УДК 517.9.25.53

М. О. Перестюк (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка),
В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

ОПЕРАТОР ГРІНА – САМОЙЛЕНКА В ТЕОРІЇ ІНВАРІАНТНИХ МНОЖИН НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

We obtain conditions for the existence of invariant set of the system of differential equations

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + F(\varphi, x),$$

where $a: \Phi \to \Phi$, $P: \Phi \to L(X, X)$, and $F: \Phi \times X \to X$ are continuous mappings, Φ and X are finite-dimensional Banach spaces.

Получены условия существования инвариантного множества системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + F(\varphi, x),$$

где $a: \Phi \to \Phi$, $P: \Phi \to L(X, X)$, $F: \Phi \times X \to X$ — непрерывные отображения, Φ и X — конечномерные банаховы пространства.

1. Основний об'єкт досліджень. Нехай $\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел, Φ і X — скінченновимірні банахові простори відповідно з нормами $\|\cdot\|_\Phi$ і $\|\cdot\|_X$ і $L(X, X)$ — банахова алгебра всіх лінійних неперервних операторів $A: X \to X$ з нормою

$$\|A\|_{L(X,X)} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_X .$$

Розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(\varphi), \\ \frac{dx}{dt} &= P(\varphi)x + F(\varphi, x), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1}$$

де $a: \Phi \to \Phi$, $P: \Phi \to L(X, X)$ і $F: \Phi \times X \to X$ — неперервні відображення.

Множина $\mathcal{M} \subset \Phi \times X$ називається інваріантною множиною системи рівнянь (1), якщо для кожної точки $(\varphi_0, x_0) \in \mathcal{M}$ для розв'язку

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_t(\varphi_0), \\ x &= x_t(\varphi_0, x_0) \end{aligned}$$

цієї системи, що задовольняє умову

$$\begin{aligned} \varphi_0(\varphi_0) &= \varphi_0, \\ x_0(\varphi_0, x_0) &= x_0, \end{aligned}$$

виконується співвідношення

$$\{(\varphi_t(\varphi_0), x_t(\varphi_0, x_0)) \in \Phi \times X : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{M}.$$

Метою цієї статті є з'ясування умов існування інваріантної множини $\mathcal{M}$ системи (1), для якої

$$\sup\{\|x\|_X : (\varphi, x) \in \mathcal{M}\} < +\infty.$$

Це співвідношення означає, що проекція множини $\mathcal{M}$ на $\{0\} \times X$ паралельно $\Phi \times \{0\}$ [1] є обмеженою ($\{0\} \times X$ і $\Phi \times \{0\}$ — підпростори простору $\Phi \times X$). Множини, що задовольняють таку умову, називатимемо *X-обмеженими*.

Прикладом такої множини є інваріантна множина

$$\mathcal{K} = \{(\varphi, 0) \in \Phi \times X : \varphi \in \Phi\}$$

системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi),$$
$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

При з'ясуванні умов існування X-обмеженої інваріантної множини $\mathcal{M}$ системи (1) крім неперервності відображень a, P і F вимагатимемо, щоб виконувалися додаткові вимоги, а саме, щоб виконувалися наступні умови.

Умова А. Диференціальне рівняння

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad t \in \mathbb{R},$$

для кожної точки $\varphi_0 \in \Phi$ має єдиний розв'язок $\varphi = \varphi_t(\varphi_0)$, який, як функція змінних t і φ_0, є неперервним на $\mathbb{R} \times \Phi$ і

$$\varphi_0(\varphi_0) = \varphi_0.$$

Умова Б. $\sup\limits_{\varphi \in \Phi} \| P(\varphi) \|_{L(X,X)} < +\infty.$

Умова В. Для кожної обмеженої множини $G \subset X$

$$\sup_{(\varphi, x) \in \Phi \times G} \| F(\varphi, x) \|_X < +\infty.$$

Зазначимо, що задачу про інваріантні множини системи рівнянь (1) у випадку $\Phi = \mathbb{R}^m$, $X = \mathbb{R}^n$ і 2π-періодичних по змінних $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ та диференційовних функцій $a(\varphi)$, $P(\varphi)$ і $F(\varphi, x)$ (тут $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$) детально досліджено А. М. Самойленком [2].

