УДК 519.21

И. А. Ерисова (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ОБРАТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ*

We obtain conditions for the weak convergence of solutions of backward stochastic equations in the case of weak convergence of coefficients.

Одержано умови слабкої збіжності розв'язків обернених стохастичних рівнянь за слабкої збіжності коефіцієнтів.

1. Введение. Проблемы, связанные с изучением тепловых и диффузионных процессов в средах с сильно изменяющимися свойствами во времени и по пространственным переменным, давно рассматриваются в математической литературе (обзоры имеющихся результатов можно найти в [1, 2]). Математически это можно ассоциировать с задачей о предельном переходе в уравнениях со слабосходящимися коэффициентами. Для квазилинейных уравнений с одной пространственной переменной соответствующая теорема доказана в [1] (теорема 1). Аналогичный результат можно доказать в многомерном случае вероятностными методами, использовав введенные Э. Парду и С. Пенг в работе [3] уравнения, названные ими обратными стохастическими уравнениями (ОСУ). Предложенный ими метод позволил дать вероятностное представление решений нелинейных параболических уравнений. Таким образом, имея предельные теоремы для решений ОСУ, мы получаем и предельные теоремы для решений нелинейных уравнений в частных производных. Кроме того, представляет и самостоятельный интерес развитие асимптотических методов для ОСУ.

В настоящей работе исследуется сходимость мер, порожденных решениями обратных стохастических уравнений с коэффициентами, которые зависят от малого параметра ε, при стремлении последнего к нулю. Известно, что для сходимости решений уравнений в частных производных [1, 2, 4] и для слабой сходимости решений уравнений Ито [5, 6] слабой сходимости коэффициентов уравнений недостаточно. Необходимо накладывать дополнительные условия на коэффициенты при старших производных и, соответственно, на коэффициент диффузии. Например, в [6] (теорема 11.3.3) предполагается, что он удовлетворяет условию типа условия Липшица. В этой статье, следуя [1, 2], будем требовать равностепенную непрерывность по x коэффициентов диффузии в некотором интегральном смысле.

В п. 1 вводятся обозначения и даются определения, основная теорема доказывается в п. 2. В п. 3 приводятся примеры применения полученного результата.

Пусть R^n — n-мерное евклидово пространство, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение его элементов. Обозначим пространство непрерывных функций $x(t)$, $t \in [0,T]$, со значениями в R^n через $C\big([0,T];R^n\big)$. На этом пространстве будем рассматривать топологию равномерной сходимости и топологию Мейера – Чжена [7]. Для слабой сходимости в этих топологиях используем обозначения $\Longrightarrow$ и $\overset{M-Z}{\Longrightarrow}$ соответственно. Отметим, что использование топологии Мейера – Чжена играет ключевую роль, так как не удается доказать относительную компактность семейства мер, порожденных

*Выполнена при поддержке фонда совместных научных проектов НАН Украины и Российского фонда фундаментальных исследований (№ 104).

исследуемыми процессами, в более сильной топологии Скорохода на пространстве $D\big([0,T];R^p\big)$ — пространстве непрерывных справа, имеющих левосторонние пределы функций $x(t)$, $t\in[0,T]$, со значениями в R^p. Топология Мейера – Чжена является метрической и может быть введена как топология, порожденная метрикой $d(x,y)$:

$$d(x,y)=\int\limits_0^T\big(|x(s)-y(s)|\wedge 1\big)ds,\quad x,\ y\in D([0,T];R^p).$$

Сходимость в метрике d равносильна сходимости по мере Лебега. Через $\rho(h)$ будем обозначать функции типа модуля непрерывности, т. е. непрерывные в точке $h=0$, неотрицательные, неубывающие при $h\geq 0$ функции, для которых $\rho(0)=0$. Буквой C обозначены различные постоянные, не зависящие от ε, $I(A)$ — индикатор события A. Далее, $z(j)$ — вектор, у которого на j-м месте находится z_j, а остальные координаты равны нулю. Пусть Q — некоторая область. Для функциональных пространств используем обычные обозначения [8]: $C^k(Q)$, $L_p(Q)$, $L_{p,\mathrm{loc}}(Q)$, $W_p^{1,2}(Q)$, $W_{p,\mathrm{loc}}^{1,2}(Q)$, $C_0^\infty(Q)$ и т. д. Нормы в пространствах обозначим символом $\|\,\|$ с соответствующим знаком внизу, слабую сходимость функций в $L_{2,\mathrm{loc}}$ — символом $\rightharpoonup$. Для $\alpha\in(0,1]$ положим

$$|u|_{0,\alpha}(Q)=\sup_{(t,x)\in Q}|u(t,x)|+\sup_{\substack{(t,x),\ (\tau,y)\in Q\\ (t,x)\neq(\tau,y)}}\frac{|u(t,x)-u(\tau,y)|}{(|x-y|+|t-\tau|^{1/2})^\alpha}.$$

Для области V через ∂V обозначим ее границу. Гладкость области определяется гладкостью ее границы [8], $V\in C^2$, если $\partial V\in C^2$. Пусть $Q_l=\big\{x\colon -l<x_i<l,$ $i=1,2,\ldots,n\big\}$ — n-мерный куб и $V\in R^n$ — область с гладкой границей класса C^2, содержащаяся в Q_l. Для функции $\varphi(t,x)\in C_0^\infty([0,T]\times V)$ положим

$$\Phi_{i,j}(t,x)=\int\limits_{-l}^{x_i}\int\limits_{-l}^{x_j}\varphi(t,x_1,\ldots,x_{i-1},u,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},v,x_{j+1},\ldots,x_n)dvdu$$

и определим норму

$$\langle\varphi\rangle_{ij}^\alpha\big([0,T]\times V\big)=\|\varphi\|_{L_2([0,T]\times V)}+|\Phi_{ij}|_{0,\alpha}([0,T]\times V).$$

Для области $Q=[0,T]\times V$ обозначим

$$\Gamma_T=\Big\{(t,x)\colon(t\in[0,T),x\in\partial V)\cup(t=T,x\in V)\Big\}.$$

Пусть $D\in R^n$ — область с гладкой границей класса C^2, тогда для области $\tilde Q=[0,T]\times D$ аналогично введем

$$\tilde\Gamma_T=\Big\{(t,x)\colon(t\in[0,T),x\in\partial D)\cup(t=T,x\in D)\Big\}.$$

Через $(\Omega,\mathcal F,\mathrm P)$ обозначим вероятностное пространство, где $\Omega=C([0,T];R^n)\times$ $\times\, C([0,T];R^k)$, $\mathcal F$ — σ-алгебра борелевских подмножеств этого множества, $\mathrm E$ — символ математического ожидания. Если $\xi(t)$, $t\in[0,T]$, — случайный процесс, то $\mathcal F_t^\xi$ — наименьшая фильтрация, порожденная $\xi(s)$, $s\in[0,t]$. Рассмотрим решения ОСУ в виде

$$Y^\varepsilon(t) = g^\varepsilon\big(X^\varepsilon(T)\big) + \int\limits_t^T f^\varepsilon\big(s, X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s)\big)ds - \int\limits_t^T Z^\varepsilon(s)dw(s), \qquad (1.1)$$

где

$$X^\varepsilon(t) = x + \int\limits_0^t b^\varepsilon(s, X^\varepsilon(s))ds + \int\limits_0^t \sigma^\varepsilon(s, X^\varepsilon(s))dw(s). \qquad (1.2)$$

В уравнениях (1.1) и (1.2) $w(t)$ — n-мерный винеровский процесс, функции $g^\varepsilon(x)$, $f^\varepsilon(s,x,y) \in R^k$, $Z^\varepsilon(t)$ — матричнозначный процесс размерности $k\times n$, $X^\varepsilon(t) \in R^n$, $b^\varepsilon(t,x)$, $\sigma^\varepsilon(t,x)$ — векторная и матричная функции соответствующих размерностей. Будем предполагать, что уравнение (1.2) при каждом $\varepsilon > 0$ имеет сильное решение. В дальнейшем $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^w$.

