данной работы является выяснение условий наличия мгновенной компактификации носителя в случае анизотропного уравнения (1.1) и получение точных по порядку двусторонних оценок размеров носителя решения задачи (1.1), (1.2). При этом, как следует, например, из результатов работы [10], равенство решения нулю в окрестности какой-либо точки пространства с течением малого времени определяется локальным поведением решения в окрестности этой точки. Поэтому следует ожидать, что оценка размеров носителя решения для анизотропного уравнения (1.1) в случае изотропного и однородного во всех направлениях поведения начальных данных на бесконечности также будет иметь изотропный характер, аналогичный (1.4), несмотря на анизотропию уравнения. В случае же различного поведения начальных данных на бесконечности в различных направлениях размер носителя решения также будет зависеть от направления (см. замечание 1.1).

Чтобы сформулировать основной результат, нам понадобятся несколько определений и обозначений. Всюду ниже

$$p = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} \right)^{-1} \tag{1.5}$$

— среднее гармоническое показателей p_i. Обозначим

$$\begin{gathered} d = p-1-\beta, \quad d_\lambda = p-1-\lambda, \quad d_i = p_i - 1 - \beta, \quad d_{i\lambda} = p_i - 1 - \lambda, \\ k = N(p-1-\beta) + \beta p = Nd + \beta p > 0. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Под слабым решением задачи (1.1), (1.2) на интервале времени $[0,T]$ мы понимаем измеримую функцию $u(x,t)$, имеющую следующие свойства:

1) для любой функции $\zeta(x) \in C_0^\infty(R^N)$ отображение

$$t \in [0,T] \to \int\limits_{R^N} |u|^{\beta-1} u(x,t)\zeta(x)dx$$

непрерывно;

2) для любой финитной по x достаточно регулярной функции $\eta(x,t)$ выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_{R^N} |u|^{\beta-1} u(x,t)\eta dx + \sum_{i=1}^N \int\limits_0^t \int\limits_{R^N} |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i}\eta_{x_i} dx d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_{R^N} |u|^{\lambda-1} u\eta dx d\tau =$$

$$= \int\limits_{R^N} |u_0|^{\beta-1} u_0(x)\eta(x,0)dx + \int\limits_0^t \int\limits_{R^N} |u|^{\beta-1} u(x,t)\eta_\tau dx d\tau. \tag{1.7}$$

Отметим, что из результатов работ [11, 12] следует, что задача (1.1), (1.2) при заданном соотношении параметров (1.3) разрешима для локально интегрируемых начальных данных, не слишком быстро растущих на бесконечности, и при определенном ограничении на разброс значений показателей p_i. Поэтому, следуя [11, 12], предполагаем выполненным следующее ограничение на разброс показателей p_i:

$$p_i < p(N+\beta)/N. \tag{1.8}$$

Начальные же данные $|u_0|^{\beta-1}u_0(x)$ предполагаем неотрицательными (а следовательно, рассматриваем неотрицательные решения $u(x,t)$) и удовлетворяющими для некоторого $r>0$ условию (ср. с [11, 12])

$$\left|\left|\left|u_0^\beta(x)\right|\right|\right| \equiv \sup_{x_0\in R^N}\sup_{\rho\geq r}\rho^{-k/d}\int\limits_{P_\rho(x_0)} u_0^\beta(x)dx < \infty, \tag{1.9}$$

где $P_\rho(x_0) = \left\{x\colon |x_i - x_{0i}| < \rho^{\alpha_i}\right\}$, $\alpha_i = pd_i/p_i d$, — параллелепипед с центром в точке x_0. Из результатов работ [11, 12] следует, что при этом условии для решения рассматриваемой задачи (1.1), (1.2) конечна такая же норма по переменной x, причем на некотором интервале времени $[0,T]$ справедлива оценка

$$\left|\left|\left|u^\beta(x,t)\right|\right|\right| \equiv \sup_{x_0\in R^N}\sup_{\rho\geq r}\rho^{-k/d}\int\limits_{P_\rho(x_0)} u^\beta(x,t)dx \leq C\left|\left|\left|u_0^\beta(x)\right|\right|\right|. \tag{1.10}$$

Здесь и всюду ниже через C, γ, b, ν обозначены все абсолютные константы либо константы, зависящие только от раз и навсегда зафиксированных параметров задачи.

Отметим, что, как можно проверить, условие (1.9) следует из необходимого условия мгновенной компактификации (1.16), поэтому на самом деле в рассматриваемом случае условие (1.9) не является ограничением.

Отметим также, что, как и в работах [11, 12], в данной работе мы используем метод локальных интегральных оценок из [13 – 15].

Введем, далее, следующие показатели, являющиеся анизотропными аналогами изотропному случаю (ср. с [10]):

$$\varkappa_i = \frac{p_i - 1 - \lambda}{p_i(\beta-\lambda)} = \frac{d_{i\lambda}}{p_i(\beta-\lambda)}, \qquad \varkappa = \frac{p-1-\lambda}{p(\beta-\lambda)} = \frac{d_\lambda}{p(\beta-\lambda)} \tag{1.11}$$

и обозначим через

$$P_{t^\varkappa} \equiv P_{t^\varkappa}(x_0) = \left\{x\colon\ |x_i - x_{0i}| \leq t^{\varkappa_i}\right\} \tag{1.12}$$

параллелепипед с центром в точке x_0 и со сторонами $2t^{\varkappa_i}$, заметив при этом, что объем этого параллелепипеда равен $|P_{t^\varkappa}| = Ct^{\varkappa_1+\ldots+\varkappa_N} = Ct^{N\varkappa}$. Пусть, далее,

$$\varphi_t(x_0) = \frac{1}{|P_{t^\varkappa}(x_0)|}\int\limits_{P_{t^\varkappa}(x_0)} u_0^\beta(x)dx \equiv \fint\limits_{P_{t^\varkappa}(x_0)} u_0^\beta(x)dx, \tag{1.13}$$

$$\varphi_t(\rho) = \sup_{|x_0|=\rho}\varphi_t(x_0), \tag{1.14}$$

$$\varphi_t^{-1}(s) = \inf_\rho\left\{\rho\colon \varphi_t(k) < s,\ k>\rho\right\}. \tag{1.15}$$