2. Функція і оператор Гріна – Самойленка. Нехай Y і Z — довільні банахові простори, $C^0(Y, Z)$ — банаховий простір неперервних і обмежених на Y функцій $z = z(y)$ зі значеннями в Z з нормою

$$\| z \|_{C^0(Y,Z)} = \sup_{y \in Y} \| z(y) \|_Z$$

і $\mathfrak{M}^0(Y, Z)$ — банаховий простір обмежених на Y функцій $z = z(y)$ зі значеннями в Z з нормою

$$\| z \|_{\mathfrak{M}^0(Y,Z)} = \sup_{y \in Y} | z(y) |_Z .$$

Позначимо через $\Omega_\tau^t(\varphi)$ операторний розв'язок задачі

$$\frac{dX(t)}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))X(t), \quad t \in \mathbb{R},$$
$$X(\tau) = I,$$

де I — одиничний елемент алгебри $L(X, X)$. Завдяки неперервності $P(\varphi_t(\varphi))$

по змінній t на $\mathbb{R}$ для кожного $\varphi \in \Phi$ ця задача має єдиний розв'язок (див., наприклад, [3]).

Функцією Гріна – Самойленка системи рівнянь (2) називається функція

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)\, C(\varphi_\tau(\varphi)), & \text{якщо} \quad \tau \le 0, \\ -\Omega_\tau^0(\varphi)(I - C(\varphi_\tau(\varphi))), & \text{якщо} \quad \tau > 0, \end{cases}$$

де $C \in C^0(\Phi,\ L(X, X))$, якщо інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \| G_0(\tau, \varphi) \|_{L(X,X)}\, d\tau$ збігається для кожного $\varphi \in \Phi$ і

$$\sup_{\varphi \in \Phi} \int_{-\infty}^{+\infty} \| G_0(\tau, \varphi) \|_{L(X,X)} d\tau < +\infty.$$

Зауважимо, що система рівнянь (2) має функцію Гріна – Самойленка, якщо інваріантна множина $\mathcal{K}$ цієї системи експоненціально дихотомічна, тобто виконується наступна умова.

Умова Г. Існують підпростори $X_+(\tau, \varphi)$, $X_-(\tau, \varphi) \subset X$, $(\tau, \varphi) \in \mathbb{R} \times \Phi$, та додатні сталі K, N і ν, для яких:

1) для кожних $(\tau, \varphi) \in \mathbb{R} \times \Phi$ простір X є прямою сумою підпросторів $X_+(\tau, \varphi)$ і $X_-(\tau, \varphi)$:

$$X = X_+(\tau, \varphi) \oplus X_-(\tau, \varphi),$$

до того ж проектори $P_+(\tau, \varphi)$ і $P_-(\tau, \varphi)$, породжені цією сумою, рівномірно обмежені, тобто

$$\sup_{(\tau,\varphi) \in \mathbb{R} \times \Phi} \left\{ \| P_+(\tau, \varphi) \|_{L(X,X)}, \| P_-(\tau, \varphi) \|_{L(X,X)} \right\} \le K;$$

2) для всіх $t, \tau \in \mathbb{R}$ $(t \ge \tau)$, $\varphi \in \Phi$ і $x_0 \in X_-(\tau, \varphi)$ виконується нерівність

$$\left\| \Omega_\tau^t(\varphi) x_0 \right\|_X \le N e^{-\nu(t-\tau)} \| x_0 \|_X;$$

3) для всіх $t, \tau \in \mathbb{R}$ $(t \le \tau)$, $\varphi \in \Phi$ і $x_0 \in X_+(\tau, \varphi)$ виконується нерівність

$$\left\| \Omega_\tau^t(\varphi) x_0 \right\|_X \le N e^{-\nu(\tau-t)} \| x_0 \|_X.$$