Пара $\mathcal{F}_t$-согласованных процессов $(Y^\varepsilon(t),\ Z^\varepsilon(t))$ со значениями в $R^k \times R^{k\times n}$ называется решением задачи (1.1), если:

a) $E\displaystyle\int_0^T |Z^\varepsilon(t)|^2 dt < \infty$,

b) равенство (1.1) выполнено с вероятностью 1.

Меру, соответствующую процессу X^ε на $C([0,T];R^n)$, обозначим через μ^ε, а меру, соответствующую процессу Y^ε на $C([0,T];R^k)$, — через ν^ε. В работе [9] доказана слабая сходимость $\nu^\varepsilon \Longrightarrow \nu$ для функций $f^\varepsilon(t,x,y)$, имеющих при каждом y сильные в L_{n+1} пределы. От коэффициентов уравнения (1.2) требовалось выполнение условий (N) и (V) работы [5]. Как отмечено выше, в настоящей статье мы исследуем слабую сходимость мер при слабой в $L_{2,\mathrm{loc}}$ сходимости коэффициентов уравнений (1.1), (1.2).

Введем условия для коэффициентов уравнений. Пусть $a^\varepsilon = \sigma^\varepsilon(\sigma^\varepsilon)^*$, где $*$ — символ транспонирования. Для коэффициентов $b_i^\varepsilon(t,x)$, $a_{ij}^\varepsilon(t,x)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, выполняются следующие условия:

Условие (I):

I_1. Функции $b_i^\varepsilon(t,x)$ измеримы, а функции $a_{i,j}^\varepsilon(t,x)$ непрерывны (для $n = 1$ лишь измеримы);

I_2. Существуют постоянные $0 < \lambda \le \Lambda$ такие, что

$$|b_i^\varepsilon(t,x)| + |a_{i,j}^\varepsilon(t,x)| \le \Lambda, \quad (a^\varepsilon(t,x)\theta,\theta) \ge \lambda|\theta|^2$$

для любого вектора $\theta \in R^n$.

При условии I_2 для решений уравнения (1.2) справедливы оценки [10, с. 203]:

$$\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]} |X^\varepsilon(t)|^{2k} \le c\,(1 + |x|^{2k}), \quad k = 1,2,\ldots, \qquad (1.3)$$

$$\mathrm{E}\,|X_t^\varepsilon - X_s^\varepsilon|^4 \le c\,|t-s|^2. \qquad (1.4)$$

Следовательно, семейство мер μ^ε слабо компактно на $C([0,T];R^n)$.

С коэффициентами $(b^\varepsilon, a^\varepsilon)$ свяжем операторы L^ε:

$$L^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^\varepsilon(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i^\varepsilon(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

и введем условие (H). Пусть функция $u^\varepsilon(t,x)$ есть решение граничной задачи

$$L^\varepsilon u^\varepsilon(t,x) = \hat{f}^\varepsilon(t,x), \quad t \in [0,T), x \in D, \qquad u^\varepsilon|_{\tilde{\Gamma}_T} = 0 \tag{1.5}$$

для произвольной ограниченной области D с границей класса C^2.

Условие (H): Если $\|\hat{f}^\varepsilon\|_{L_2([0,T]\times D)} \leq \mathrm{const}$, то $\|u^\varepsilon\|_{W_2^{1,2}([0,T]\times D)} \leq \mathrm{const}$.

Отметим, что условие (I) достаточно для справедливости условия (H) при $n = 1$ [4] (теорема 1.1), $n = 2$ [11] (теорема 3). Условие (H) выполнено, если матрица $a^\varepsilon(t,x)$ удовлетворяет условию Кордеса [12] (теорема 2.1) или равномерному по ε условию Липшица по x.

Рассмотрим граничную задачу (1.5) в области $V \in C^2$:

$$L^\varepsilon u^\varepsilon(t,x) = \hat{f}^\varepsilon(t,x), \quad t \in [0,T), \ \ x \in V, \qquad u^\varepsilon\big|_{\Gamma_T} = 0, \tag{1.6}$$

и предположим, что функция $\hat{f}^\varepsilon(t,x) \in L_{n+1}([0,T]\times V)$. Решение (1.6) принадлежит классу $W_{n+1}^{1,2}([0,T]\times V)$, и для него справедлива следующая оценка [8] (теорема 4.2.5): если $\|\hat{f}^\varepsilon\|_{L_{n+1}([0,T]\times V)} \leq \mathrm{const}$, то существует постоянная $\gamma \in (0,1)$, зависящая от n, λ, Λ и не зависящая от ε, такая, что

$$|u^\varepsilon|_{0,\gamma}([0,T]\times V) \leq \mathrm{const}. \tag{1.7}$$

Введем следующее условие.

Условие (II): Существуют измеримые функции $a_{ij}(t,x)$ и $b_i(t,x)$ такие, что:

II_1. $a_{ij}^\varepsilon(t,x) \rightharpoonup_{\varepsilon\to 0} a_{ij}(t,x)$.

II_2. $b_i^\varepsilon(t,x) \rightharpoonup_{\varepsilon\to 0} b_i(t,x)$.

II_3. Функция $a_{ij}^\varepsilon(t,x)$ удовлетворяет следующему условию: для любого $l > 0$ существует функция $\rho_l(h)$ типа модуля непрерывности такая, что для параметра γ из (1.7), для любого $\varepsilon > 0$ и любой $\varphi(t,x) \in C_0^\infty([0,T]\times V)$

$$\left|\int_0^T\int_V \left[a_{ij}^\varepsilon(t,x+z(k)) - a_{ij}^\varepsilon(t,x)\right]\varphi(t,x)dxdt\right| \leq$$
$$\leq \rho_l\big(|z(k)|\big)\langle\varphi\rangle_{ij}^\gamma([0,T]\times V).$$

II_4. Для функций $b_i(t,x)$ и $a_{ij}(t,x)$ выполнено условие (I), если в нем опустить символ ε.

Отметим, что условие I_2 и измеримость для функций $b_i(t,x)$ и $a_{ij}(t,x)$ непосредственно следуют из измеримости и условия I_2 для допредельных функций $b_i^\varepsilon(t,x)$, $a_{i,j}^\varepsilon(t,x)$ и их слабой сходимости к $b_i(t,x)$ и $a_{ij}(t,x)$ в $L_{2,\mathrm{loc}}$. В то же время из непрерывности $a_{i,j}^\varepsilon(t,x)$ и условия II_1 не следует непрерывность $a_{ij}(t,x)$.

