УДК 517.5

В. Ф. Бабенко
(Днепропетр. нац. ун-т, Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк),
Н. В. Парфинович (Днепропетр. нац. ун-т)

НЕРАВЕНСТВА ТИПА БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ СПЛАЙНОВ ДЕФЕКТА 2

New exact inequalities of a Bernstein type for periodic polynomial splines of order r and defect 2 are obtained.

Отримано нові точні нерівності типу Бернштейна для періодичних поліноміальних сплайнів порядку r дефекту 2.

Во многих случаях для тригонометрических полиномов и сплайнов минимального дефекта известны точные неравенства типа Бернштейна, которые играют важную роль во многих вопросах теории приближения (обзор и изложение многих известных точных неравенств, а также библиографию можно найти, например, в [1, 2]). Мы установим некоторые точные неравенства типа Бернштейна для сплайнов дефекта 2.

Пусть L_p, $1 \le p \le \infty$, — пространства 2π-периодических функций $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с соответствующими нормами $\|\cdot\|_{L_p} = \|\cdot\|_p$, C — пространство непрерывных 2π-периодических функций.

Через $S^2_{2n,r}$, $r = 1, 2, \ldots$, обозначим пространство 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r дефекта 2 с узлами в точках $t_k = \dfrac{2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$, т. е. множество 2π-периодических функций s, удовлетворяющих следующим условиям:

1) s имеет непрерывные производные до порядка $r-2$ включительно;

2) для каждого $k \in \mathbb{Z}$ найдется алгебраический полином $p_k(x)$ степени r такой, что $s(x) = p_k(x)$ для $x \in (t_k, t_{k+1})$.

Отметим, что $s^{(r-1)}$ может иметь разрывы (первого рода) в точках t_k, $k \in \mathbb{Z}$, и в этих точках полагаем

$$s^{(r-1)}(t_k) = \frac{1}{2}\Big[s^{(r-1)}(t_k+0) + s^{(r-1)}(t_k-0) \Big].$$

Наилучшим приближением функции f подпространством констант в пространстве L_p, $1 \le p \le \infty$, называется величина

$$E(f)_p = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|f - c\|_p .$$

Функции Бернулли определяются следующим образом (см. [3, с. 72]). $B_1(x)$ — 2π-периодическая функция, которая на $[0, 2\pi)$ задается так:

$$B_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2\pi}, & x \in (0, 2\pi), \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Если $r > 1$, то $B_r(x)$ есть $(r-1)$-й 2π-периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от $B_1(x)$.

Положим $\psi_{n,r}(x) = -\frac{2\pi}{n^r} B_r(nx)$ (заметим, что $\psi_{n,r}(x) \in S^2_{2n,r}$).

Докажем следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. *Для любого сплайна* $s \in S^2_{2n,r}$ *и любого* $j \in \mathbb{Z}$ *имеют место неравенства*

$$\sup_{t_j<t<t_{j+1}} \left| s^{(r)}(t) \right| \leq \frac{E(s)_\infty}{E(\psi_{n,r})_\infty} \sup_{t_j<t<t_{j+1}} \left| \psi'_{n,1}(t) \right|, \tag{1}$$

$$\sup_{t_j<t<t_{j+1}} \left| s^{(r-1)}(t) \right| \leq \frac{E(s)_\infty}{E(\psi_{n,r})_\infty} \sup_{t_j<t<t_{j+1}} \left| \psi_{n,1}(t) \right|, \tag{2}$$

$$\omega\left(s^{(r-1)}, (t_j, t_{j+1})\right) \leq \frac{E(s)_\infty}{E(\psi_{n,r})_\infty} \omega\left(\psi_{n,1}, (t_j, t_{j+1})\right), \tag{3}$$

где $\omega(f, M) = \sup_{t', t'' \in M} \left| f(t') - f(t'') \right|$ — *колебание функции* f *на множестве* $M \subset \mathbb{R}$.