У випадку виконання умови Г функція Гріна – Самойленка системи рівнянь (2) подається у вигляді

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)\, P_-(\tau, \varphi), & \text{якщо} \quad \tau \le 0, \\ -\Omega_\tau^0(\varphi)\, P_+(\tau, \varphi), & \text{якщо} \quad \tau > 0, \end{cases}$$

і для неї виконується нерівність

$$\| G_0(\tau, \varphi) \|_{L(X,X)} \le N e^{-\nu|\tau|} \tag{3}$$

для всіх $\tau \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \Phi$.

Оператором Гріна – Самойленка назвемо оператор $\mathcal{G}$, що діє з простору $C^0(\Phi, X)$ у простір $\mathfrak{M}^0(\Phi, X)$ і визначається рівністю

$$(\mathcal{G}u)(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, \varphi)\, u(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau.$$

У наступному пункті покажемо, що

$$\mathcal{G}C^0(\Phi, X) \subset C^0(\Phi, X), \tag{4}$$

тобто оператор $\mathcal{G}$ діє у просторі $C^0(\Phi, X)$.

Зазначимо, що оператор $\mathcal{G}$ розглядався в [2, 4]. За допомогою цього оператора інваріантна множина $\mathcal{K}_f$ системи диференціальних рівнянь (1), якщо $F(\varphi, x) = f(\varphi)$ і $f \in C^0(\Phi, X)$, подається у вигляді

$$\mathcal{K}_f = \left\{(\varphi, x) \in \Phi \times X : x = (\mathcal{G}f)(\varphi),\ \varphi \in \Phi\right\}.$$

У випадку, коли множина $\mathcal{K}_f$ — тор, це показано у [2].

У подальшому оператор $\mathcal{G}$ відіграватиме важливу роль у з'ясуванні існування X-обмежених інваріантних множин системи диференціальних рівнянь (1). Наведемо одну властивість цього оператора.

3. *c*-Неперервність оператора Гріна – Самойленка. Говоритимемо, що послідовність $(z_n)_{n \geq 1}$ елементів простору $C^0(Y, Z)$ *локально збігається* до елемента $z \in C^0(Y, Z)$, і позначатимемо

$$z_n \xrightarrow{\text{loc.},\, C^0(Y,\ Z)} z \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

якщо ця послідовність є обмеженою і для кожного числа $p > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \max_{\|y\|_Y \leq p} \|z_n(y) - z(y)\|_Z = 0.$$

Аналогічно визначається локально збіжна послідовність елементів простору $\mathfrak{M}^0(Y, Z)$.

Оператор $B : E_1 \to E_2$ (E_1 і E_2 — банахові простори, кожний з яких збігається з одним із просторів $C^0(Y_1, Z_1)$, $C^0(Y_2, Z_2)$, $\mathfrak{M}^0(Y_1, Z_1)$ і $\mathfrak{M}^0(Y_2, Z_2)$), де Y_1, Y_2, Z_1 і Z_2 — також банахові простори) називається *c-неперервним*, якщо для довільних $x \in E_1$ і $x_n \in E_1$, $n \geq 1$, для яких

$$x_n \xrightarrow{\text{loc.},\, E_1} x \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

виконується співвідношення

$$Bx_n \xrightarrow{\text{loc.},\, E_2} Bx \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поняття c-неперервного оператора увів до розгляду (на мові „ε, δ”) Е. Мухамадієв [5]; його вивчення було продовжено у роботах [6 – 13]. Означення c-неперервного оператора, в якому використано локально збіжні послідовності, запропоновано одним із авторів статті (див., наприклад, [14 – 16]).

Теорема 1. *Нехай* $a : \Phi \to \Phi$ *і* $P : \Phi \to L(X, X)$ — *неперервні відображення і виконуються умови* А, Б *і* Г.

