УДК 517.5

Е. А. Севостьянов
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ОБ ОДНОМ МОДУЛЬНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ С КОНЕЧНЫМ ИСКАЖЕНИЕМ ДЛИНЫ

The Väisälä-type inequality, which is well known in the theory of quasiregular mappings, is extended to the class of open discrete mappings with finite length distortion.

Відому з теорії квазірегулярних відображень нерівність типу Вяйсяля поширено на клас відображень зі скінченним викривленням довжини.

1. Введение. Отображения с конечным искажением длины образуют один из наиболее широких современных классов отображений, включающих в себя, в частности, отображения с ограниченным искажением по Решетняку, которые в финской школе получили название квазирегулярных отображений или квазиконформных отображений с ветвлениями (сокращенно BD, см. [1] и теорему 4.7 в [2]). О. Мартио и Ю. Вяйсяля рассматривали также отображения ограниченного искажения длины (сокращенно BLD), при которых длины всех спрямляемых кривых искажаются в ограниченное число раз (см., например, [3]). Недавно были введены отображения с конечным искажением длины (сокращенно FLD), при которых почти все спрямляемые кривые переходят в спрямляемые кривые с условием абсолютной неперерывности относительно меры длины. Этот класс был предложен В. Рязановым в 2002 году и исследовался им совместно с О. Мартио, У. Сребро и Э. Якубовым (см., например, [2]). Это один из наиболее широких известных ныне классов отображений, тесно связанный с классом отображений конечного искажения (сокращенно FD, см., например, [4], а также теорему 4.6, следствия 4.9 и 4.16 в [2]).

Отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется отображением конечного метрического искажения, если f имеет (N)-свойство Лузина и почти всюду искажает расстояние между точками в конечное число раз. Один из критериев состоит в том, что f дифференцируемо почти всюду и имеет (N)- и (N^{-1})-свойства (см. следствие 3.14 в [2]). Отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется отображением с конечным искажением длины, если f — отображение конечного метрического искажения с (L)-свойством, т. е., во-первых, образы почти всех кривых γ в D локально спрямляемы и f на γ имеет (N)-свойство относительно меры длины, и, во-вторых, (N)-свойство имеет место и в обратную сторону для поднятий кривых. Связь между упомянутыми классами условно можно обозначить следующими включениями: $BLD \subset BD \subset FLD$.

Опишем кратко постановку задачи и цель исследований, которым посвящена данная статья. Для отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, имеющего в D частные производные почти всюду, пусть $f'(x)$ — якобиева матрица отображения f в точке x, $J(x,f)$ — якобиан отображения f в точке x, т.е. детерминант $f'(x)$. В дальнейшем

$$l(f'(x)) = \min_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}.$$

Напомним, что *внутренняя дилатация* отображения f в точке x есть величина

$$K_I(x,f) = \frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))^n},$$

если $J(x,f) \neq 0$, $K_I(x,f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_I(x,f) = \infty$ в остальных точках. Аналогично, *внешняя дилатация* отображения f в точке x есть величина

$$K_O(x,f) = \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,f)|},$$

если $J(x,f) \neq 0$, $K_O(x,f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_O(x,f) = \infty$ в остальных точках.

Отметим, что отображения конечного метрического искажения, а следовательно, и отображения с конечным искажением длины, дифференцируемы почти всюду, более того, $J(x,f) \neq 0$ почти всюду (см. предложение 3.7 в [2]).

Напомним, что борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если $\int_\gamma \rho(x)ds \geq 1$ для всех путей $\gamma \in \Gamma$. В этом случае пишем $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. Модулем семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int_D \rho^n(x)dm(x).$$

Согласно теореме 6.10 в [2], имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — отображение с конечным искажением длины. Тогда*

$$M(f\Gamma) \leq \int_D K_I(x,f)\rho^n(x)dm(x) \tag{1}$$

для любого семейства Γ путей γ в D и для каждой $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$.