***Следствие* 1.** *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. *Для любого* $s \in S^2_{2n,r}$

$$\bigvee_0^{2\pi} \left[s^{(r-1)} \right] \leq \frac{E(s)_\infty}{E(\psi_{n,r})_\infty} \bigvee_0^{2\pi} \left[\psi_{n,1}(t) \right], \tag{4}$$

$$\left\| s^{(r-1)} \right\|_\infty \leq \frac{E(s)_\infty}{E(\psi_{n,r})_\infty} \left\| \psi_{n,1}(t) \right\|_\infty. \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. *Для любого* $s \in S^2_{2n,r}$ *и любого* $j \in \mathbb{Z}$

$$\bigvee_{t_j}^{t_{j+1}} \left[s^{(r-2)} \right] \leq \frac{E(s)_\infty}{E(\psi_{n,r})_\infty} \bigvee_{t_j}^{t_{j+1}} \left[\psi_{n,2} \right] \tag{6}$$

и, следовательно,

$$\bigvee_0^{2\pi} \left[s^{(r-2)} \right] \leq \frac{E(s)_\infty}{E(\psi_{n,r})_\infty} \bigvee_0^{2\pi} \left[\psi_{n,2} \right]. \tag{7}$$

Теорема 3. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. *Для любого* $s \in S^2_{2n,r}6$ *и любого* $p \in [1, \infty)$

$$\left\| s^{(r-1)} \right\|_p \leq \frac{E(s)_\infty}{E(\psi_{n,r})_\infty} \left\| \psi_{n,1}(t) \right\|_p. \tag{8}$$

Замечание. Очевидно, что неравенства (1) – (8) обращаются в равенства для функции $s = \psi_{n,r}$ и, следовательно, являются точными.

***Доказательство теоремы* 1.** Пусть $s \in S^2_{2n,r}$. Положим

$$\varphi(t) = \frac{E(s)_\infty}{E(\psi_{n,r})_\infty} \psi_{n,r}(t).$$

В силу линейности функций $\varphi^{(r-1)}$ и $s^{(r-1)}$ на (t_j, t_{j+1}), $j = \overline{0, n-1}$, соотношения (1) и (3) будут следовать из соотношения (2). Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить соотношение (2), т. е. доказать, что для любого $j = \overline{0, n-1}$

$$\sup_{t_j<t<t_{j+1}} \left| s^{(r-1)}(t) \right| \;\le\; \sup_{t_j<t<t_{j+1}} \left| \varphi^{(r-1)}(t) \right|. \tag{9}$$

Предположим, что найдется j_0 такое, что на интервале (t_{j_0}, t_{j_0+1}) соотношение (9) не выполняется, т. е. имеет место по крайней мере одно из неравенств

$$\left| s^{(r-1)}(t_{j_0}+0) \right| \;>\; \left| \varphi^{(r-1)}(t_{j_0}) \right|,$$

$$\left| s^{(r-1)}(t_{j_0}-0) \right| \;>\; \left| \varphi^{(r-1)}(t_{j_0+1}) \right|.$$

Пусть, для определенности, $\left| s^{(r-1)}(t_{j_0}+0) \right| > \left| \varphi^{(r-1)}(t_{j_0}) \right|$. Тогда при подходящем $0<|\lambda|<1$ имеем

$$\lambda s^{(r-1)}(t_{j_0}+0) \;=\; \varphi^{(r-1)}(t_{j_0}). \tag{10}$$

Положим $\delta(t) = \varphi(t) - \alpha - \lambda(s(t)-\beta)$, где α и β — константы наилучшего равномерного приближения для функций $\varphi(t)$ и $s(t)$ соответственно.

Отметим, что $\delta^{(r-1)}$ на каждом из интервалов (t_j, t_{j+1}) может менять знак не более одного раза, кроме того, перемена знака у $\delta^{(r-1)}$ возможна при переходе аргумента через точку t_j. В силу (10) $\delta^{(r-1)}$ не меняет знак на $(t_{j_0}$, $t_{j_0+1})$ и, значит, $\delta^{(r-1)}$ имеет на периоде не более $2n-1$ перемен знака. С другой стороны, так как $E(\varphi)_\infty > E(\lambda s)_\infty$, $\delta(t)$ имеет по крайней мере одну перемену знака между любыми двумя соседними точками экстремума функции $\varphi(t)-\alpha$. Значит, $\delta(t)$ имеет на периоде не менее $2n$ перемен знака. Тогда в силу теоремы Ролля у $\delta^{(r-1)}$ будет также не менее $2n$ перемен знака. Полученное противоречие доказывает, что для любого $j=\overline{0, n-1}$

$$\sup_{t_j<t<t_{j+1}} \left| s^{(r-1)}(t) \right| \;\le\; \sup_{t_j<t<t_{j+1}} \left| \varphi^{(r-1)}(t) \right|.$$

Таким образом, соотношение (2) установлено.
Теорема 1 доказана.