Среди условий (II) наиболее трудно проверяемым является условие II_3, так как в него входит, вообще говоря, неизвестная постоянная γ из (1.7). Поэтому отметим, что оно выполняется, если, например, для любого $l > 0$ существует функция $\rho_l(h)$ типа модуля непрерывности такая, что

$$\sup_{\varepsilon} \int_0^T \int_{Q_l} \left| a_{ij}^{\varepsilon}(t, x+z) - a_{ij}^{\varepsilon}(t,x) \right| dxdt \leq \rho_l(|z|). \tag{1.8}$$

В [13] (теорема 6) доказано, что если выполнены условия (H), (I) и (II), то $\mu^{\varepsilon} \Longrightarrow \mu$ и предельный процесс $X(t)$ является решением стохастического уравнения

$$X(t) = x + \int_0^t b(s, X(s))\, ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))\, dw(s), \tag{1.9}$$

где $\sigma(t,x)\sigma^*(t,x) = a(t,x)$.

С предельными коэффициентами условия (II) свяжем оператор вида

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Введем условия для функций в уравнении (1.1).

Условие (III). Для измеримых функций $g^{\varepsilon}(x)$ и $f^{\varepsilon}(t,x,y)$:

III$_1$. $|g^{\varepsilon}(x)| \leq C(1+|x|)$.

III$_2$. $|f^{\varepsilon}(t,x,y)| \leq C(1+|y|)$.

III$_3$. $|f^{\varepsilon}(t,x,y_2) - f^{\varepsilon}(t,x,y_1)| \leq C|y_2 - y_1|$.

Условие (IV): Существуют непрерывная $g(x)$ и измеримая $f(t,x,y)$ функции такие, что:

IV$_1$. Для любого компакта $K \in R^n$ $\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in K} |g_i^{\varepsilon}(x) - g_i(x)| = 0$.

IV$_2$. При каждом $y \in R^1$

$$f_i^{\varepsilon}(\cdot,\cdot,y) \rightharpoonup_{\varepsilon\to 0} f_i(\cdot,\cdot,y).$$

IV$_3$. Для функций $g(x)$ и $f(t,x,y)$ условия (III) справедливы, если опустить символ ε.

Условия III$_1$ и III$_2$ для функций $g(x)$ и $f(t,x,y)$ являются следствиями из условий III$_1$ и III$_2$ для функций $g^{\varepsilon}(x)$ и $f^{\varepsilon}(t,x,y)$.

В [14] доказано, что при условиях (III), оценке (1.3) и существовании сильного решения уравнения (1.2) для любого $\varepsilon > 0$ существует решение уравнения (1.1) в смысле приведенного выше определения и это решение единственно.

2. Предельный процесс для Y^{ε}. Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема. *Предположим, что условия* (H), (I)–(IV) *выполнены. Тогда существуют винеровский процесс* $\bar{w}(t)$ *и процессы* $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ *такие, что* $\mathrm{E}\int_0^T |Z(t)|^2 dt < \infty$ *и* $\nu^{\varepsilon} \overset{M-Z}{\Longrightarrow} \nu$, *где* ν *— мера, соответствующая предельному процессу* $Y(t)$, *который является решением ОСУ*

$$Y(t) = g(X(T)) + \int_t^T f(s, X(s), Y(s)) ds - \int_t^T Z(s) d\bar{w}(s), \tag{2.1}$$

а $X(t)$ *— решение стохастического уравнения*

$$X(t) = x + \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))d\bar{w}, \tag{2.2}$$

при условии, что уравнение (2.2) *имеет сильное решение.*

Доказательство разобьем на несколько шагов.

Шаг 1. Поскольку константы в условиях (III) и в оценке (1.3) не зависят от ε, можно получить оценку [14]

$$\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]} |Y^\varepsilon(t)|^2 + \mathrm{E}\int_0^T |Z^\varepsilon(t)|^2 dt \le C. \tag{2.3}$$

Шаг 2. Проверим, что последовательность ν^ε относительно компактна в топологии Мейера – Чжена. Для того чтобы доказать это, используем теорему 4 из [7]. Для разбиения $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ определим

$$V_n(Y^\varepsilon) = \mathrm{E}\,|Y^\varepsilon(T)| + \sum_{k=0}^{n-1} E\Big|\mathrm{E}\Big[\big(Y^\varepsilon(t_{k+1}) - Y^\varepsilon(t_k)\big)\,\big|\,\mathcal{F}_{t_k}\Big]\Big|.$$

Используя оценки (2.3) и условия теоремы, получаем

$$V_n(Y^\varepsilon) = \mathrm{E}\,|Y^\varepsilon(T)| + \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{E}\left|\mathrm{E}\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} f^\varepsilon(s, X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))ds\,\big|\,\mathcal{F}_{t_k}\right]\right| \le$$

$$\le \mathrm{E}\,|Y^\varepsilon(T)| + C\int_0^T E(1 + |Y^\varepsilon(s)|)ds \le C.$$

Тогда из ν^ε можно извлечь подпоследовательность, которая слабо сходится к мере ν в топологии Мейера – Чжена. Для упрощения записи снова обозначим эту подпоследовательность через ν^ε, и пусть $Y(t)$ — процесс, соответствующий мере ν.

Шаг 3. Пусть $t \in [0,T]$, $G(t) \in C([0,T]; R^k)$, $r \in [0,\infty)$, тогда положим $G_r(t) = G(t)\big((r + 1 - |G(t)|)^+ \wedge 1\big)$, где $a^+ = a \vee 0$ и $\vee$, $\wedge$ — символы $\max$ и $\min$ соответственно. Заметим, что

$$\big|G_r(t)\big| \le \big|G(t)\big|$$

и

$$\big|G(t) - G_r(t)\big| = |G(t)|\Big(\big(|G(t)| - r\big)^+ \wedge 1\Big) \le |G(t)| I\big(|G(t)| > r\big).$$

Для $l \ge r$ обозначим $U_{l,r}(t) = \big|G_l(t) - G_r(t)\big|$. Нетрудно проверить, что последовательность $U_{l,r}(t)$ монотонно возрастает по l и

$$\lim_{l\to\infty} U_{l,r}(t) = \big|G(t) - G_r(t)\big|.$$

Введем функционал

$$N_{t,\delta}(G) = \delta^{-1}\int_t^{T\wedge(t+\delta)} G(s)ds.$$

Функционалы $N_{t,\delta}(G_r)$ и $N_{t,\delta}(U_{l,r})$ ограничены и непрерывны в топологии Мейера – Чжена [7].