Наша цель — обобщить неравенство (1) для отображений с конечным искажением длины в свете известного неравенства Вяйсяля, которое было установлено ранее для квазирегулярных отображений (см., например, § 9 гл. II в [5]). А именно, в правую часть неравенства (1) может быть введен некоторый множитель меньше 1. Понятно, что такие неравенства являются значительно более содержательными, чем (1), так как позволяют более точно оценить емкость конденсатора при отображении (см. последний пункт статьи). Кроме того, неравенства типа (1) играют значительную роль при решении задач о стирании особенностей (см. раздел 2 гл. III в [5]). В работе рассматриваются отображения с конечным искажением длины; отметим, что в [6] получены аналогичные оценки для классов отображений конечного искажения. Непрерывное отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением,* если $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$ и почти всюду

$$\|f'(x)\|^n \leq K(x)\, J(x,f)$$

для некоторой функции $K(x) : D \to [1,\infty)$ (см., например, [4]). Условия, при которых получены основные результаты работы [6], являются достаточно жесткими, так как требуют, в частности, интегрируемости внутренней дилатации отображения, а также достаточно сильной суммируемости производной. Из упомянутых выше условий следует принадлежность f к $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$, более того, авторы предполагают, что мера множества B_f точек ветвления отображения f равна нулю. Согласно замечанию 4.10 в [2], открытые дискретные отображения с конечным искажением, для которых $K(x) \in W_{\rm loc}^{n-1}$ и мера множества точек ветвления которых равна нулю, всегда принадлежат классу отображений с конечным искажением длины. Условия, при которых доказаны результаты этой работы, не включают в себя никаких априорных предположений относительно дилатации $K_I(x, f)$, в частности не требуют локальной суммируемости K_I. Более того, мы не предполагаем, что $f \in W_{\rm loc}^{1,n}$. В то же время, как было отмечено выше, результаты формулируются и доказываются для более широкого класса отображений (см. замечание 4.10 в [2]).

2. Определения и предварительные замечания. Приведем некоторые определения. Всюду далее D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется *дискретным,* если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым,* если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. Везде далее запись $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f непрерывно в области задания. Запись $G \Subset D$ означает, что $\overline{G}$ — компактное подмножество области D. Говорят, что отображение f *сохраняет ориентацию,* если топологический индекс $\mu(y, f, G) > 0$ для произвольной области $G \Subset D$ и произвольного $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$ (см., например, [1]). Везде ниже мы подразумеваем, что отображение f сохраняет ориентацию, если не оговорено противное. Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — произвольное отображение и существует область $G \Subset D$ такая, что $\overline{G} \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$. Тогда величина $\mu(f(x), f, G)$ называемая *локальным топологическим индексом,* не зависит от выбора области G и обозначается символом $i(x, f)$. В дальнейшем $B(x_0, r) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\right\}$. Для отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, множества $E \subset D$ и $y \in \mathbb{R}^n$ определим *функцию кратности* $N(y, f, E)$ как число прообразов точки y во множестве E, т. е.

$$N(y, f, E) = \operatorname{card}\left\{x \in E : f(x) = y\right\}, \qquad N(f, E) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} N(y, f, E).$$

Область $G \Subset D$ называется *нормальной,* если $\partial f G \subset f(\partial G)$. Для нормальных областей G величина $\mu(y, f, G)$ не зависит от y и обозначается $\mu(f, G)$. Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение, тогда $\mu(f, G) = N(f, G)$ для любой нормальной области $G \Subset D$ (см. предложение 4.10 гл. I в [5]).

Пусть $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$. Положим

$$L(x, \varphi) = \limsup_{y \to x,\, y \in E} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|y - x|},$$

$$l(x, \varphi) = \liminf_{y \to x,\, y \in E} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|y - x|}.$$