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Если начальная функция в* (1.2) *неотрицательна, то неотрицательное решение задачи* (1.1), (1.2) *имеет свойство мгновенной компактификации носителя тогда и только тогда, когда*

$$\varphi_t(\rho) \to 0, \quad \rho \to \infty, \tag{1.16}$$

при каком-либо $t > 0$ (*можно проверить, что при этом условие* (1.16) *выполнено при любом* $t > 0$). *Кроме того, для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют константы* $t_0 = t_0(\varepsilon)$, γ_0, γ_1, M, *зависящие от* $u_0(x)$, *такие, что на интервале времени* $(0, t_0]$ *справедливы следующие оценки сверху и снизу размеров носителя решения*:

$$D(t) \le (1+\varepsilon)\varphi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\beta/(\beta-\lambda)}), \tag{1.17}$$

$$D(t) \ge \varphi_{Mt}^{-1}(\gamma_1 t^{\beta/(\beta-\lambda)}). \tag{1.18}$$

***Замечание* 1.1.** Оценки размеров носителя (1.17), (1.18), несмотря на анизотропию уравнения (1.1), имеют изотропный характер, что обусловлено определением функции $\varphi_t(\rho)$, которое не учитывает возможное анизотропное поведение начальных данных. Непосредственно из доказательства теоремы 1.1 следует, что если определить для $\rho > 0$, $\omega \in S^{n-1} = \{x \colon |x| = 1\}$ функцию

$$\varphi_t(\rho, \omega) = \varphi_t(x_0), \qquad \rho = |x_0|, \qquad \omega = \frac{x_0}{|x_0|},$$

$$\varphi_t^{-1}(s, \omega) = \inf_{\rho} \bigl\{\rho \colon \varphi_t(k, \omega) < s,\ k > \rho\bigr\},$$

и функцию

$$D(t, \omega) = \inf \bigl\{\rho \colon u(r\omega, t) \equiv 0,\ r \ge \rho\bigr\},$$

то справедлива оценка

$$\varphi_{Mt}^{-1}(\gamma_1 t^{\beta/(\beta-\lambda)}, \omega) \le D(t, \omega) \le C\varphi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\beta/(\beta-\lambda)}, \omega), \tag{1.19}$$

т. е. размер носителя решения может быть различен в различных направлениях в зависимости от поведения начальной функции.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1.1 (где, как отмечено выше, мы будем использовать метод локальных интегральных оценок из [13 – 15]), заметим, что при получении нужных нам интегральных соотношений будем умножать уравнение (1.1) на различные тестирующие функции с последующим интегрированием. Эти операции оправдываются выбором в интегральном тождестве (1.7) в качестве тестирующих функций срезок от стекловских усреднений решения, выполнением нужных промежуточных операций и последующим предельным переходом по параметру усреднения в окончательном соотношении. Этот процесс стандартен (см., например, монографию [16]), и поэтому мы не останавливаемся на этом подробно (см. также работу [11], где описанные промежуточные вычисления для анизотропного уравнения приведены подробно).

Отметим также, что ниже мы используем анизотропное неравенство Ниренберга – Гальярдо вида

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \le C\left(\prod_{i=1}^{N} \|u_{x_i}\|_{L_{p_i}(\Omega)}^{1/N}\right)^{\alpha} \|u\|_{L_\varepsilon(\Omega)}^{1-\alpha} \le$$

$$\leq C\left(\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}|u_{x_i}|^{p_i}\,dx\right)^{\alpha/p}\|u\|_{L_\varepsilon(\Omega)}^{1-\alpha}, \tag{1.20}$$

где $\Omega\subset R^N$ — область с достаточно гладкой границей, константа C не зависит от размеров Ω, $0<\varepsilon<q$, $\alpha\in(0,1)$, p — среднее гармоническое показателей $p_i\geq 1$, причем величина α определяется из условия

$$\frac{1}{q}=\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{N}\right)+(1-\alpha)\frac{1}{\varepsilon}, \tag{1.21}$$

и при $p<N$ должно быть выполнено $q<Np/(N-p)$. Неравенство (1.20) следует, например, из более общих оценок работы [17].

2. Условие на локальную энергию, при котором решение локально равно нулю. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть* $x_0=(x_{01},x_{02},\ldots,x_{0N})\in R^N$, $t>0$, $R\in(1,2)$, $\sigma\in\in(1/8,7/8)$, $\rho_{2i}=Rt^{\varkappa_i}$, $\rho_{1i}=(1-\sigma)\rho_{2i}$, $\Delta\rho_i=\rho_{2i}-\rho_{1i}$, $i=\overline{1,N}$, $P_m=P_m(x_0)==\big\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_N)\in R^N:|x_i-x_{0i}|\leq\rho_{mi},\ i=\overline{1,N}\big\}$, $m=1,2$. *Тогда существует такая достаточно малая константа* $\gamma_2=\gamma_2(R,\sigma)$, *что если*

$$Y\left(\frac{t}{2},P_2\right)\equiv\sup_{t/2<\tau<t}\int\limits_{P_2}u^{1+\beta}(x,\tau)dx+\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_{P_2}|u_{x_i}|^{p_i}dxd\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{P_2}u^{1+\lambda}dxd\tau\leq\gamma_2t^{\frac{Nd_\lambda+p(1+\beta)}{p(\beta-\lambda)}},$$

то $u(x,t)\equiv 0$ *на множестве* $P_1(x_0)\times[3t/4,t]$. (*Локальной энергией мы называем левую часть последнего неравенства.*)

Доказательство. Пусть для $n=0,1,\ldots$ $R_{ni}=\rho_{1i}+(\rho_{2i}-\rho_{1i})2^{-n}$, $\overline{R_{ni}}==(R_{ni}+R_{(n+1)i})/2$, $t_n=3t/4-t2^{-n}/4$, $\overline{t_n}=(t_n+t_{n+1})/2$, $P_n=\big\{x\colon|x_i--x_{0i}|\leq R_{ni},\ i=\overline{1,N}\big\}$ — сужающиеся концентрические параллелепипеды с центром в точке x_0, $\overline{P_n}=\big\{x\colon|x_i-x_{0i}|\leq\overline{R_{ni}},\ i=\overline{1,N}\big\}$, $Q_n=P_n\times[t_n,t]$, $\overline{Q_n}=\overline{P_n}\times[\overline{t_n},t]$. Пусть, далее, $\zeta_n(x,t)\in C_0^\infty(R^N\times[0,T])$ — срезающие функции цилиндров Q_n такие, что $\zeta_n\equiv 1$ на Q_{n+1}, $\zeta_n\geq 1/2$ на $\overline{Q_n}$, $\zeta_n\equiv 0$ вне Q_n, $|\zeta_{nx_i}|\leq C2^n(\rho_{2i}-\rho_{1i})=C2^n\Delta\rho_i$, $\zeta_{nt}\leq C2^nt^{-1}$. Заметим, что такие гладкие срезающие функции можно построить, например, в виде произведения $\zeta_n(x,t)==\zeta_n^1(x_1)\zeta_n^2(x_2)\ldots\zeta_n^N(x_N)\zeta_n^0(t)$. Пусть еще ξ_n — такие гладкие срезающие функции цилиндров $\overline{Q_n}$, что $\xi_n\equiv 1$ на Q_{n+1}, $\xi_n\equiv 0$ вне $\overline{Q_n}$, $|\xi_{nx_i}|\leq C2^n\Delta\rho_i$, $|\xi_{nt}|\leq\leq C2^nt^{-1}$.