Шаг 4. В силу шага 3, оценки (2.3) и неравенства Чебышева имеем

$$\sup_{\varepsilon} \sup_{t\in[0,T]} \mathrm{E}\left|Y^{\varepsilon}(t) - Y^{\varepsilon}_r(t)\right| \leq Cr^{-2} \tag{2.4}$$

и

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\varepsilon} \sup_{t\in[0,T]} \mathrm{E}\left|Y^{\varepsilon}(t) - Y^{\varepsilon}_r(t)\right| = 0. \tag{2.5}$$

Шаг 5. Поскольку процесс $Y(t)$ принадлежит $C([0,T]; R^k)$, используя лемму Фату, имеем

$$\mathrm{E}\left|Y(t) - Y_r(t)\right| = E \lim_{\delta\downarrow 0} \frac{1}{\delta} \int\limits_t^{t+\delta} \left|Y(s) - Y_r(s)\right| ds \leq$$

$$\leq \liminf_{\delta\downarrow 0} \mathrm{E}\, \frac{1}{\delta} \int\limits_t^{t+\delta} \left|Y(s) - Y_r(s)\right| ds.$$

В силу теоремы о монотонной сходимости и свойства непрерывного функционала $N_{t,\delta}(U_{l,r})$ из шага 3 можно продолжить последнее неравенство. Таким образом,

$$\mathrm{E}\left|Y(t) - Y_r(t)\right| \leq \liminf_{\delta\downarrow 0} \lim_{l\uparrow\infty} \mathrm{E}\, \frac{1}{\delta} \int\limits_t^{t+\delta} \left|Y_l(s) - Y_r(s)\right| ds =$$

$$= \liminf_{\delta\downarrow 0} \lim_{l\uparrow\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{E}\, \frac{1}{\delta} \int\limits_t^{t+\delta} \left|Y^{\varepsilon}_l(s) - Y^{\varepsilon}_r(s)\right| ds.$$

Отсюда с учетом (2.4) получаем

$$\lim_{r\to\infty} \mathrm{E}\left|Y(t) - Y_r(t)\right| = 0. \tag{2.6}$$

Теперь докажем, что

$$\mathrm{E}\left| \mathrm{E}\left(\left[Y^{\varepsilon}_r(t) - N_{t,\delta}(Y^{\varepsilon}_r)\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right) \right| \leq C\left(\frac{1}{r^2} + \delta \right). \tag{2.7}$$

Используя все обозначения, имеем

$$\mathrm{E}\left| \mathrm{E}\left(\left[Y^{\varepsilon}_r(t) - N_{t,\delta}(Y^{\varepsilon}_r)\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right) \right| \leq \mathrm{E}\left|Y^{\varepsilon}_r(t) - Y^{\varepsilon}(t)\right| +$$

$$+ \frac{1}{\delta} \int\limits_t^{t+\delta} \mathrm{E}\left|Y^{\varepsilon}(s) - Y^{\varepsilon}_r(s)\right| ds + \frac{1}{\delta} \int\limits_t^{t+\delta} \mathrm{E}\left| \mathrm{E}\left\{ \left[Y^{\varepsilon}(t) - Y^{\varepsilon}(s)\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right\} \right| ds. \tag{2.8}$$

Далее, из (1.1) получаем

$$\mathrm{E}\left\{ \left[Y^{\varepsilon}(t) - Y^{\varepsilon}(s)\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right\} = \int\limits_t^s \mathrm{E}\left\{ f^{\varepsilon}(u, X^{\varepsilon}(u), Y^{\varepsilon}(u)) \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right\} du.$$

Отсюда в силу (2.3)

$$\mathrm{E}\Big|\,\mathrm{E}\Big\{\big[Y^\varepsilon(t)-Y^\varepsilon(s)\big]\,\big|\,\mathcal{F}_t\Big\}\Big| \le C\,\mathrm{E}\int_t^s \mathrm{E}\Big\{\big(1+|Y^\varepsilon(u)|\big)\,\big|\,\mathcal{F}_t\Big\}du \le$$

$$\le C\int_t^s \mathrm{E}\,\big(1+|Y^\varepsilon(u)|\big)du \le C(s-t). \tag{2.9}$$

Неравенство (2.7) следует из (2.8), (2.4) и (2.9).

Из уравнения (1.1) следует, что при $s<t$

$$\mathrm{E}\,\big|Y^\varepsilon(s)-Y^\varepsilon(t)\big|^2 \le 2(t-s)\int_s^t \mathrm{E}\,\big|f^\varepsilon(u,X^\varepsilon(u),Y^\varepsilon(u))\big|^2du+\psi_s^\varepsilon(t),$$

где

$$\psi_s^\varepsilon(t)=2\int_s^t \mathrm{E}\,|Z^\varepsilon(u)|^2du. \tag{2.10}$$

Учитывая условие III_2 и оценку (2.3), находим

$$\mathrm{E}\,\big|Y^\varepsilon(s)-Y^\varepsilon(t)\big|^2 \le C(t-s)^2+\psi_s^\varepsilon(t). \tag{2.11}$$

Шаг 6. Пусть $\Phi_t(x,y)$ — ограниченный, непрерывный функционал на $C([0,t];R^n)\times C([0,t];R^k)$. Снабдим это произведение равномерной топологией на первом множителе и топологией Мейера – Чжена на втором. Как следует из (1.1), для любого такого функционала

$$\mathrm{E}\,\Phi_t(X^\varepsilon,Y^\varepsilon)\left[Y^\varepsilon(t)-g^\varepsilon(X^\varepsilon(T))-\int_t^T f^\varepsilon(s,X^\varepsilon(s),Y^\varepsilon(s))ds\right]=0.$$

Перепишем левую часть последнего равенства в виде

$$\sum_{k=1}^3 J_k^\varepsilon+\mathrm{E}\,\Phi_t(X,Y)\left[Y(t)-g(X(T))-\int_t^T f(s,X(s),Y(s))ds\right]=0, \tag{2.12}$$

где

$$J_1^\varepsilon=\mathrm{E}\Big[\Phi_t(X^\varepsilon,Y^\varepsilon)Y^\varepsilon(t)-\Phi_t(X,Y)Y(t)\Big],$$

$$J_2^\varepsilon=\mathrm{E}\Big[\Phi_t(X,Y)g(X(T))-\Phi_t(X^\varepsilon,Y^\varepsilon)g^\varepsilon(X^\varepsilon(T))\Big],$$

$$J_3^\varepsilon=\mathrm{E}\left[\Phi_t(X,Y)\int_t^T f(s,X(s),Y(s))ds-\Phi_t(X^\varepsilon,Y^\varepsilon)\int_t^T f^\varepsilon(s,X^\varepsilon(s),Y^\varepsilon(s))ds\right],$$

и оценим каждое из J_k^ε.