Непрерывное отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется отображением с *конечным метрическим искажением* (пишут $f \in FMD$), если f имеет (N)-свойство Лузина и для почти всех $x \in D$

$$0 < l(x, f) \leq L(x, f) < \infty.$$

Говорят, что отображение $f\colon X \to Y$ между пространствами с мерой (X, Σ, μ) и (X', Σ', μ') имеет (N)-*свойство,* если $\mu'(f(S)) = 0$ как только $\mu(S) = 0$. Аналогично, f имеет (N^{-1})-*свойство,* если $\mu(S) = 0$ как только $\mu'(f(S)) = 0$. Пусть $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ — открытый интервал числовой прямой, $\gamma\colon \Delta \to \mathbb{R}^n$ — локальная спрямляемая кривая. Тогда существует единственная неубывающая функция длины $l_\gamma\colon \Delta \to \Delta_\gamma \subseteq \mathbb{R}$ с условием $l_\gamma(t_0) = 0$, $t_0 \in \Delta$, такая, что $l_\gamma(t)$ равно длине подкривой $\gamma|_{[t_0,t]}$ кривой γ, если $t > t_0$, и $-\, l(\gamma|_{[t_0,t]})$, если $t < t_0$, $t \in \Delta$. Пусть $g : |\gamma| \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, где $|\gamma| = \gamma(\Delta) \subseteq \mathbb{R}^n$. Предположим, что кривая $\tilde{\gamma} = g \circ \gamma$ также локально спрямляема. Тогда существует единственная неубывающая функция $L_{\gamma,g} : \Delta_\gamma \to \Delta_{\tilde{\gamma}}$ такая, что $L_{\gamma,g}(l_\gamma(t)) = l_{\tilde{\gamma}}(t)$ $\forall t \in \Delta$. Говорят, что отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ имеет (L)-*свойство*, если выполнены следующие условия: (L_1) для почти всех кривых $\gamma \in D$ кривая $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ локальна спрямляема и функция $L_{\gamma,f}$ имеет (N)-свойство; (L_2) для почти всех кривых $\tilde{\gamma} \in f(D)$ каждое (*полное*) *поднятие* γ кривой $\tilde{\gamma}$ локально спрямляемо и функция $L_{\gamma,f}$ имеет (N^{-1})-свойство. Кривая $\gamma \in D$ называется *полным поднятием кривой* $\tilde{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ *при отображении* $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, если $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$; говорят, что некоторое свойство выполнено для *почти всех кривых* области D, если оно имеет место для всех кривых, лежащих в D, кроме, может быть, некоторого их подсемейства, модуль которого равен нулю. Говорят, что отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, является *отображением с конечным искажением длины* (пишут $f \in FLD$), если $f \in FMD$ и имеет (L)-свойство.

Напомним, что отображение $\varphi : X \to Y$ между метрическими пространствами X и Y называется *липшицевым,* если

$$\operatorname{dist}(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq M \operatorname{dist}(x_1, x_2)$$

для некоторой постоянной $M < \infty$ и всех x_1, $x_2 \in X$. Говорят, что отображение $\varphi : X \to Y$ *билипшицево,* если, оно, во-первых, липшицево, а во-вторых,

$$M^* \operatorname{dist}(x_1, x_2) \leq \operatorname{dist}(\varphi(x_1), \varphi(x_2))$$

для некоторой постоянной $M^* > 0$ и всех x_1, $x_2 \in X$.

Следующий результат получен в работе [2] (см. лемму 3.20).

Лемма 2. *Пусть* $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ *— отображение с конечным метрическим искажением. Тогда существует счетная последовательность компактных множеств* $C_k^* \subset D$ *такая, что* $|B| = 0$, *где* $B = D \setminus \bigcup_{k=1}^\infty C_k^*$ *и* $f|_{C_k^*}$ *взаимно однозначно и билипшицево для каждого* $k = 1, 2, \ldots$. *Более того,* f *дифференцируемо для всех* $x \in C_k^*$ *и* $J(x, f) \neq 0$.