Умножим обе части уравнения (1.1) (обозначая в этом уравнении переменную t через τ) на $u(x,\tau)\xi_n^s(x,\tau)$, $s>\max p_i$, и проинтегрируем по частям по $\overline{Q_n}$. В результате получим

$$\frac{1}{1+\beta}\int\limits_{\overline{P_n}}u^{1+\beta}(x,t)\xi_n^sdx+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\overline{t_n}}^{t}\int\limits_{\overline{P_n}}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i}\xi_n^sdxd\tau+\int\limits_{\overline{t_n}}^{t}\int\limits_{\overline{P_n}}u^{1+\lambda}\xi_n^sdxd\tau=$$

$$= \frac{s}{1+\beta}\int\limits_{t_n}^{t}\int\limits_{P_n} u^{1+\beta}\xi_n^{s-1}\xi_{n\tau}dxd\tau - s\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{t_n}^{t}\int\limits_{P_n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}u\xi_n^{s-1}\xi_{nx_i}dxd\tau \equiv$$

$$\equiv I_0 + \sum_{i=1}^{N} I_i.$$

Оценим каждый интеграл I_i, $i = \overline{1,N}$, в правой части последнего равенства по неравенству Юнга с $\varepsilon = 1/2$ следующим образом:

$$|I_i| \le \frac{1}{2}\int\limits_{t_n}^{t}\int\limits_{P_n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i}\xi_n^{s}dxd\tau + C\int\limits_{t_n}^{t}\int\limits_{P_n} u^{p_i}\xi_n^{s-p_i}\left|\xi_{nx_i}\right|^{p_i}dxd\tau. \tag{2.1}$$

Используя эту оценку в предыдущем равенстве, учитывая свойства функции $\xi_n(x,\tau)$, в частности оценки ее производных, а также произвольность t, получаем

$$\sup_{t_{n+1}\le\tau\le t}\int\limits_{P_{n+1}} u^{1+\beta}(x,\tau)dx + \sum_{i=1}^{N}\iint\limits_{Q_{n+1}}|u_{x_i}|^{p_i}dxd\tau + \iint\limits_{Q_{n+1}} u^{1+\lambda}dxd\tau \le$$

$$\le Cb^n\left(t^{-1}\iint\limits_{Q_n} u^{1+\beta}dxd\tau + \sum_{i=1}^{N}(\Delta\rho_i)^{-p_i}\iint\limits_{Q_n} u^{p_i}dxd\tau\right), \tag{2.2}$$

где $b = 2^{\max p_i}$. Определим функции $v_n(x,\tau) = \zeta_n(x,\tau)u(x,\tau)$, заметив при этом, что в силу свойств функции $\zeta_n(x,\tau)$

$$\iint\limits_{Q_{n+1}}\left|v_{(n+1)x_i}\right|^{p_i}dxd\tau \le C\iint\limits_{Q_{n+1}}|u_{x_i}|^{p_i}dxd\tau + C2^{np_i}(\Delta\rho_i)^{-p_i}\iint\limits_{\overline{Q_n}} u^{p_i}dxd\tau.$$

Следовательно, учитывая, что $\zeta_n \ge 1/2$ на $\overline{Q_n}$, и вводя величины Y_n, из последних двух соотношений находим

$$Y_{n+1} \equiv \sup_{t_{n+1}\le\tau\le t}\int\limits_{P_{n+1}} v_{(n+1)}^{1+\beta}(x,\tau)dx +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\iint\limits_{Q_{n+1}}\left|v_{(n+1)x_i}\right|^{p_i}dxd\tau + \iint\limits_{Q_{n+1}} v_{(n+1)}^{1+\lambda}dxd\tau \le$$

$$\le Cb^n\left(t^{-1}\iint\limits_{Q_n} v_n^{1+\beta}dxd\tau + \sum_{i=1}^{N}(\Delta\rho_i)^{-p_i}\iint\limits_{Q_n} v_n^{p_i}dxd\tau\right) \equiv$$

$$\equiv Cb^n\left(I_1 + \sum_{i=1}^{N} I_{2i}\right). \tag{2.3}$$

Рассмотрим сначала величину I_1 в правой части последнего неравенства. Оценим I_1 следующим образом:

$$I_1 \leq t^{-1} \left(\sup_{t_n \leq \tau \leq t} \int\limits_{P_n} v_n^{1+\beta}(x,\tau)dx \right)^{1-\alpha} \int\limits_{t_n}^{t} \left(\int\limits_{P_n} v_n^{1+\beta}(x,\tau)dx \right)^{\alpha} d\tau, \tag{2.4}$$

где $\alpha \in (0,1)$ будет выбрано ниже. Применяя ко второму интегралу по P_n в формуле (2.4) неравенство Ниренберга – Гальярдо (1.20), имеем

$$\left(\int\limits_{P_n} v_n^{1+\beta}(x,\tau)dx \right)^{\alpha} \leq$$

$$\leq C \left(\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{P_n} |v_{nx_i}|^{p_i}\, dx \right)^{\alpha\omega_0 \frac{1+\beta}{p}} \left(\int\limits_{P_n} v_n^{1+\lambda}(x,\tau)dx \right)^{\alpha(1-\omega_0)\frac{1+\beta}{1+\lambda}}, \tag{2.5}$$

где ω_0 определяется из равенства

$$\frac{1}{1+\beta} = \omega_0 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{N} \right) + (1-\omega_0)\frac{1}{1+\lambda}.$$

Выберем α из условия, что сумма степеней интегралов в правой части (2.5) равна 1, т. е.

$$\alpha\omega_0 \frac{1+\beta}{p} + \alpha(1-\omega_0)\frac{1+\beta}{1+\lambda} = 1.$$

Непосредственный подсчет показывает, что

$$\alpha = \frac{Nd_\lambda + p(1+\lambda)}{Nd_\lambda + p(1+\beta)}, \qquad 1-\alpha = \frac{p(\beta-\lambda)}{Nd_\lambda + p(1+\beta)}.$$

Поскольку сумма степеней интегралов в правой части (2.5) равна единице, интегрируя неравенство (2.5) по времени и применяя неравенство Юнга, получаем

$$\int\limits_{t_n}^{t} \left(\int\limits_{P_n} v_n^{1+\beta}(x,\tau)dx \right)^{\alpha} d\tau \leq C \left(\sum_{i=1}^{N} \iint\limits_{Q_n} |v_{nx_i}|^{p_i}\, dxd\tau + \iint\limits_{Q_n} v_n^{1+\lambda}(x,\tau)dxd\tau \right).$$

Из этого неравенства и оценки (2.4) находим

$$I_1 \leq Ct^{-1} Y_n^{1+(1-\alpha)} = Ct^{-1} Y_n^{1+\frac{p(\beta-\lambda)}{Nd_\lambda + p(1+\beta)}}. \tag{2.6}$$

Рассмотрим теперь величины I_{2i} в (2.3). Для оценки I_{2i} применим к интегралу по dx по P_n неравенство Ниренберга – Гальярдо вида

$$\int\limits_{P_n} v_n^{p_i} dx \leq C \left(\sum_{j=1}^{N} \int\limits_{P_n} \left|v_{nx_j}\right|^{p_j} dx \right)^{\omega_1 \frac{p_i}{p}} \left(\int\limits_{P_n} v_n^{1+\beta} dx \right)^{\omega_2 \frac{p_i}{1+\beta}} \left(\int\limits_{P_n} v_n^{1+\lambda} dx \right)^{\omega_3 \frac{p_i}{1+\lambda}}, \tag{2.7}$$

являющееся следствием неравенства (1.20), где числа $\omega_m \in (0,1)$, $m = 1,2,3$, определяются неоднозначно и удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1, \\ \frac{1}{p_i} = \omega_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{N} \right) + \omega_2 \frac{1}{1+\beta} + \omega_3 \frac{1}{1+\lambda}. \end{gathered} \tag{2.8}$$

(Числа ω_m зависят, конечно, от p_i и, тем самым, от i, но мы не будем, там, где это не вызывает двусмысленности, отражать эту зависимость, чтобы не загромождать обозначения.)