Выражение для J_1^ε может быть представлено в виде

$$J_1^\varepsilon = \sum_{i=4}^{6} J_i^\varepsilon + J_7 + J_8, \tag{2.13}$$

где

$$J_4^\varepsilon = \mathrm{E}\,\Phi_t(X^\varepsilon, Y^\varepsilon)\big[Y^\varepsilon(t) - Y_r^\varepsilon(t)\big],$$

$$J_5^\varepsilon = \mathrm{E}\,\Phi_t(X^\varepsilon, Y^\varepsilon)\big[Y_r^\varepsilon(t) - N_{t,\delta}(Y_r^\varepsilon)\big],$$

$$J_6^\varepsilon = \mathrm{E}\,\Phi_t(X^\varepsilon, Y^\varepsilon)N_{t,\delta}(Y_r^\varepsilon) - \mathrm{E}\,\Phi_t(X, Y)N_{t,\delta}(Y_r),$$

$$J_7 = \mathrm{E}\,\Phi_t(X, Y)\big[N_{t,\delta}(Y_r(t)) - Y_r(t)\big],$$

$$J_8 = \mathrm{E}\,\Phi_t(X, Y)\big[Y_r(t) - Y(t)\big].$$

Из (2.5) и (2.6) следует

$$\lim_{r\to\infty} \sup_\varepsilon |J_4^\varepsilon| = 0 \tag{2.14}$$

и

$$\lim_{r\to\infty} |J_8| = 0. \tag{2.15}$$

Из (2.7) получаем

$$\lim_{r\to\infty} \lim_{\delta\downarrow 0} \sup_\varepsilon |J_5^\varepsilon| = 0. \tag{2.16}$$

Как отмечено выше, $\mu^\varepsilon \Longrightarrow \mu$, а также в силу шага 2

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |J_6^\varepsilon| = 0. \tag{2.17}$$

Поскольку с вероятностью единица $\lim_{\delta\downarrow 0} N_{t,\delta}(Y_r) = Y_r(t)$ и $Y_r(t)$ равномерно ограничен по t, имеем

$$\lim_{\delta\downarrow 0} |J_7| = 0. \tag{2.18}$$

Переходя к пределу в (2.13) вначале при $\varepsilon \to 0$, затем при $\delta \to 0$ и, наконец, при $r \to \infty$, благодаря (2.14) – (2.18) имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |J_1^\varepsilon| = 0. \tag{2.19}$$

Прежде чем оценить J_2^ε, введем непрерывные функции $r_K(x) : 0 \le r_K(x) \le 1$, $r_K(x) = 1$, если $|x| \le K$, и $r_K(x) = 0$, если $|x| \ge K + 1$, и определим $g_K(x) = g(x)r_K(x)$. Выражение J_2^ε представим в виде суммы

$$J_2^\varepsilon = J_9^\varepsilon + J_{10}^\varepsilon + J_{11}^\varepsilon + J_{12}, \tag{2.20}$$

где

$$J_9^\varepsilon = \mathrm{E}\,\Phi_t(X^\varepsilon, Y^\varepsilon)\big[g(X^\varepsilon(T)) - g^\varepsilon(X^\varepsilon(T))\big],$$

$$J_{10}^{\varepsilon} = \mathrm{E}\,\Phi_t(X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon})\big[g_K(X^{\varepsilon}(T)) - g(X^{\varepsilon}(T))\big],$$

$$J_{11}^{\varepsilon} = \mathrm{E}\Big[\Phi_t(X, Y) g_K(X(T)) - \Phi_t(X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon}) g_K(X^{\varepsilon}(T))\Big],$$

$$J_{12} = \mathrm{E}\,\Phi_t(X, Y)\big[g(X(T)) - g_K(X(T))\big].$$

Используя оценку (1.3), нетрудно получить, что для любого K

$$|J_9^{\varepsilon}| \le C\,\mathrm{E}\Big|g(X^{\varepsilon}(T)) - g^{\varepsilon}(X^{\varepsilon}(T))\Big| I\big(|X^{\varepsilon}(T)| \le K\big) + \frac{C}{K}.$$

Переходя к пределу в последней формуле вначале при $\varepsilon \to 0$, затем при $K \to \infty$ и используя условие IV_1, имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |J_9^{\varepsilon}| = 0. \tag{2.21}$$

Поскольку $|g(x) - g_K(x)| \le |g(x)| I(|x| > K)$, из оценки (1.3) и неравенства Чебышева имеем

$$\sup_{\varepsilon} |J_{10}^{\varepsilon}| \le \frac{C}{K}.$$

Отсюда

$$\lim_{K \to \infty} \sup_{\varepsilon} |J_{10}^{\varepsilon}| = 0. \tag{2.22}$$

Аналогично

$$\lim_{K \to \infty} |J_{12}| = 0. \tag{2.23}$$

Из слабой сходимости $(X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon})$ к (X, Y) получаем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |J_{11}^{\varepsilon}| = 0. \tag{2.24}$$

Из (2.20) – (2.24) заключаем, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J_2^{\varepsilon} = 0. \tag{2.25}$$

Для того чтобы оценить J_3^{ε}, проведем вспомогательные построения. Пусть $R(a; A) = \big\{y\colon |y - a| \le A\big\}$ — окрестность точки a с радиусом A. Введем в $R(0; N)$ δ-сеть $\{y_1, y_2, \ldots, y_M\}\colon |y_{i+1} - y_i| \le \delta$ и систему функций $q_i(y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

a) $q_i(y) \ge 0$ и $q_i(y) = 0$ вне $R(y_i, \delta)$,

b) $\sum_{i=1}^{M} q_i(y) = 1$,

c) $q_i(y) \in C^1(R(0; N))$.

Для функции $g(t, x, y)$ определим функцию

$$g_{N,\delta}(t, x, y) = \sum_{i=1}^{M} q_i(y) g(t, x, y_i).$$

Отсюда с учетом условия IV_3 для любого $t \in [0, T], x \in R^n$ и $y \in R^k$ получим

$$\left|f^\varepsilon(t,x,y) - f^\varepsilon_{N,\delta}(t,x,y)\right| \le \sum_{i=1}^{M} q_i(y)\left|f^\varepsilon(t,x,y) - f^\varepsilon(t,x,y_i)\right| \le C\delta. \qquad (2.26)$$

Аналогично

$$|f(t,x,y) - f_{N,\delta}(t,x,y)| \le C\delta. \qquad (2.27)$$

Перепишем выражение для J_3^ε в виде

$$J_3^\varepsilon = J_{13}^\varepsilon + J_{14}^\varepsilon + J_{15}^\varepsilon + J_{16}, \qquad (2.28)$$

где

$$J_{13}^\varepsilon = \mathrm{E}\,\Phi_t(X^\varepsilon, Y^\varepsilon)\int\limits_t^T \Big[f^\varepsilon_{N,\delta}(s, X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s)) - f^\varepsilon(s, X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))\Big]ds,$$

$$J_{14}^\varepsilon = \mathrm{E}\,\Phi_t(X^\varepsilon, Y^\varepsilon)\int\limits_t^T \Big[f_{N,\delta}(s, X(s), Y^\varepsilon(s)) - f^\varepsilon_{N,\delta}(s, X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s))\Big]ds,$$

$$J_{15}^\varepsilon = \mathrm{E}\,\Phi_t(X, Y)\int\limits_t^T f_{N,\delta}(s, X(s), Y(s))ds -$$

$$-\ \mathrm{E}\,\Phi_t(X^\varepsilon, Y^\varepsilon)\int\limits_t^T f_{N,\delta}(s, X(s), Y^\varepsilon(s))ds,$$

$$J_{16} = \mathrm{E}\,\Phi_t(X, Y)\int\limits_t^T \Big[f(s, X(s), Y(s))ds - f_{N,\delta}(s, X(s), Y(s))\Big]ds.$$