Тоді множина значень $R(\mathcal{G})$ *оператора Гріна – Самойленка* $\mathcal{G}$ *є підмножиною простору* $C^0(\Phi, X)$ *і цей оператор є лінійним, обмеженим і c-неперервним.*

Доведення. Розглянемо довільні $n_0 \in C^0(\Phi, X)$, $n \geq 0$, для яких

$$u_n \xrightarrow{\text{loc.},\, C^0(\Phi,\ X)} u_0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{5}$$

Покажемо, що

$$\mathcal{G}u_n \xrightarrow{\text{loc.}, \mathfrak{M}^0(\Phi,\, X)} \mathcal{G}u_0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{6}$$

Зафіксуємо довільні числа $R > 0$ і $\varepsilon > 0$. Завдяки (5) існує таке число $c > 0$, що

$$\sup_{n \geq 0} \| u_n \|_{C^0(\Phi, X)} \leq c. \tag{7}$$

Виберемо таке додатне число a, щоб

$$\frac{4Nc}{\nu} e^{-\nu a} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Подамо $(\mathcal{G}u_n)(\varphi) - (\mathcal{G}u_0)(\varphi)$ у вигляді

$$(\mathcal{G}u_n)(\varphi) - (\mathcal{G}u_0)(\varphi) = I_1(n, \varphi) + I_2(n, \varphi),$$

де

$$I_1(n, \varphi) = \int_{-a}^{a} G_0(\tau, \varphi)\big(u_n(\varphi_\tau(\varphi)) - u_0(\varphi_\tau(\varphi))\big)\, d\tau$$

і

$$I_2(n, \varphi) = \int_{|\tau| \geq a} G_0(\tau, \varphi)\big(u_n(\varphi_\tau(\varphi)) - u_0(\varphi_\tau(\varphi))\big)\, d\tau.$$

На підставі (7), (8) та оцінки (3) норми функції Гріна – Самойленка (тут використано умову Г) отримуємо

$$\sup_{n \geq 1, \varphi \in \Phi} \| I_1(n, \varphi) \|_X < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

Покажемо, що при досить великих n

$$\sup_{\|\varphi\|_\Phi \leq R} \| I_2(n, \varphi) \|_X < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10}$$

Використаємо умову А. Завдяки неперервності $\varphi_t(\varphi)$ по (t, φ) на множині $K = [-a, a] \times \{\varphi \in \Phi : \|\varphi\|_\Phi \leq R\}$ (ця множина є компактною, оскільки простір Φ скінченновимірний) функція $\|\varphi_t(\varphi)\|_\Phi$ обмежена на K деяким числом γ. Виберемо такий номер n_0, щоб

$$\sup_{n \geq n_0, \|\varphi\|_\Phi \leq \gamma} \| u_n(\varphi) - u_0(\varphi) \|_\Phi < \frac{\nu\varepsilon}{2N}. \tag{11}$$

Такий номер існує на підставі (5). Тоді завдяки (11)

$$\sup_{n \geq n_0, |\tau| \leq a, \|\varphi\|_\Phi \leq R} \left\| u_n\big(\varphi_\tau(\varphi)\big) - u_0(\varphi_\tau(\varphi)) \right\|_X < \frac{\nu\varepsilon}{2N}.$$

Звідси та з (3) випливає (10).

Із (9) і (10) отримуємо

$$\sup_{n \geq n_0, \|\varphi\|_\Phi \leq R} \| (\mathcal{G}u_n)(\varphi) - (\mathcal{G}u_0)(\varphi) \|_X < \varepsilon.$$

Отже, на підставі довільності числа ε виконується співвідношення (6), що означає c-неперервність оператора $\mathcal{G}$.

Тепер покажемо, що

$$R(\mathcal{G}) \subset C^0(\Phi, X). \tag{12}$$

Зафіксуємо довільний елемент $v \in C^0(\Phi, X)$ і покажемо, що $\mathcal{G}v \in \in C^0(\Phi, X)$.