Как и при оценке I_1, числа ω_m выберем из условия, что сумма степеней первого и последнего интегралов в (2.7) равна 1, т. е.

$$\omega_1 \frac{p_i}{p} + \omega_3 \frac{p_i}{1+\lambda} = 1. \tag{2.9}$$

Из системы (2.8), (2.9) числа ω_m определяются уже однозначно и удовлетворяют условиям $\omega_m \in (0,1)$. При этом из непосредственных вычислений видно, что

$$\omega_2 \frac{p_i}{1+\beta} = \frac{p(p_i - 1 - \lambda)}{N(p-1-\lambda) + p(1+\beta)} = \frac{pd_\lambda}{Nd_\lambda + p(1+\beta)}.$$

Интегрируя, как и выше, (2.7) по времени, вынося множитель

$$\left(\sup_{t_n \le \tau \le t} \int\limits_{P_n} v_n^{1+\beta}(x,\tau)dx \right)^{\omega_2 p_i/(1+\beta)}$$

и применяя неравенство Юнга с учетом условия (2.9), получаем

$$\int\limits_{t_n}^{t} \int\limits_{P_n} v_n^{p_i} dx d\tau \le C \left(\sup_{t_n \le \tau \le t} \int\limits_{P_n} v_n^{1+\beta}(x,\tau)dx \right)^{\omega_2 \frac{p_i}{1+\beta}} \times$$

$$\times \left(\sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_n}^{t} \int\limits_{P_n} \left| v_{nx_j} \right|^{p_j} dx d\tau + \int\limits_{t_n}^{t} \int\limits_{P_n} v_n^{1+\lambda} dx d\tau \right).$$

Таким образом, вследствие определений величин ρ_{1i}, ρ_{2i} и $\Delta\rho_i$ для выражений I_{2i} из правой части (2.3) имеем оценку

$$I_{2i} \le C(R,\sigma) t^{-\frac{d_i \lambda}{\beta - \lambda}} Y_n^{1 + \frac{pd_{i\lambda}}{Nd_\lambda + p(1+\beta)}}. \tag{2.10}$$

Из (2.3), (2.6) и (2.10) вытекает, что

$$Y_{n+1} \le C(R,\sigma) b^n Y_n \left(t^{-1} Y_n^{\frac{p(\beta-\lambda)}{Nd_\lambda + p(1+\beta)}} + \sum_{i=1}^{N} t^{-\frac{d_i \lambda}{\beta-\lambda}} Y_n^{\frac{pd_{i\lambda}}{Nd_\lambda + p(1+\beta)}} \right).$$

На основании итеративной леммы 5.6 в [16] из последнего неравенства следует, что $Y_n \to 0$ при $n \to \infty$, если достаточно мала величина в круглых скобках в правой части последнего неравенства при $n = 0$, т. е.

$$C(R,\sigma) \left(t^{-1} Y_0^{\frac{p(\beta-\lambda)}{Nd_\lambda + p(1+\beta)}} + \sum_{i=1}^{N} t^{-\frac{d_i \lambda}{\beta-\lambda}} Y_0^{\frac{pd_{i\lambda}}{Nd_\lambda + p(1+\beta)}} \right) =$$

$$= C(R,\sigma) \left[t^{-1} Y_0^{\frac{p(\beta-\lambda)}{Nd_\lambda + p(1+\beta)}} + \sum_{i=1}^{N} \left(t^{-1} Y_0^{\frac{p(\beta-\lambda)}{Nd_\lambda + p(1+\beta)}} \right)^{\frac{d_i \lambda}{(\beta-\lambda)}} \right] \le \overline{\gamma},$$

где $\overline{\gamma}$ достаточно мало. Очевидно, что указанная величина будет малой тогда и только тогда, когда мала величина $t^{-1}Y_0^{\frac{p(\beta-\lambda)}{Nd_\lambda+p(1+\beta)}}$, т. е. когда

$$Y_0 \le \gamma_2 t^{\frac{Nd_\lambda+p(1+\beta)}{p(\beta-\lambda)}}, \tag{2.11}$$

где число $\gamma_2 = \gamma_2(R,\sigma)$ достаточно мало.

Вследствие определения величин Y_n лемма 2.1 доказана.

3. Оценка энергии решения и максимума модуля решения через массу решения. В этом пункте приведем две оценки из [11] (аналогичные оценкам лемм 4.1 – 4.3 из [13]), которые потребуются нам в дальнейшем. Отметим при этом, что в [11] приводимые нами ниже оценки доказаны для уравнения без абсорбции, но, как легко увидеть из доказательств этих оценок в [11], абсорбция не мешает, а только усиливает оценки, так что результаты работы [11] без изменений переносятся на случай уравнения (1.1) (см. доказательства лемм 2 и 3 в [11]. В этом пункте мы также получим условия на локальную массу решения, при которых выполнено условие леммы 2.1, т. е. решение локально равно нулю.

Лемма 3.1. *Пусть* $x_0 \in R^N$, $\sigma, \theta_1, \theta_2 \in (0,1)$, $0 < \theta_1+\theta_2 < 1$, $\tau_1 = t(1-\theta_1)$, $\tau_2 = t(1-\theta_1-\theta_2)$, $R_{1i} = R_i > 0$, $R_{2i} = R_i(1+\sigma) = R_{1i}(1+\sigma)$, $i = \overline{1,N}$, $P_{R_m} = \left\{x\colon |x_i - x_{0i}| \le R_{mi},\, i=\overline{1,N}\right\}$, $m=1,2$. *Кроме того, пусть*

$$E(\tau_2, P_{R_2}) = \sup_{\tau_2 \le \tau \le t} \int\limits_{P_{R_2}} u^\beta(x,\tau)dx$$

— локальная масса решения. Тогда справедлива оценка

$$Y(\tau_1, P_{R_1}) \equiv \sup_{\tau_1 \le \tau \le t} \int\limits_{P_{R_1}} u^{1+\beta}(x,\tau)dx +$$

$$+\sum_{j=1}^N \int\limits_{\tau_1}^t \int\limits_{P_{R_1}} \left|u_{x_j}\right|^{p_j} dxd\tau + \int\limits_{\tau_1}^t \int\limits_{P_{R_1}} u^{1+\lambda} dxd\tau \le$$

$$\le C(\sigma,\theta_1,\theta_2)\left\{ t^{-N/k} E(\tau_2, P_{R_2})^{(k+p)/k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^N t R_i^{-\frac{p_i(k+N)}{N(p-p_i)+\beta p}} E(\tau_2, P_{R_2})^{\frac{N(p-p_i)+p_i p}{N(p-p_i)+\beta p}} \right\}. \tag{3.1}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2 в [11].