Из (2.26) и (2.27) имеем

$$\sup_\varepsilon |J_{13}^\varepsilon| + |J_{16}| \le C\delta. \qquad (2.29)$$

Поскольку $X^\varepsilon \Longrightarrow X$, $Y^\varepsilon \overset{M-Z}{\Longrightarrow} Y$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |J_{15}^\varepsilon| = 0. \qquad (2.30)$$

Перепишем J_{14}^ε в виде

$$J_{14}^\varepsilon = \mathrm{E}\,\Phi_t(X^\varepsilon, Y^\varepsilon)\int\limits_t^T \left[\sum_{j=1}^{M} q_j(Y^\varepsilon(s))\Big\{f(s, X(s), y_j) - f^\varepsilon(s, X^\varepsilon(s), y_j)\Big\}\right]ds.$$

Выберем некоторое разбиение отрезка $t = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = T$ и выражение J_{14}^ε представим в виде суммы

$$J_{14}^\varepsilon = J_{17}^\varepsilon + J_{18}^\varepsilon + J_{19}^\varepsilon\ , \qquad (2.31)$$

где

$$J_{17}^{\varepsilon} = \mathrm{E}\,\Phi_t(X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon}) \sum_{j=1}^{M}\sum_{r=1}^{k-1} \int\limits_{t_r}^{t_{r+1}} \big(q_j(Y^{\varepsilon}(s)) - q_j(Y^{\varepsilon}(t_r))\big)\times$$

$$\times\big(f(s, X(s), y_j) - f^{\varepsilon}(s, X^{\varepsilon}(s), y_j)\big)\, ds,$$

$$J_{18}^{\varepsilon} = \mathrm{E}\,\Phi_t(X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon}) \sum_{j=1}^{M}\sum_{r=1}^{k-1} \int\limits_{t_r}^{t_{r+1}} q_j(Y^{\varepsilon}(t_r))\Big[f(s, X(s), y_j) r_K(X(s)) -$$

$$-f^{\varepsilon}(s, X^{\varepsilon}(s), y_j) r_K(X^{\varepsilon}(s))\Big] ds,$$

$$J_{19}^{\varepsilon} = \mathrm{E}\,\Phi_t(X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon}) \sum_{j=1}^{M}\sum_{r=1}^{k-1} \int\limits_{t_r}^{t_{r+1}} q_j(Y^{\varepsilon}(t_r))\Big[f(s, X(s), y_j)(1 - r_K(X(s))) -$$

$$-f^{\varepsilon}(s, X^{\varepsilon}(s), y_j)(1 - r_K(X^{\varepsilon}(s)))\Big] ds.$$

Для оценки слагаемого J_{17}^{ε} используем оценку (2.11) и условие III_2. Имеем

$$\left[\mathrm{E} \int\limits_{t_r}^{t_{r+1}} |Y^{\varepsilon}(s) - Y^{\varepsilon}(t_r)|\, |f(s, X(s), y_j) - f^{\varepsilon}(s, X^{\varepsilon}(s), y_j)|\, ds\right]^2 \le$$

$$\le C(1 + |y_j|)^2 (t_{r+1} - t_r) \int\limits_{t_r}^{t_{r+1}} \Big[(s - t_r)^2 + \psi_{t_r}^{\varepsilon}(s)\Big] ds \le C(1 + |y_j|)^2 \times$$

$$\times\Big[(t_{r+1} - t_r)^4 + (t_{r+1} - t_r)^2 \psi_{t_r}^{\varepsilon}(t_{r+1})\Big].$$

Поэтому отсюда, используя неравенство Коши – Буняковского и оценку (2.3), получаем

$$|J_{17}^{\varepsilon}| \le C \max_r (t_{r+1} - t_r)^{1/2} \sum_{j=1}^{M} (1 + |y_j|).$$

При фиксированном M слагаемое $|J_{17}^{\varepsilon}|$ может быть сделано сколь угодно малым равномерно по ε выбором разбиения

$$\sup_{\varepsilon} |J_{17}^{\varepsilon}| \to 0 \quad \text{при} \quad \max(t_{r+1} - t_r) \to 0. \tag{2.32}$$

Для оценки J_{18}^{ε} проведем некоторые построения. Рассмотрим в области $[t_r, t_{r+1}] \times R(0, K+1)$ при фиксированном $y_j \in R^k$ граничную задачу

$$\begin{gathered} L^{\varepsilon} v(t, x) = f_i^{\varepsilon}(t, x, y_j) r_K(x), \quad t \in [t_r, t_{r+1}), x \in R(0, K+1), \\ v(t_{r+1}, x) = 0, \quad v(t, x)|_{\partial R(0, K+1)} = 0. \end{gathered} \tag{2.33}$$

Ее решение обозначим через $v_{K,r,i,j}^{\varepsilon}(t, x)$. При условии (I) задача (2.33) имеет единственное решение в классе $W_{n+1}^{1,2}([t_r, t_{r+1}] \times R(0, K+1))$ и допускает вероятностное представление

$$v^{\varepsilon}_{K,r,i,j}(t,x) = \mathrm{E}\left\{\int\limits_{t_r}^{t_{r+1}} f^{\varepsilon}_i(s, X^{\varepsilon}(s), y_j) r_K(X^{\varepsilon}(s)) ds \,\Big|\, X^{\varepsilon}(t) = x\right\}. \tag{2.34}$$

В работе [13] (теорема 5) установлено, что в условиях теоремы

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{[t_r,t_{r+1}]\times R(0,K+1)} \left|v^{\varepsilon}_{K,r,i,j}(t,x) - v_{K,r,i,j}(t,x)\right| = 0, \tag{2.35}$$

где $v_{K,r,i,j}(t,x)$ — решение граничной задачи для (2.33), имеющей тот же вид и аналогичное (2.34) вероятностное представление, если опустить символ ε. При этом процесс $X(t)$ есть решение уравнения (1.9). Заметим, что в силу невырожденности матрицы $\sigma^{\varepsilon}(t,x)$ имеем $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}^w_t = \mathcal{F}^{X^{\varepsilon}}_t$. Далее, используя данное замечание и марковское свойство процесса $X^{\varepsilon}(t)$, а также представление (2.34), получаем

$$\mathrm{E}\,\Phi_t(X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon}) \int\limits_{t_r}^{t_{r+1}} q_j(Y^{\varepsilon}(t_r)) f^{\varepsilon}_i(s, X^{\varepsilon}(s), y_j)) r_K(X^{\varepsilon}(s))\, ds =$$

$$= \mathrm{E}\,\Phi_t(X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon})\,\mathrm{E}\left\{q_j(Y^{\varepsilon}(t_r))\,\mathrm{E}\left\{\int\limits_{t_r}^{t_{r+1}} f^{\varepsilon}_i(s, X^{\varepsilon}(s), y_j)) r_K(X^{\varepsilon}(s))\, ds \,\Big|\, \mathcal{F}_{t_r}\right\} \Big|\, \mathcal{F}_t\right\} =$$

$$= \mathrm{E}\,\Phi_t(X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon}) q_j(Y^{\varepsilon}(t_r)) v^{\varepsilon}_{K,r,i,j}(t_r, X^{\varepsilon}(t_r)). \tag{2.36}$$