Розглянемо вектори $\varphi_n \in \Phi$, $n \geq 1$, для яких

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_\Phi = 0, \tag{13}$$

і послідовність $v_n = v(\varphi + \varphi_n)$, $n \geq 1$, елементів простору $C^0(\Phi, X)$. Завдяки (13) і скінченній розмірності простору Φ

$$v_n \xrightarrow{\text{loc., } C^0(\Phi,\, X)} v \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{14}$$

Покажемо, що

$$\mathcal{G}v_n \xrightarrow{\text{loc., } \mathfrak{M}^0(\Phi,\, X)} \mathcal{G}v \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

тобто для кожного числа $r > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\|\varphi\|_\Phi \leq r} \left\| (\mathcal{G}v)(\varphi + \varphi_n) - (\mathcal{G}v)(\varphi) \right\|_X = 0. \tag{15}$$

Звідси випливатиме неперервність $(\mathcal{G}v)(\varphi)$ у кожній точці $\varphi \in \Phi$, тобто включення (12).

Подамо $(\mathcal{G}v)(\varphi + \varphi_n) - (\mathcal{G}v)(\varphi)$ у вигляді

$$(\mathcal{G}v)(\varphi + \varphi_n) - (\mathcal{G}v)(\varphi) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, \varphi + \varphi_n)\, v\big(\varphi_\tau(\varphi + \varphi_n)\big)\, d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, \varphi)\, v\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)\, d\tau =$$

$$= A_n(\varphi) + B_n(\varphi),$$

де

$$A_n(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, \varphi)\big(v\big(\varphi_\tau(\varphi + \varphi_n)\big) - v\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)\big)\, d\tau$$

і

$$B_n(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(G_0(\tau, \varphi + \varphi_n) - G_0(\tau, \varphi)\big)\, v\big(\varphi_\tau(\varphi + \varphi_n)\big)\, d\tau.$$

На підставі (14)

$$A_n \xrightarrow{\text{loc., } \mathfrak{M}^0(\Phi,\, X)} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{16}$$

Покажемо, що

$$B_n \xrightarrow{\text{loc., } \mathfrak{M}^0(\Phi,\, X)} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{17}$$

Використаємо умови А і Б. Завдяки цим умовам та неперервності відображення $P : \Phi \to L(X, X)$ для кожного числа $r > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|t| \leq r,\ \|\varphi\|_\Phi \leq r} \left\| P\big(\varphi_t(\varphi + \varphi_n)\big) - P\big(\varphi_t(\varphi)\big) \right\|_{L(X,X)} = 0.$$

Тому завдяки неперервній залежності розв'язків рівняння

$$\frac{dX(t)}{dt} = P\big(\varphi_t(\varphi)\big) X(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

від початкових умов [17, 18]

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|\tau|\le r,\ \|\varphi\|_\Phi \le r} \left\| \Omega_\tau^0(\varphi + \varphi_n) - \Omega_\tau^0(\varphi) \right\|_{L(X,X)} = 0$$

для кожного числа $r > 0$ і, отже,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|\tau|\le r,\ \|\varphi\|_\Phi \le r} \left\| G_0(\tau, \varphi + \varphi_n) - G_0(\tau, \varphi) \right\|_{L(X,X)} = 0 \tag{18}$$

для кожного $r > 0$. Оскільки

$$\left\| B_n(\varphi) \right\|_X = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \big(G_0(\tau, \varphi + \varphi_n) - G_0(\tau, \varphi) \big)\, v\big(\varphi_\tau(\varphi + \varphi_n) \big)\, d\tau \right\|_{L(X,X)} \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| G_0(\tau, \varphi + \varphi_n) - G_0(\tau, \varphi) \right\|_{L(X,X)} d\tau \left\| v \right\|_{C^0(\Phi, X)},$$

то на підставі (3) і (18)

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\|\varphi\|_\Phi \le r} \left\| B_n(\varphi) \right\|_X = 0.$$

Отже, співвідношення (17) виконується.