В силу линейности функций $s^{(r-1)}$ и $\psi_{n,1}$ на каждом интервале (t_j, t_{j+1}) и $\dfrac{2\pi}{n}$-периодичности функции $\psi_{n,1}$ из соотношений (2) и (3) следуют утверждения (4) и (5).

***Доказательство теоремы* 2.** Пусть сначала промежуток $[t_j, t_{j+1}]$ таков, что $s^{(r-1)}$ имеет нуль в (t_j, t_{j+1}). Поскольку в силу (5)

$$\left\| s^{(r-1)} \right\|_\infty \;\le\; \left\| \varphi^{(r-1)} \right\|_\infty$$

и в силу (1)

$$\left| s^{(r)}(t) \right| \;\le\; \left| \varphi^{(r)}(t) \right| \;=\; \frac{E(s)_\infty}{E(\psi_{n,r})_\infty}, \quad t \in (t_j, t_{j+1}),$$

для каждого $x \ge 0$

$$\operatorname{mes}\left\{ t \in (t_j, t_{j+1}) : \left| \varphi^{(r-1)}(t) \right| \ge x \right\} \;\ge\; \operatorname{mes}\left\{ t \in (t_j, t_{j+1}) : \left| s^{(r-1)}(t) \right| \ge x \right\}. \tag{11}$$

Из (11) непосредственно следует, что при всех $p \in [1, \infty)$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left| s^{(r-1)}(t) \right|^p dt \;\le\; \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left| \varphi^{(r-1)}(t) \right|^p dt \tag{12}$$

и, в частности,

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left| s^{(r-1)}(t) \right| dt \ \le \ \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left| \varphi^{(r-1)}(t) \right| dt ,$$

так что

$$\bigvee_{t_j}^{t_{j+1}} \left[s^{(r-2)} \right] \ \le \ \bigvee_{t_j}^{t_{j+1}} \left[\varphi^{(r-2)} \right]. \tag{13}$$

Пусть теперь промежуток $\left[t_j, t_{j+1}\right]$ таков, что $s^{(r-1)}$ не обращается в нуль на интервале (t_j, t_{j+1}). В этом случае $s^{(r-2)}\Big|_{\left[t_j, t_{j+1}\right]}$ — монотонная функция и, следовательно,

$$\sup_{t_j \le t \le t_{j+1}} \left| s^{(r-2)}(t) \right| \ = \ \max\left\{ \left| s^{(r-2)}(t_j) \right|, \left| s^{(r-2)}(t_{j+1}) \right| \right\}.$$

Пусть, для определенности,

$$\sup_{t_j \le t \le t_{j+1}} \left| s^{(r-2)}(t) \right| \ = \ \left| s^{(r-2)}(t_j) \right|.$$

Отметим также, что

$$\left\| \varphi^{(r-2)} \right\|_\infty \ = \ \left| \varphi^{(r-2)}(t_j) \right| \ = \ \left| \varphi^{(r-2)}(t_{j+1}) \right|.$$

Установим неравенство

$$\sup_{t_j \le t \le t_{j+1}} \left| s^{(r-2)}(t) \right| \ = \ \left| s^{(r-2)}(t_j) \right| \ \le \ \left| \varphi^{(r-2)}(t_j) \right|, \tag{14}$$

откуда и будет следовать соотношение (13) для рассматриваемого случая.

Предположим, что вопреки (14)

$$\sup_{t_j \le t \le t_{j+1}} \left| s^{(r-2)}(t) \right| \ = \ \left| s^{(r-2)}(t_j) \right| \ > \ \left| \varphi^{(r-2)}(t_j) \right|.$$

Тогда найдется λ, $0 < |\lambda| < 1$, такое, что $\lambda s^{(r-2)}(t_j) = \varphi^{(r-2)}(t_j)$ и, следовательно, $\left| \lambda s^{(r-2)}(t_{j+1}) \right| \le \left| \varphi^{(r-2)}(t_{j+1}) \right|$.

Пусть $\delta(t) = \varphi(t) - \alpha - \lambda\left(s(t) - \beta\right)$, где α и β — константы наилучшего равномерного приближения функций $\varphi(t)$ и $s(t)$ соответственно.