Аналогично

$$\mathrm{E}\,\Phi_t(X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon}) \int\limits_{t_r}^{t_{r+1}} q_j(Y^{\varepsilon}(t_r)) f_i(s, X(s), y_j)) r_K(X(s))\, ds =$$

$$= \mathrm{E}\,\Phi_t(X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon}) q_j(Y^{\varepsilon}(t_r)) v_{K,r,i,j}(t_r, X(t_r)). \tag{2.37}$$

Из (2.35) – (2.37) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |J^{\varepsilon}_{18}| = 0. \tag{2.38}$$

Для J^{ε}_{19} из оценки (1.3) с учетом сделанных предположений следует оценка

$$|J^{\varepsilon}_{19}| \le \frac{C}{K^2}. \tag{2.39}$$

Учитывая оценки (2.32), (2.38), (2.39), переходим в (2.32) к пределу вначале по $\varepsilon \to 0$, затем по $K \to \infty$ и, наконец, при максимуме вспомогательного разбиения отрезка $[t,T]$, стремящемся к нулю, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |J^{\varepsilon}_{14}| = 0. \tag{2.40}$$

Из (2.29), (2.30) и (2.40) имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |J^{\varepsilon}_{3}| = 0. \tag{2.41}$$

Поэтому из (2.12) и (2.19), (2.25), (2.41) следует, что

$$\mathrm{E}\,\Phi_t(X,Y)\left[Y(t)-g(X(T))-\int\limits_t^T f(s,X(s),Y(s))ds\right]=0. \qquad (2.42)$$

Тогда в силу [15] (предложение 1.1) процесс $Y(t)$ допускает представление

$$Y(t)=g(X(T))+\int\limits_t^T f(s,X(s),Y(s))ds-M(T)+M(t), \qquad (2.43)$$

где $(M(t),\mathcal{F}_t^{X,Y})$ — квадратично интегрируемый мартингал и $\mathrm{E}\,M(t)=0$.

Шаг 7. Пусть $\Phi_t(x,y)$ — функционал из шага 6. Поскольку $\Phi_t(X^\varepsilon,Y^\varepsilon)$ является $\mathcal{F}_t$-измеримой функцией, то согласно [5] (доказательство теоремы 1) для любой непрерывно дифференцируемой функции $\phi(x)$ с компактным носителем

$$\lim_{\varepsilon\to0}\mathrm{E}\,\Phi_t(X^\varepsilon,Y^\varepsilon)\left[\phi(X^\varepsilon(s))-\phi(X^\varepsilon(t))-\int\limits_t^s L\phi(X^\varepsilon(r))\,dr\right]=0. \qquad (2.44)$$

Отсюда

$$\mathrm{E}\,\Phi_t(X,Y)\left[\phi(X(s))-\phi(X(t))-\int\limits_t^s L\phi(X(r))\,dr\right]=0.$$

Переход к пределу не представляет трудностей в случае непрерывных функций $b(t,x)$, $a(t,x)$. Но только для измеримых функций переход к пределу доказывается с помощью оценки Крылова, как, например, это доказано для J_3^ε. Из [6] (теорема 4.5.1) следует, что существует винеровский процесс $(\bar w(t),\mathcal{F}_t^{X,Y})$ такой, что (2.2) справедливо.

Пусть $(\bar Y(t),Z(t))$ является единственным $\mathcal{F}_t^{\bar w}$-согласованным решением (следовательно, оно также $\mathcal{F}_t^{X,Y}$-согласованно) обратного стохастического уравнения [14, 15, 16]

$$\bar Y(t)=g(X(T))+\int\limits_t^T f(s,X(s),\bar Y(s))ds-\int\limits_t^T Z(s)d\bar w(s). \qquad (2.45)$$

Обозначим $\bar M(t)=\displaystyle\int_0^t Z(s)d\bar w(s)$. Из (2.43) и (2.45) заключаем, что

$$Y(t)-\bar Y(t)=\int\limits_t^T\Big[f(s,X(s),Y(s))-f(s,X(s),\bar Y(s))\Big]ds-$$
$$-(\bar M(t)-M(t))+(\bar M(T)-M(T)).$$

Отметим следующее. Пусть процессы $(\eta(t),\mathcal{F}_t)$, $(N(t),\mathcal{F}_t)$, где $N(t)$ — непрерывный локальный квадратически интегрируемый мартингал, связаны соотношением

$$\eta(t)=\eta(T)+\int\limits_t^T h(s)ds-N(T)+N(t).$$

Перепишем его в виде

$$\eta(T) = \eta(t) - N(t) - \int\limits_t^T h(s)ds + N(T).$$

Для процесса $\eta(s)$, $s \in [t, T]$, и функции $\Phi(x)$ справедлива формула Ито

$$\Phi(\eta(T)) = \Phi(\eta(t)) - \int\limits_t^T \Phi'(\eta(s))h(s)ds + \int\limits_t^T \Phi'(\eta(s))dN(s) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_t^T \Phi''(\eta(s))d[N]_s,$$

где $[N]_s$ — характеристика мартингала. Отсюда

$$\Phi(\eta(t)) = \Phi(\eta(T)) + \int\limits_t^T \Phi'(\eta(s))h(s)ds - \int\limits_t^T \Phi'(\eta(s))dN(s) -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_t^T \Phi''(\eta(s))d[N]_s. \qquad (2.46)$$

Тогда, используя формулу (2.46) для процесса $Y(t) - \bar{Y}(t)$ и функции $\Phi(x) = x^2$, получаем

$$\mathrm{E}\left(Y(t) - \bar{Y}(t)\right)^2 + \mathrm{E}\left[M - \bar{M}\right]_T - \mathrm{E}\left[M - \bar{M}\right]_t =$$

$$= \mathrm{E}\int\limits_t^T \Big[f(s, X(s), Y(s)) - f(s, X(s), \bar{Y}(s))\Big](Y(s) - \bar{Y}(s))ds \le$$

$$\le C\int\limits_t^T \mathrm{E}\left|Y(s) - \bar{Y}(s)\right|^2 ds.$$

Следовательно, согласно лемме Гроноулла для всех $t \in [0, T]$ процессы $Y(t) = \bar{Y}(t)$ и $M(t) = \bar{M}(t)$. Из единственности решения уравнения (2.45) следует, что вся последовательность $\nu^\varepsilon \overset{M-Z}{\Longrightarrow} \nu$.

Теорема доказана.

3. Примеры. 1. Пусть процесс Y_t^ε является решением уравнения

$$Y^\varepsilon(t) = \arctan X^\varepsilon(T) + \int\limits_t^T \frac{\sin Y^\varepsilon(s)\sin^2\frac{s}{\varepsilon}}{2 - \cos\frac{X^\varepsilon(s)}{\varepsilon}}\,ds - \int\limits_t^T Z^\varepsilon(s)dw(s).$$

Процесс X_t^ε удовлетворяет уравнению

$$X_t^\varepsilon = x + \int\limits_0^t \sin^2 \frac{X^\varepsilon(s)}{\varepsilon} \cos^2 \frac{s}{\varepsilon}\, ds + \int\limits_0^t \left[\sin\left(\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{k+1} s + \frac{X^\varepsilon(s)}{\varepsilon} \right) + 2 \right]^{1/2} dw(s),$$

где $k = \left[\dfrac{2}{\gamma}\right] + 1$, γ взято из оценки (1.7).