Напомним, что отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется *абсолютно непрерывным на линиях* (пишут $f \in ACL$), если в любом n-мерном параллелепипеде P с ребрами, параллельными осям координат, и таком, что $\overline{P} \subset D$, все координатные функции $f = (f_1, \ldots, f_n)$ абсолютно непрерывны на почти всех прямых, параллельных осям координат. Следуя [5], *конденсатором* в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называем пару $E = (A, C)$, где A — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а C — компактное подмножество A. *Емкостью* конденсатора E называется величина

$$\operatorname{cap} E = \operatorname{cap}(A, C) = \inf_{u \in W_0(E)} \int_A |\nabla u|^n \, dm(x), \tag{2}$$

где $W_0(E) = W_0(A, C)$ — семейство неотрицательных непрерывных функций $u: A \to \mathbb{R}$ с компактным носителем в A таких, что $u(x) \geq 1$ при $x \in C$ и $u \in \in ACL$. В формуле (2), как обычно, $|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^n (\partial_i u)^2\right)^{1/2}$.

Следующие определения взяты из [5], гл. II, п. 3. Пусть $f: D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — открытое дискретное отображение, $\beta: [a, b) \to \mathbb{R}^n$ — некоторая кривая и $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Кривая $\alpha: [a, c) \to D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x, если 1) $\alpha(a) = x$; 2) $f \circ \alpha = = \beta|_{[a,c)}$; 3) если $c < c' \leq b$, то не существует кривой $\alpha': [a, c') \to D$ такой, что $\alpha = \alpha'|_{[a,c)}$ и $f \circ \alpha = \beta|_{[a,c')}$. Пусть f — открытое дискретное отображение и $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Тогда кривая β имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x (см. следствие 3.3 гл. II в [5]). Нам понадобится следующее утверждение (см. предложение 10.2 гл. II в [5]).

Лемма 3. *Пусть $E = (A, C)$ — произвольный конденсатор в $\mathbb{R}^n$ и Γ_E — семейство всех кривых вида $\gamma: [a, b) \to A$ с $\gamma(a) \in C$ и $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \varnothing$ для произвольного компакта $F \subset A$. Тогда $\operatorname{cap} E = M(\Gamma_E)$.*

Пусть $x_1, \ldots, x_k$ — различные точки множества $f^{-1}(\beta(a))$ и

$$m = \sum_{i=1}^{k} i(x_i, f).$$

Говорят, что последовательность кривых $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ есть *максимальная последовательность поднятий кривой β при отображении f с началом в точках $x_1, \ldots, x_k$*, если:

а) каждая кривая α_j есть максимальное поднятие кривой β при отображении f,

б) $\operatorname{card}\{j : a_j(a) = x_i\} = i(x_i, f)$, $1 \leq i \leq k$,

в) $\operatorname{card}\{j : a_j(t) = x\} \leq i(x, f)$ для всех $x \in D$ при всех t.

Пусть f — открытое дискретное отображение и $x_1, \ldots, x_k \in f^{-1}(\beta(a))$. Тогда кривая β имеет максимальную последовательность поднятий при отображении f с началом в точках $x_1, \ldots, x_k$ (см. теорему 3.2 гл. II в [5]).

Согласно следствию 3.4 гл. II в [5], справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть $f: G \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение, G — нормальная область отображения f, $m = N(f, G)$, $\beta: [a, b) \to fG$ — некоторая кривая. Тогда существуют кривые $\alpha_j: [a, b) \to G$, $1 \leq j \leq m$, имеющие следующие свойства*:

1) $f \circ \alpha_j = \beta$,

2) $\operatorname{card}\{j : a_j(t) = x\} = i(x, f)$ *для всех* $x \in G \cap f^{-1}\beta(t)$,

3) $|\alpha_1| \cup \ldots \cup |\alpha_m| = G \cap f^{-1}|\beta|$.

Пусть E — множество в $\mathbb{R}^n$ и $\gamma: \Delta \to \mathbb{R}^n$ — некоторая кривая. Обозначим $\gamma \bigcap E = \gamma(\Delta) \bigcap E$. Пусть γ локально спрямляема. Тогда

$$l(\gamma \bigcap E) = \left|E_\gamma\right|,$$

где

$$E_\gamma = l_\gamma(\gamma^{-1}(E)).$$

Выше $|A|$ обозначает длину множества $A \subset \mathbb{R}$, а функция $l_\gamma : \Delta \to \Delta_\gamma$ определена в п. 2 данной статьи. Заметим, что

$$E_\gamma = \gamma_0^{-1}(E),$$

где $\gamma_0 : \Delta_\gamma \to \mathbb{R}^n$ — натуральная параметризация кривой γ, и

$$l(\gamma \bigcap E) = \int\limits_{\Delta} \chi_E(\gamma(t))ds = \int\limits_{\Delta_\gamma} \chi_{E_\gamma}(s)ds.$$