Лемма 3.2. *В обозначениях леммы* 3.1 *справедлива оценка*

$$\|u\|_{\infty, P_{R_1}\times[\tau_1,t]} \le C(\theta_1,\theta_2)\sigma^{-C} \times$$

$$\times \left\{ t^{-N/k} E(\tau_2, P_{R_2})^{p/k} + \sum_{i=1}^N t R_i^{-\frac{p_i(k+N)}{N(p-p_i)+\beta p}} E(\tau_2, P_{R_2})^{\frac{(p_i-\beta)p}{N(p-p_i)+\beta p}} \right\}. \tag{3.2}$$

По поводу доказательства этой леммы см. доказательство леммы 3 в [11].

Отметим, что константы $C(\sigma,\theta_1,\theta_2)$, $C(\theta_1,\theta_2)$ в оценках (3.1), (3.2) зависят от указанных параметров, но если для фиксированного $\nu>0$ эти параметры выбраны так, что $\sigma\in(\nu,1-\nu)$, $\theta_m\in(\nu,1/2-\nu)$, то константы в оценках (3.1), (3.2) становятся абсолютными. Отметим также, что оценка (3.2) будет использована нами ниже и при малых σ.

Из оценки (3.1) следует, что величина локальной энергии $Y(\tau_1,P_{R_1})$ будет достаточно малой (как того требует лемма 2.1), если достаточно мала величина локальной массы $E(\tau_2,P_{R_2})$ по более широкому множеству.

Лемма 3.3. *Пусть* σ, ρ_{1i}, ρ_{2i}, *параллелепипеды* P_1, P_2 *такие же, как в лемме* 2.1. *Пусть, кроме того,* $\rho_i=\rho_{2i}(1+\sigma)$, $i=\overline{1,N}$, $P_\rho=\left\{x\colon |x_i-x_{0i}|\le\rho_i,\ i=\overline{1,N}\right\}$. *Существует такое* $\gamma_3>0$, *что условия леммы* 2.1 *выполнены, т. е.*

$$Y\left(\frac{t}{2},P_1\right)\le\gamma_2 t^{\frac{Nd_\lambda+p(1+\beta)}{p(\beta-\lambda)}},\tag{3.3}$$

если

$$E\left(\frac{t}{4},P_\rho\right)\equiv\sup_{t/4\le\tau\le t}\int\limits_{P_\rho}u^\beta(x,\tau)dx\le\gamma_3 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}+N\frac{d_\lambda}{p(\beta-\lambda)}}=\gamma_3 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}+N\varkappa}.\tag{3.4}$$

Доказательство следует из оценки (3.1), если в лемме 3.1 выбрать $\theta_1=1/2$, $\theta_2=1/4$, $R_{1i}=\rho_{2i}$, $R_{2i}=\rho_i=R(1+\sigma)t^{\varkappa_i}$. Тогда из (3.1) следует, что (3.3) будет выполнено, если достаточно мало каждое слагаемое в правой части (3.1), т. е. если с достаточно малым $\overline{\gamma}>0$ выполнены неравенства

$$t^{-\frac{N}{k}}E(\tau_2,P_{R_2})^{\frac{k+p}{k}}\le\overline{\gamma}t^{\frac{Nd_\lambda+p(1+\beta)}{p(\beta-\lambda)}},\tag{3.5}$$

$$t\left(Rt^{\varkappa_i}\right)^{-\frac{p_i(k+N)}{N(p-p_i)+\beta p}}E(\tau_2,P_{R_2})^{\frac{N(p-p_i)+p_ip}{N(p-p_i)+\beta p}}\le\overline{\gamma}t^{\frac{Nd_\lambda+p(1+\beta)}{p(\beta-\lambda)}},\tag{3.6}$$

каждое из которых дает некоторое условие на $E(t/4,P_\rho)$ ($\tau_2=t/4$). Решая неравенства (3.5), (3.6) относительно $E(t/4,P_\rho)$, получаем некоторые условия малости на $E(t/4,P_\rho)$. При этом непосредственный элементарный подсчет соответствующих возникающих показателей степеней переменной t показывает, что, в силу определения показателей $\varkappa_i$, каждое из условий (3.5), (3.6) эквивалентно в точности одному и тому же условию (3.4) с достаточно малым $\gamma_3>0$. Тем самым лемма 3.3 доказана.

Отметим, что из лемм 3.3 и 2.1 следует, что при выполнении условия (3.4) решение $u(x,t)$ равно нулю в окрестности точки (x_0,t). Таким образом, следующая наша задача — оценить локальную массу решения $E(t/4,P_\rho)$ через локальную массу начальной функции.

4. Оценка локальной массы решения через локальную массу начальной функции. В дальнейшем нам понадобится простая вспомогательная лемма.

Лемма 4.1. *Пусть* x_0, $y\in R^N$, $0<r_i\le R_i$, $i=\overline{1,N}$, $P_r(y)=\left\{x\colon |x_i-y_i|\le r_i,\ i=\overline{1,N}\right\}$, $P_R=\left\{x\colon |x_i-x_{0i}|\le R_i,\ i=\overline{1,N}\right\}$. *Для неотрицательной интегрируемой функции* $v(x)$ *выполняется неравенство*

$$\fint\limits_{P_R}v(x)dx\equiv\frac{1}{|P_R|}\int\limits_{P_R}v(x)dx\le C(N)\sup_{y\in P_R}\fint\limits_{P_r(y)}v(x)dx.\tag{4.1}$$

Доказательство этой леммы элементарно и следует из того факта, что параллелепипед P_R можно покрыть меньшими параллелепипедами $P_r(y)$ в количестве не более чем $C(N)\prod_{i=1}^{N}(R_i/r_i)$.

Обратимся теперь к оценкам локальной массы решения. Пусть всюду ниже $x_0, y \in R^N$, $\sigma > 0$, $R_i > 0$, $i = \overline{1,N}$, $R_{0i} = R_i$, и для $\theta \in [0,\sigma]$ $R_{\theta i} = R_i(1+\theta)$, $i = \overline{1,N}$, $P_\theta = \{x : |x_i - x_{0i}| \le R_{\theta i}\}$. Обозначим также

$$E_\theta = \sup_{0\le\tau\le t} \int\limits_{P_\theta} u^\beta(x,\tau)dx, \qquad \mu_\theta = \int\limits_{P_\theta} u_0^\beta(x)dx, \tag{4.2}$$

$$M_\theta(t) \equiv M(E_\theta, t, R_i) \equiv t^{-N/k} E_\theta^{p/k} + \sum_{i=1}^{N} t R_i^{-\frac{p_i(k+N)}{N(p-p_i)+\beta p}} E_\theta^{\frac{(p_i-\beta)p}{N(p-p_i)+\beta p}}. \tag{4.3}$$