Для функций $g^\varepsilon(x) = \arctan x$ и $f^\varepsilon(t,x,y) = \dfrac{\sin y \sin^2(t/\varepsilon)}{2 - \cos(x/\varepsilon)}$ выполнены условия (III), (IV), причем $f^\varepsilon(t,x,y) \rightharpoonup \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \sin y$ при $\varepsilon \to 0$.

Коэффициенты уравнения для процесса X_t^ε удовлетворяют условиям (I), (II), (H), причем $b^\varepsilon(t,x) = \sin^2 \dfrac{x}{\varepsilon} \cos^2 \dfrac{t}{\varepsilon} \rightharpoonup \dfrac{1}{4}$,

$$a^\varepsilon(t,x) = \sin\left(\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{k+1} t + \frac{x}{\varepsilon} \right) + 2 \rightharpoonup 2.$$

Тогда из [13] следует, что $X^\varepsilon \Rightarrow X$ и

$$X_t = x + \frac{1}{4} t + \sqrt{2}\bar{w}(t).$$

В [2] отмечено, что функция $a^\varepsilon(t,x) = \sin\left(\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{k+1} t + \dfrac{x}{\varepsilon} \right) + 2$, равномерно по ε на множестве $\big\{(t,x)\colon 0 \le t \le 2\pi,\ -\pi \le x \le \pi\big\}$ удовлетворяет условию II_3 с $\rho(|z|) = \mathrm{const}\,|z|^{\gamma/2}$, но условие (1.8) не выполнено.

Из доказанной теоремы получаем

$$Y(t) = \arctan X(T) + \int\limits_t^T \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin Y(s)\, ds - \int\limits_t^T Z(s) d\bar{w}(s)\,.$$

2. Пусть процесс Y_t^ε является решением уравнения

$$Y^\varepsilon(t) = \sin^4 X^\varepsilon(T) + \int\limits_t^T \cos Y^\varepsilon(s) \sin^2 \frac{X^\varepsilon(s)}{\varepsilon} \cos^2 \frac{s}{\varepsilon}\, ds - \int\limits_t^T Z^\varepsilon(s) dw(s).$$

Процесс X_t^ε — решение уравнения

$$X_t^\varepsilon = x + \int\limits_0^t \cos^2 \frac{X^\varepsilon(s)}{\varepsilon} \left(5 - \cos\frac{s}{\varepsilon}\right) ds + \int\limits_0^t \left[10 + \sin\frac{s}{\varepsilon^2} \arctan \frac{X^\varepsilon(s)}{\varepsilon} \right]^{1/2} dw(s).$$

Легко проверить, что для функций $g^\varepsilon(x) = \sin^4 x$ и $f^\varepsilon(t,x,y) = \cos y \sin^2 \dfrac{x}{\varepsilon} \cos^2 \dfrac{t}{\varepsilon}$ выполнены условия (III), (IV), причем $f^\varepsilon(t,x,y) \rightharpoonup \dfrac{1}{4} \cos y$ при $\varepsilon \to 0$.

Коэффициенты уравнения для процесса X_t^ε удовлетворяют условиям (I), (II), (H), при этом $b^\varepsilon(t,x) = \cos^2 \dfrac{x}{\varepsilon} \left(5 - \cos \dfrac{t}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup \dfrac{5}{2}$,

$$a^\varepsilon(t,x) = 10 + \sin\frac{s}{\varepsilon^2} \arctan \frac{x}{\varepsilon} \rightharpoonup 10.$$

Тогда из [13] следует, что $X^\varepsilon \Rightarrow X$ и

$$X_t = x + \frac{5}{2}t + \sqrt{10}\bar{w}(t).$$

Для функции $a^\varepsilon(t,x) = 10 + \sin\frac{s}{\varepsilon^2}\arctan\frac{x}{\varepsilon}$ справедливо условие (1.8) [1] (пример) при $|z| \le l$ и

$$\rho_l(|z|) = \begin{cases} |z|\big[4\pi + \ln l - \ln|z|\big], & z \ne 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Из доказанной теоремы получаем

$$Y(t) = \sin^4 X(T) + \int\limits_t^T \frac{1}{4}\cos Y(s)\,ds - \int_t^T Z(s)d\bar{w}(s).$$

1. *Камынин В. Л.* Предельный переход в квазилинейных параболических уравнениях со слабо сходящимися коэффициентами и асимптотическое поведение решений задачи Коши // Мат. сб. – 1990. – **181**. – С. 1031 – 1047.
2. *Кружков С. Н., Камынин В. Л.* О предельном переходе в квазилинейных параболических уравнениях // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1985. – **167**. – С. 183 – 206.
3. *Pardoux S., Peng S.* Adapted solution of backward stochastic differential equation // Syst. Contr. Lett. – 1990. – **14**. – P. 55 – 61.
4. *Кружков С. Н.* Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. – 1979. – **5**. – С. 217 – 272.
5. *Махно С. Я.* Сходимость диффузионных процессов // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 2. – С. 284 – 289.
6. *Stroock D., Varadhan S. R. S.* Multidimensional diffusion processes. – New York: Springer, 1979. – 338 p.
7. *Meyer P., Zheng W. A.* Tightness criteria for laws of semimartingales // Ann. Inst. H. Poincaré B. – 1984. – **20**. – P. 353 – 372.
8. *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. – М.: Наука, 1985. – 374 с.
9. *Ерисова И. А.* Сходимость решений обратных стохастических уравнений // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2006. – **13**. – С. 72 – 82.
10. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3 т. – М.: Наука, 1975. – Т. 3. – 496 с.
11. *Крылов Н. В.* Об уравнениях минимаксного типа в теории эллиптических и параболических уравнений на плоскости // Мат. сб. – 1980. – **81**. – С. 3 – 22.
12. *Алхутов Ю. А., Мамедов И. Т.* Первая краевая задача для недивергентных параболических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами // Мат. сб. – 1986. – **131**. – С. 477 – 500.
13. *Махно С. Я.* Сходимость диффузионных процессов. II // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**. – С. 1389 – 1395.
14. *Pardoux E.* BSDE's weak convergence and homogenization of semilinear PDE // Nonlinear Anal., Different. Equat. and Control / Eds F. H. Clarke ae al. – 1999. – **528**. – P. 503 – 549.
15. *Buckhadan R., Engelbert H. J., Rascanu A.* On weak solutions of backward stochastic differential equations // Theory Probab. Appl. – 2004. – **49**. – P. 70 – 107.
16. *Pardoux E.* Homogenization of linear and semilinear second order parabolic PDE with periodic coefficients: a probabilistic approach // J. Funct. Anal. – 1999. – **167**. – P. 496 – 520.

Получено 21.12.07,
после доработки — 02.04.09