3. Аналог неравенства Вяйсяля. Пусть α, β — кривые в $\mathbb{R}^n$, тогда запись $\alpha \subset \beta$ означает, что α является подкривой кривой β. Говорим, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2 (пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$), если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2. Пусть Γ_1, Γ_2 — произвольные семейства кривых с $\Gamma_1 > \Gamma_2$. Тогда $M(\Gamma_1) \le M(\Gamma_2)$ (см. теорему 6.4 в [7]).

Теорема 1. *Пусть $f: D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение с конечным искажением длины, Γ — семейство кривых в D, Γ' — семейство кривых в $\mathbb{R}^n$ и m — натуральное число такое, что выполнено следующее условие. Для каждой кривой $\beta \in \Gamma'$ найдутся кривые $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ семейства Γ такие, что $f \circ \alpha_j \subset \beta$ для всех j и равенство $\alpha_j(t) = x$ имеет место при всех $x \in G$, всех t и не более чем $i(x, f)$ індексах j. Тогда*

$$M(\Gamma') \le \frac{1}{m}\int\limits_D K_I(x, f)\rho^n(x)dm(x)$$

для любого семейства Γ путей γ в D и для каждой $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$.

Доказательство. Пусть множества B и C_k^* такие, как в лемме 2, и B_f — множество точек ветвления отображения f в D. Отметим, что $\left|B_f\right| = 0$ (см. предложение 3.16 в [2]). Полагая $B_0 = B \bigcup B_f$, $B_1 = C_1^* \setminus B_f$, $B_2 = C_2^* \setminus (B_1 \bigcup B_f), \ldots$,

$$B_k = C_k^* \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{k-1} B_l \bigcup B_f \right),$$

получаем счетное покрытие области D борелевскими множествами B_k, $k = 1, 2, \ldots$, причем $|B_0| = 0$. Поскольку отображение f имеет (N)-свойство, $|f(B_0)| = 0$. По лемме 2.13 в [2] $l(\bar\gamma \bigcap f(B_0)) = 0$ для почти всех кривых $\bar\gamma$ в области $f(D)$. Следовательно, согласно (L)-свойству также

$$l(\gamma \bigcap B_0) = 0 \tag{3}$$

для почти всех кривых $\bar\gamma$ в $f(D)$ и всех γ таких, что $f \circ \gamma = \bar\gamma$. Далее покажем справедливость соотношения (3) для почти всех $\tilde{\gamma} \in \Gamma'$ и всех γ таких, что $f \circ \gamma \subset \tilde{\gamma}$.

Предположим противное. Пусть Γ_1 — семейство всех кривых $\gamma' \in \Gamma'$, для которых

$$l(\gamma \cap B_0) > 0, \tag{4}$$

таких, что $f \circ \gamma \subset \gamma'$ для некоторой кривой γ. По предположению $M(\Gamma_1) > > 0$. Пусть Γ_2 — семейство всех подкривых γ'' семейства Γ_1, имеющих полное поднятие γ, такое, что выполнено свойство (4). Заметим, что $\Gamma_2 < \Gamma_1$, следовательно, $M(\Gamma_2) \geq M(\Gamma_1) > 0$. Полученное противоречие опровергает сделанное предположение.