Отметим при этом, что величина $M_\theta(t)$ соответствует правой части оценки максимума модуля решения (3.2), так что, в частности, в силу (3.2)

$$\max_{P_{\sigma/2}\times[t/2,t]} |u| \le C\sigma^{-C} M_\sigma(t). \tag{4.4}$$

Лемма 4.2. *Имеет место следующая оценка*:

$$E_0 \le \mu_\sigma + C\sigma^{-C} E_\sigma \left\{ \sum_{j=1}^{N} \left[\left(\frac{t}{R_j^{p_j}} M_\sigma(t)^{d_j} \right)^{1/p_j} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{t}{R_i^{p_i}} M_\sigma(t)^{d_i} \right)^{(p_j-1)/p_j} \left(\frac{t}{R_j^{p_j}} M_\sigma(t)^{d_j} \right)^{1/p_j} \right] \right\} \equiv$$

$$\equiv \mathcal{E}(t, R_i, E_\sigma). \tag{4.5}$$

Доказательство. Пусть $\zeta(x)$ — гладкая срезающая функция параллелепипеда $P_{\sigma/4}$, равная единице на P_0 и нулю вне $P_{\sigma/4}$, $|\zeta_{x_i}| \le C/\sigma R_i$. Умножая уравнение (1.1) на $\zeta(x)$ и интегрируя по области $P_{\sigma/4} \times [0,t]$, получаем

$$\int\limits_{P_{\sigma/4}} u^\beta(x,t)\zeta(x)dx + \int\limits_0^t \int\limits_{P_{\sigma/4}} u^\lambda(x,\tau)\zeta(x)dxd\tau =$$

$$= \int\limits_{P_{\sigma/4}} u_0^\beta(x)\zeta(x)dx + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^t \int\limits_{P_{\sigma/4}} |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i}\zeta_{x_i} dxd\tau \le$$

$$\le \mu_{\sigma/4} + C\sigma^{-1} \sum_{i=1}^{N} R_i^{-1} \int\limits_0^t \int\limits_{P_{\sigma/4}} |u_{x_i}|^{p_i-1} dxd\tau.$$

Отсюда, в силу произвольности t и определений (4.2), имеем

$$E_0 \le \mu_{\sigma/4} + C\sigma^{-1} \sum_{j=1}^{N} I_j, \qquad I_j \equiv R_j^{-1} \int\limits_0^t \int\limits_{P_{\sigma/4}} \left|u_{x_j}\right|^{p_j-1} dxd\tau. \tag{4.6}$$

Дальнейшее доказательство состоит в оценке интегралов I_j в терминах величины E_σ, что и приводит к (4.5). Эта оценка использует (4.4) и проводится по схеме, идущей от классической работы [18] (лемма 3.3) и использованной в анизотропном случае в [11] (п. 2.2), а также в [10] (лемма 5.2). Поскольку дальнейшие рассуждения для получения оценки (4.5) аналогичны, как отмечено, оценкам [11] (п. 2.2), мы отсылаем читателя к указанной работе.

Идея следующего утверждения заимствована автором из любезно предоставленной ему неопубликованной пока статьи S. D. Eidelman, S. Kamin, A. F. Tedeev „Asymptotic representation for solutions of the Cauchy problem for quasilinear degenerate parabolic equations”.

Лемма 4.3. *В обозначениях леммы* 4.2 *существует такое* $\gamma_4 > 0$, *что если для* $i = \overline{1, N}$ *выполнено*

$$t^{\frac{k-Nd_i}{d_i k}} R_i^{-\frac{p_i}{d_i}} E_\sigma^{\frac{p}{k}} \le \gamma_4, \quad i = \overline{1, N}, \tag{4.7}$$

то

$$E_0 \le 2\mu_\sigma. \tag{4.8}$$

Доказательство этой леммы непосредственно следует из оценки (4.5) на основании итеративной леммы [16] (гл. 2, лемма 5.6) и полностью аналогично доказательству условия (5.22) в [10] (лемма 5.3).

Нашей целью в данном пункте является получение оценки (4.8) для параллелепипедов $P_\sigma = \{x\colon |x_i - x_{0i}| \le t^{\varkappa_i}(1+\sigma)\}$ со сторонами $R_i = Ct^{\varkappa_i}$. Однако, как можно проверить, при таких R_i величины $t^{(k-Nd_i)/d_i k} R_i^{-p_i/d_i}$ в условии (4.7) не могут быть сделаны малыми при как угодно малых $t > 0$. Поэтому, чтобы удовлетворить (4.7) при таких R_i, мы должны использовать малость величины $E^{p/k}$.

Лемма 4.4. *Пусть* $\sigma \in (0,1)$ *зафиксировано,* $x_0 \in R^N$, *числа* r, α_i *взяты из соотношения* (1.9), *параллелепипед* $P_{t^\varkappa}$ *определен в* (1.12). *Существуют такие константы* $t_0 = t_0(u_0)$, $\gamma_5 = \gamma_5(u_0)$, *что для* $t \le t_0$, *если при всех* $y \in P_r = \{y\colon |y_i - x_{0i}| \le r^{\alpha_i}(1+\sigma)^2\}$ *выполнено*

$$\oint\limits_{P_{t^\varkappa}(y)} u_0^\beta(x)dx \equiv \frac{1}{|P_{t^\varkappa}(y)|} \int\limits_{P_{t^\varkappa}(y)} u_0^\beta(x)dx \le \gamma_5 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}}, \tag{4.9}$$

выполнено

$$E_{t^\varkappa, x_0} \equiv \sup_{0 \le \tau \le t} \int\limits_{P_{t^\varkappa}(x_0)} u^\beta(x,\tau)dx \le 2 \int\limits_{P_{t^\varkappa(1+\sigma)}(x_0)} u_0^\beta(x)dx, \tag{4.10}$$

где $P_{t^\varkappa(1+\sigma)}(x_0) = \{x\colon |x_i - x_{0i}| \le t^{\varkappa_i}(1+\sigma)\}$.

Доказательство. Положим $R_i^{(0)} = r^{\alpha_i}$ и рассмотрим параллелепипеды $P_0 = \{x\colon |x_i - x_{0i}| \le R_i^{(0)}\}$ и $P_{0,\sigma} = \{x\colon |x_i - x_{0i}| \le R_i^{(0)}(1+\sigma)\}$. Для параллелепипедов P_0 $P_{0,\sigma}$ условие (4.7) принимает вид

$$t^{\frac{k-Nd_i}{d_i k}} \left(r^{\frac{pd_i}{dp_i}}\right)^{-\frac{p_i}{d_i}} E_{0,\sigma}^{\frac{p}{k}} \le \gamma_4, \quad i = \overline{1, N},$$

где $E_{0,\sigma}$ — масса решения, соответствующая параллелепипеду $P_{0,\sigma}$. Последнему неравенству можно придать вид

$$t^{\frac{k-Nd_i}{d_ik}}\left[\sup_{0\le\tau\le t} r^{-\frac{k}{d}}\int\limits_{P_{0,\sigma}} u^\beta(x,\tau)dx\right]^{p/k}\le\gamma_4,\quad i=\overline{1,N},$$

что может быть усилено, вследствие определения нормы $|||u^\beta|||$ и оценки (1.10), неравенством

$$C(N,\sigma)t^{\frac{k-Nd_i}{d_ik}}\left|\left|\left|u_0^\beta\right|\right|\right|^{p/k}\le\gamma_4,\quad i=\overline{1,N}. \tag{4.11}$$

Поскольку, в силу предположений о коэффициентах p_i, степень $(k-Nd_i)/d_ik>0$, при $t\le t_0=t_0(u_0)$, где t_0 мало настолько, чтобы удовлетворить (4.11), условие (4.7) выполнено для $R_i\ge R_i^{(0)}$, а следовательно, выполнена оценка (4.8).