Поскольку $\delta^{(r-2)} \in S^2_{2n,2}$ и $\delta^{(r-2)}(t_j) = 0$, $\delta^{(r-2)}$ на промежутке $\left[t_j, t_{j+1}\right]$ может иметь не более трех перемен знака. Тогда на периоде у $\delta^{(r-2)}$ будет не более $2n-1$ перемен знака.

С другой стороны, как и при доказательстве теоремы 1, убеждаемся, что $\delta(t)$ имеет на периоде не менее $2n$ перемен знака. Но тогда в силу теоремы Ролля $\delta^{(r-2)}(t)$ меняет знак на периоде не менее $2n$ раз.

Полученное противоречие доказывает неравенство (14). Из (14) с учетом монотонности $s^{(r-2)}$ на $\left[t_j, t_{j+1}\right]$ следует, что

$$\bigvee_{t_j}^{t_{j+1}} \left[s^{(r-2)} \right] \ \le \ \bigvee_{t_j}^{t_{j+1}} \left[\varphi^{(r-2)} \right]$$

также для интервалов, в которых $s^{(r-1)}$ не имеет нулей.

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы **3.** При доказательстве теоремы 2 установлено, что если $s^{(r-1)}$ имеет нуль в (t_j, t_{j+1}), то имеет место неравенство (12). Покажем, что это неравенство имеет место и для таких интервалов, в которых $s^{(r-1)}$ не имеет нулей. Для этого покажем, что для всех $x \in [0, 2\pi/n]$ выполняется неравенство

$$\int_0^x r\left(s^{(r-1)}, t\right) dt \le \int_0^x r\left(\varphi^{(r-1)}, t\right) dt, \quad x \in [0, 2\pi/n], \tag{15}$$

где $r(f, t)$ — невозрастающая перестановка (см., например, [3], гл. 3) сужения функции $|f|$ на $[t_j, t_{j+1}]$.

Пусть $\Delta(x) = \int_0^x r\left(\varphi^{(r-1)}, t\right) dt - \int_0^x r\left(s^{(r-1)}, t\right) dt$. В рассматриваемом случае обе функции $r\left(\varphi^{(r-1)}, t\right)$ и $r\left(s^{(r-1)}, t\right)$ линейны на $[0, 2\pi/n]$, так, что их разность либо не меняет знак на интервале $(0, 2\pi/n)$ $\Big($и тогда в силу (6) для любого $t \in (0, 2\pi/n)$ будет $r\left(s^{(r-1)}, t\right) \le r\left(\varphi^{(r-1)}, t\right)\Big)$, либо меняет знак ровно один раз в точке $x_0 \in (0, 2\pi/n)$, причем с „+” на „–”.

В первом случае неравенство (15) очевидно. Во втором случае, так как $\Delta'(x) = r\left(\varphi^{(r-1)}, x\right) - r\left(s^{(r-1)}, x\right)$, $\Delta(x)$ возрастает на интервале $(0, x_0)$ и убывает на $(x_0, 2\pi/n)$. Кроме того, $\Delta(0) = 0$ и $\Delta(2\pi/n) \ge 0$ (последнее неравенство имеет место в силу (6)). Таким образом, разность $\Delta(x)$ неотрицательна на $[0, 2\pi/n]$, что эквивалентно (15).

Учитывая (15) и предложение 3.2.5 из [3], видим, что (12) имеет место также для интервалов (t_j, t_{j+1}), в которых $s^{(r-1)}$ не имеет нулей.

Итак, для любого $p \in [1, \infty)$ и любого $j = \overline{0, n-1}$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left|s^{(r-1)}(t)\right|^p dt \le \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left|\varphi^{(r-1)}(t)\right|^p dt,$$

следовательно,

$$\left\|s^{(r-1)}\right\|_p = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left|s^{(r-1)}(t)\right|^p dt\right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left|\varphi^{(r-1)}(t)\right|^p dt\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} \left|\varphi^{(r-1)}(t)\right|^p dt\right)^{1/p} = \left\|\varphi^{(r-1)}\right\|_p.$$

Таким образом, из последнего неравенства, с учетом определения функции φ, получаем неравенство (8) для всех $p \in [1, \infty)$.

Теорема 3 доказана.

1. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.
2. *Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 591 с.
3. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.

Получено 30.05.08,
после доработки — 30.04.09