Пусть $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$. Положим

$$\rho^*(x) = \begin{cases} \rho(x)/l(f'(x)), & x \in D \setminus B_0, \\ 0, & x \in B_0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{\rho}(y) = \frac{1}{m} \chi_{f(D \setminus B_0)}(y) \sup_C \sum_{x \in C} \rho^*(x),$$

где C пробегает все подмножества $f^{-1}(y)$ в $D \setminus B_0$ мощности не больше m. Заметим, что

$$\tilde{\rho}(y) = \frac{1}{m} \sup \sum_{i=1}^{s} \rho_{k_i}(y), \tag{5}$$

где точная верхняя грань берется по всем возможным наборам $\{k_{i_1}, \ldots, k_{i_s}\}$ таким, что $k_i \in \mathbb{N}$, $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$, и всем $s \leq m$, а

$$\rho_k(y) = \begin{cases} \rho^*(f_k^{-1}(y)), & y \in f(B_k), \\ 0, & y \notin f(B_k). \end{cases}$$

Здесь $f_k = f|_{B_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, инъективно. Из (5) следует, что функция $\tilde{\rho}(y)$ борелевская, так как множества $f(B_k)$ борелевские (см. раздел 2.3.2 в [8]). Пусть β — произвольная кривая семейства Γ'. По условию найдутся кривые $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ семейства Γ такие, что $f \circ \alpha_j \subset \beta$ для всех j и равенство $\alpha_j(t) = = x$ имеет место при всех $x \in G$, всех t и не более чем при $i(x, f)$ индексах j. Последнее условие означает, что на B_k кривые α_j не пересекаются, поскольку в каждой точке B_k отображение f является локальным гомеоморфизмом и, значит, $i(x, f) = 1$. Согласно результатам раздела 3.2.5 для $m = 1$ в [8], на каждом B_k по аддитивности интеграла будем иметь

$$\int_\beta \tilde{\rho}\, ds \geq \sum_{j=1}^{m} \int_{f \circ \alpha_j} \tilde{\rho}\, ds = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(f \circ \alpha_j) \cap f(B_k)} \tilde{\rho}\, ds \geq$$

$$\geq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_j \cap B_k} \rho(x)\, ds = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \int_{\alpha_j} \rho(x)\, ds \geq \frac{1}{m} m = 1$$

для почти всех кривых $\beta \in \Gamma'$. Следовательно, функция $\tilde{\rho} \in \operatorname{adm} \Gamma' \setminus \Gamma_0$, где $M(\Gamma_0) = 0$ и потому

$$M(\Gamma') \leq \int\limits_{f(D)} \tilde{\rho}^n(y)\,dm(y). \qquad (6)$$

Согласно результатам раздела 2.3.5 для $m = n$ в [8], имеем

$$\int\limits_{B_k} K_I(x, f)\rho^n(x)\,dm(x) = \int\limits_{f(D)} \rho_k^n(y)\,dm(y). \qquad (7)$$

Отметим также, что по неравенству Гельдера для сумм

$$\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{s} \rho_{k_i}(y)\right)^n \leq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{s} \rho_{k_i}^n(y) \qquad (8)$$

для произвольного $1 \leq s \leq m$ и произвольного набора $\{k_1, \ldots, k_s\}$ длины s, $k_i \in \mathbb{N}$, $k_i \neq k_j$, если $i \neq j$.

Следовательно, по теореме Лебега из (6) – (8) получаем

$$\frac{1}{m}\int\limits_{D} K_I(x, f)\rho^n(x)\,dm(x) = \frac{1}{m}\int\limits_{f(D)} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^n(y)\,dm(y) \geq$$

$$\geq \frac{1}{m}\int\limits_{f(D)} \sup_{\substack{\{k_1,\ldots,k_s\}, k_i\in\mathbb{N},\\ k_i\neq k_j, i\neq j}} \sum_{i=1}^{s} \rho_{k_i}^n(y)\,dm(y) \geq \int\limits_{f(D)} \tilde{\rho}^n(y)\,dm(y) \geq M(\Gamma').$$

Теорема доказана.