Покажем, что, в силу только что доказанного и условия (4.9), условие (4.7) выполнено для $R_i\ge R_i^{(1)}$, где $R_i^{(1)}$ меньше, чем $R_i^{(0)}$. Действительно, для $R_i\le R_i^{(0)}$ условие (4.7), расширяя область интегрирования, можно усилить до условия

$$t^{\frac{k-Nd_i}{d_ik}}R_i^{-p_i/d_i}E_{0,\sigma}^{p/k}\le\gamma_4,\quad i=\overline{1,N},$$

которое запишем в виде

$$(1+\sigma)^{Np/k}t^{\frac{k-Nd_i}{d_ik}}R_i^{-p_i/d_i}\left(\prod_{j=1}^N R_j^{(0)}\right)^{p/k}\left[\sup_{0\le\tau\le t}\oint\limits_{P_{0,\sigma}} u^\beta(x,\tau)dx\right]^{p/k}\le\gamma_4. \tag{4.12}$$

Учитывая теперь, что для $R_i\ge R_i^{(0)}$ оценка (4.8) доказана, можем усилить (4.12) до условия

$$C(N,\sigma)t^{\frac{k-Nd_i}{d_ik}}(R_i)^{-p_i/d_i}\left(\prod_{j=1}^N R_j^{(0)}\right)^{p/k}\left[\sup_{0\le\tau\le t}\oint\limits_{\widetilde{P_{0,\sigma}}} u_0^\beta(x)dx\right]^{p/k}\le\gamma_4, \tag{4.13}$$

где $\widetilde{P_{0,\sigma}}=\left\{x\colon|x_i-x_{0i}|\le R_i^{(0)}(1+\sigma)^2\right\}$. Используя условие (4.9) и лемму 4.1, можем усилить (4.13) до условия

$$C(N,\sigma)\gamma_5t^{\frac{k-Nd_i}{d_ik}}(R_i)^{-p_i/d_i}\left(\prod_{j=1}^N R_j^{(0)}\right)^{p/k}t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}\frac{p}{k}}\le\gamma_4. \tag{4.14}$$

Если γ_5 выбрать достаточно малым, так что $C(N,\sigma)\gamma_5\le\gamma_4$, то из (4.14) следует условие на R_i, при котором удовлетворено (4.7): $R_i\ge R_i^{(1)}$, где

$$R_i^{(1)}\equiv t^{\frac{d_i}{p_i}\left[\frac{\beta}{\beta-\lambda}\frac{p}{k}+\frac{k-Nd_i}{d_ik}\right]}\left(\prod_{j=1}^N R_j^{(0)}\right)^{\frac{p}{k}\frac{d_i}{p_i}},\quad i=\overline{1,N}. \tag{4.15}$$

Таким образом, оценка (4.8) выполнена для $R_i\ge R_i^{(1)}$, где $R_i^{(1)}$ определены в (4.15). При этом можно проверить, что при условии $r>1$, $t<1$ выполнено $R_i^{(1)}<R_i^{(0)}$ (см. (4.21), (4.23) ниже).

Используя теперь то, что оценка (4.8) выполнена при $R_i \geq R_i^{(1)}$, и дословно повторяя предыдущие рассуждения, убеждаемся, что (4.8) выполнено для $R_i \geq R_i^{(2)}$, где $R_i^{(2)}$ определяется рекурсивно через $R_i^{(1)}$ формулой (4.15) с заменой в правой части величин $R_i^{(0)}$ на $R_i^{(1)}$. Повторяя этот процесс по шагам, можем построить рекуррентную последовательность величин $R_i^{(n)}$, $n = 0, 1, \ldots$, таких, что для $R_i \geq R_i^{(n)}$ выполнены (4.7), (4.8), причем

$$R_i^{(n+1)} \equiv t^{\frac{d_i}{p_i}\left[\frac{\beta}{\beta-\lambda}\frac{p}{k}+\frac{k-Nd_i}{d_i k}\right]}\left(\prod_{j=1}^{N} R_j^{(n)}\right)^{\frac{p}{k}\frac{d_i}{p_i}}, \quad i = \overline{1,N}. \tag{4.16}$$

Нетрудно видеть, что величины $R_i^{(n)}$ имеют вид $R_i^{(n)} = t^{\beta_i^{(n)}} r^{\gamma_i^{(n)}}$, причем $\beta_i^{(0)} = 0$, $\gamma_i^{(0)} = \alpha_i$ и равенство (4.16) определяет рекуррентное соотношение между $\beta_i^{(n+1)}$, $\gamma_i^{(n+1)}$ и $\beta_i^{(n)}$, $\gamma_i^{(n)}$, а именно

$$\beta_i^{(n+1)} = \omega_i + \left(\sum_{j=1}^{N} \beta_j^{(n)}\right)\theta_i, \quad i = \overline{1,N}, \tag{4.17}$$

$$\gamma_i^{(n+1)} = \left(\sum_{j=1}^{N} \gamma_j^{(n)}\right)\theta_i, \quad i = \overline{1,N}, \tag{4.18}$$

где

$$\theta_i = \frac{p}{k}\frac{d_i}{p_i}, \qquad \omega_i = \frac{d_i}{p_i}\left[\frac{\beta}{\beta-\lambda}\frac{p}{k} + \frac{k-Nd_i}{d_i k}\right], \quad i = \overline{1,N}. \tag{4.19}$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\theta \equiv \sum_{i=1}^{N} \theta_i = \frac{Nd}{k} < 1, \qquad \omega = \sum_{i=1}^{N} \omega_i = \frac{\beta}{\beta-\lambda}\frac{Nd}{k} + \frac{N\beta}{k}. \tag{4.20}$$

Поэтому, обозначая $\beta^{(n)} \equiv \sum_{i=1}^{N} \beta_i^{(n)}$, $\gamma^{(n)} \equiv \sum_{i=1}^{N} \gamma_i^{(n)}$ и складывая соотношения (4.17), (4.18) по $i = \overline{1,N}$, видим, что

$$\beta^{(n+1)} = \omega + \beta^{(n)}\theta, \qquad \gamma^{(n+1)} = \gamma^{(n)}\theta. \tag{4.21}$$

Поскольку $0 < \theta < 1$, $\omega > 0$, из (4.21) следует, что величины $\gamma^{(n)}$ монотонно убывают, а величины $\beta^{(n)}$ монотонно возрастают, причем

$$\gamma^{(n)} \to 0, \qquad \beta^{(n)} \to \frac{\omega}{1-\theta}, \quad n \to \infty,$$

где, как показывают вычисления,

$$\frac{\omega}{1-\theta} = N\frac{d_\lambda}{p(\beta-\lambda)} = N\frac{p-1-\lambda}{p(\beta-\lambda)}. \tag{4.22}$$

Так как $\beta^{(n)}$ и $\gamma^{(n)}$ имеют указанные пределы, как следует из (4.17), (4.18), пределы при $n \to \infty$ имеют и величины $\gamma_i^{(n)}$, $\beta_i^{(n)}$, причем непосредственные вычисления показывают, что

$$\gamma_i^{(n)} \to 0, \qquad \beta_i^{(n)} \to \frac{d_{i\lambda}}{p(\beta-\lambda)} = \frac{p_i - 1 - \lambda}{p(\beta-\lambda)} = \varkappa_i, \quad n \to \infty. \tag{4.23}$$

Записывая теперь неравенства (4.8) для $R_i = R_i^{(n)}$, $n = 0, 1, \ldots$, и переходя в нем к пределу при $n \to \infty$, видим, что (4.8) выполнено для $R_i = t^{\varkappa_i}$, т. е. выполнено (4.10). Тем самым лемма 4.4 доказана.

5. Доказательство теоремы 1.1. Установим оценку (1.17). Зафиксируем какое-либо одно $\sigma \in (0,1)$ во всех оценках из пунктов 2–4. Тем самым оказываются зафиксированными все малые константы γ_i в леммах 2.1, 3.3 и 4.4. Пусть выполнено условие (1.16) и γ_0 достаточно мало. Пусть, далее, $x_0 \in R^N$, $|x_0| \geq$ $\geq \varphi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}}) + 2(1+\sigma)^2 \max r^{\alpha_i}$. Тогда, в силу определения функции φ_t^{-1}, для такого x_0 выполнены условия леммы 4.4, если γ_0 достаточно мало, $\gamma_0 \leq \gamma_5$. В свою очередь, в силу лемм 4.4 и 4.1, для такого x_0 выполнены условия леммы 3.3 с $\rho_i = t^{\varkappa_i}(1+\sigma)$, если γ_0 достаточно мало. Но тогда выполнены условия леммы 2.1, и из этой леммы следует, что $u(x,\tau) \equiv 0$ на множестве $\{x\colon |x_i - x_{0i}| \leq t^{\varkappa_i}(1-\sigma),\ i = \overline{1,N}\} \times [3t/4, t]$. Таким образом, $u(x,\tau) \equiv 0$ на множестве $\{x\colon |x_0| \geq \varphi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\beta/(\beta-\lambda)}) + 2(1+\sigma)^2 \max r^{\alpha_i}\}$, откуда следует оценка (1.17), так как, в силу (1.16), $\varphi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\beta/(\beta-\lambda)}) \to \infty$ при $t \to 0$.

Что же касается оценки (1.18) размеров носителя решения снизу, то ее доказательство полностью аналогично доказательству соответствующей оценки снизу для изотропного уравнения в работе [10] с использованием параллелепипеда $P_{t^{\varkappa}}$ вместо шара, поэтому мы отсылаем читателя к этой работе.

Теорема 1.1 доказана.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность А. Ф. Тедееву за ценные обсуждения в ходе выполнения работы.

1. *Kersner R., Shishkov A.* Instantaneous shrinking of the support of energy solutions // J. Math. Anal. and Appl. – 1996. – **198**. – P. 729–750.
2. *Шишков А. Е.* Мертвые зоны и мгновенная компактификация носителей энергетических решений квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка // Мат. сб. – 1999. – **190**, № 12. – С. 129–156.
3. *Antontsev S. N., Diaz J. I., Shmarev S. I.* The support shrinking properties for solutions of quasilinear parabolic equations with strong absorption terms // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. – 1995. – **6**, № 4. – P. 5–30.
4. *Antontsev S. N., Diaz J. I., Shmarev S. I.* Energy methods for the free boundary problems. Applications to nonlinear PDEs and fluid mechanics. – Birkhäuser, 2002. – 334 p.
5. *Абдуллаев У. Г.* О мгновенном сжатии носителя решения нелинейного вырождающегося параболического уравнения // Мат. заметки. – 1998. – **63**, № 3. – С. 323–331.
6. *Abdullaev U. G.* Exact local estimates for the supports of solutions in problems for nonlinear parabolic equations // Mat. Sb. – 1995. – **186**, № 8. – P. 3–24.
7. *Ughi M.* Initial behavior of the free boundary for a porous media equation with strong absorption // Adv. Math. Sci. and Appl. – 2001. – **11**, № 1. – P. 333–345.
8. *Kalashnikov A. S.* On the dependence of properties of solutions of parabolic equations in unbounded domains on the behavior of the coefficients at infinity // Math. USSR Sb. – 1986. – **53**. – P. 399–410.
9. *Kalashnikov A. S.* On the behavior of solutions of the Cauchy problem for parabolic systems with nonlinear dissipation near the initial hyperplane // Trudy Sem. Petrovskogo. – 1992. – **16**. – P. 106–117.
10. *Дегтярев С. П.* Об условиях мгновенной компактификации носителя решения и о точных оценках носителя в задаче Коши для параболического уравнения с двойной нелинейностью и абсорбцией // Мат. сб. – 2008. – **199**, № 4. – С. 37–64.

11. *Дегтярев С. П., Тедеев А. Ф.* $L_1 - L_\infty$ оценки решения задачи Коши для анизотропного вырождающегося параболического уравнения с двойной нелинейностью и растущими начальными данными // Там же. – 2007. – **198**, № 5. – С. 45 – 66.
12. *Дегтярев С. П., Тедеев А. Ф.* Оценки решения задачи Коши с растущими начальными данными для параболического уравнения с анизотропным вырождением и двойной нелинейностью // Докл. АН. – 2007. – **417**, № 2. – С. 156 – 159.
13. *Andreucci D., Tedeev A. F.* Universal bounds at the blow-up time for nonlinear parabolic equations // Adv. Different. Equat. – 2005. – **10**, № 1. – P. 89 – 120.
14. *Andreucci D., Tedeev A. F.* Finite speed of propagation for the thin film equation and other higher order parabolic equations with general nonlinearity // Interfaces and Free Boundaries. – 2001. – **3**, № 3. – P. 233 – 264.
15. *Andreucci D., Tedeev A. F.* A Fujita type result for a degenerate Neumann problem in domains with non compact boundary // J. Math. Anal. and Appl. – 1999. – **231**. – P. 543 – 567.
16. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
17. *Королев А. Г.* Теоремы вложения анизотропных пространств Соболева – Орлича // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. – 1983. – № 1. – С. 32 – 37.
18. *Di Benedetto E., Herrero M. A.* On the Cauchy problem and initial traces for a degenerate parabolic equation // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – **314**, № 1. – P. 187 – 224.

Получено 01.07.08