4. Приложения. Для данного семейства Γ кривых в $\mathbb{R}^n$ обозначим

$$M_{K_I(\cdot, f)}(\Gamma) = \inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x) K_I(x, f)\,dm(x).$$

Пусть $E = (A, C)$ — произвольный конденсатор и ω — неотрицательная измеримая функция. Тогда *весовая* ω*-емкость* конденсатора E определяется следующим образом:

$$\operatorname{cap}_\omega E = \operatorname{cap}_\omega(A, C) = \inf \int\limits_{A} |\nabla u(x)|^n \omega(x)\,dm(x), \qquad (9)$$

где точная нижняя грань берется по всем функциям $u \in C_0^\infty(A)$ с $u \geq 1$ на C. Заметим, что если $\omega \equiv 1$, то $\operatorname{cap}_\omega E$ совпадает с $\operatorname{cap} E$ в смысле определения, данного соотношением (2).

Следующие утверждения обобщают известные модульные и емкостные неравенства для квазирегулярных отображений (см. разделы 9 и 10 в [5]).

Теорема 2. *Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение с конечным искажением длины, G — нормальная область f, Γ' — семейство кривых в $G' = f(G)$ и Γ — семейство α кривых в G таких, что $f \circ \alpha \subset \Gamma'$. Тогда*

$$M(\Gamma') \leq \frac{1}{N(f, G)} \int\limits_{D} K_I(x, f)\rho^n(x)\,dm(x)$$

для каждой $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. *В частности,*

$$M(\Gamma') \leq \frac{1}{N(f, G)} M_{K_I(\cdot, f)}(\Gamma).$$

Доказательство непосредственно следует из теоремы 1 и леммы 4.

Пусть $f: D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение и $E = (A, C)$ — конденсатор в D. Назовем величину

$$M(f, C) = \inf_{y \in f(C)} \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap C} i(x, f)$$

минимальной кратностью отображения f в C.

Теорема 3. *Пусть $f: D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение с конечным искажением длины, $E = (A, C)$ — конденсатор в D. Тогда*

$$\operatorname{cap} fE \leq \frac{1}{M(f, C)} \operatorname{cap}_{K_I(\cdot, f)} E. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $E = (A, C)$ — конденсатор в D, тогда $fE = (fA, fC)$ является конденсатором в $f(D)$. Пусть Γ_E и Γ_{fE} — семейства кривых в смысле обозначений леммы 3. Положим $m = M(f, C)$. Пусть $\beta: [a, b) \to f(A)$ — произвольная кривая семейства Γ_{fE}. Тогда $C \cap f^{-1}(\beta(a))$ содержит точки $x_1, \ldots, x_k$ такие, что

$$m' = \sum_{l=1}^{k} i(x_l, f) \geq m.$$

Согласно теореме 3.2 гл. II в [5], существует максимальная последовательность поднятий $\alpha_j: [a, c_j) \to D$ кривой β, $1 \leq j \leq m'$, при отображении f с началом в точках $x_1, \ldots, x_k$. Тогда каждая кривая α_j принадлежит семейству Γ_E. Отсюда следует, что семейства $\Gamma = \Gamma_E$ и $\Gamma' = \Gamma_{fE}$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Следовательно, по лемме 3

$$\operatorname{cap} fE \leq \frac{1}{M(f, C)} M_{K_I(\cdot, f)}(\Gamma_E).$$

Окончательно, (10) следует из соотношения

$$M_{K_I(\cdot, f)}(\Gamma_E) \leq \operatorname{cap}_{K_I(\cdot, f)} E,$$

поскольку функция $\rho(x) = |\nabla u(x)|$ является допустимой для Γ_E при каждом значении u, содержащемся в определении $\operatorname{cap}_{K_I(\cdot, f)} E$.

1. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982.
2. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. Anal. Math. – 2004. – **93**. – P. 215 – 236.
3. *Martio O., Väisälä J.* Elliptic equations and maps of bounded length distortion // Math. Ann. – 1988. – **282**. – P. 423 – 443.
4. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical function theory and non-linear analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001.
5. *Rickman S.* Quasiregular mappings // Results Math. and Relat. Areas. – 1993. – **26**, № 3.
6. *Koskela P., Onninen J.* Mappings of finite distortion: capacity and modulus inequalities // J. reine und angew. Math. – 2006. – **599**. – S. 1 – 26.
7. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – 1971. – **229**.
8. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987.

Получено 21.07.08