Із (16) і (17) випливає (15).

Лінійність і обмеженість оператора $\mathcal{G}$ випливають з означення цього оператора.

Теорему 1 доведено.

4. Оператор $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$. Розглянемо оператор $\mathcal{F} : C^0(\Phi, X) \to C^0(\Phi, X)$, що визначається рівністю

$$(\mathcal{F}z)(\varphi) = F\big(\varphi, z(\varphi)\big),$$

де $F : \Phi \times X \to X$ — те саме відображення, що й у системі рівнянь (1). Завдяки неперервності F та виконанню умови В оператор $\mathcal{F}$ є c-неперервним. Однак цей оператор може не бути неперервним, якщо для деякого додатного числа r для функції $F(\varphi, x)$ не виконується умова рівномірної неперервності на множині $\Phi \times \{ x \in X : \|x\|_X \le r \}$. Прикладом такого оператора є оператор $\mathcal{F}_1$: $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, що визначається рівністю

$$(\mathcal{F}_1 z)(\varphi) = \sin\big(\varphi^3 z(\varphi)\big).$$

Важливою для подальшого при з'ясуванні умов існування X-обмежених інваріантних множин системи рівнянь (1) є композиція $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ оператора $\mathcal{F}$ на оператор Гріна – Самойленка $\mathcal{G}$, яка завдяки включенню $R(\mathcal{F}) \subset C^0(\Phi, X)$ та теоремі 1 діє у просторі $C^0(\Phi, X)$ і є c-неперервною.

Композицію $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ можна подати у вигляді

$$\big((\mathcal{G} \circ \mathcal{F}) z \big)(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, \varphi)\, F\big(\varphi_\tau(\varphi),\, z\big(\varphi_\tau(\varphi)\big) \big)\, d\tau.$$

5. Зв'язок між нерухомими точками оператора $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ та X-обмеженими інваріантними множинами системи рівнянь (1). Основним результатом статті є наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай* $a : \Phi \to \Phi$, $P : \Phi \to L(X, X)$ *і* $F : \Phi \times X \to X$ — *неперервні відображення й виконуються умови* А, Б, В *і* Г.

Тоді кожною нерухомою точкою $u \in C^0(\Phi, X)$ *оператора* $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ *визначається* X*-обмежена інваріантна множина*

$$\mathcal{M}_u = \{(\varphi, x) \in \Phi \times X : x = u(\varphi), \varphi \in \Phi\}$$

системи рівнянь (1).

Доведення. Нехай елемент $u \in C^0(\Phi, X)$ є нерухомою точкою оператора $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$, тобто

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, \varphi) F(\varphi_\tau(\varphi), u(\varphi_\tau(\varphi))) d\tau \tag{19}$$

для всіх $\varphi \in \Phi$.

Покажемо, що функція $u(\varphi_t(\varphi))$ — розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(\varphi_t(x))x(t) + F(\varphi_t(\varphi), x(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

Використаємо функцію

$$G_t(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(\varphi) P_-(\tau, \varphi), & \text{якщо} \quad \tau \le t, \\ -\Omega_\tau^t(\varphi) P_+(\tau, \varphi), & \text{якщо} \quad \tau > t, \end{cases}$$

для якої на підставі умови Г

$$\|G_t(\tau, \varphi)\|_{L(X,X)} \le N e^{-\nu|t-\tau|}, \quad \tau, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \Phi, \tag{21}$$

а також допоміжні співвідношення

$$\varphi_\tau(\varphi_t(\varphi)) = \varphi_{\tau+t}(\varphi), \quad \tau, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \Phi, \tag{22}$$

$$G_0(\tau, \varphi_t(\varphi)) = G_t(\tau + t, \varphi), \quad \tau, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \Phi, \tag{23}$$

$$G_t(t - 0, \varphi) - G_t(t + 0, \varphi) = I, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \Phi, \tag{24}$$

і

$$\frac{dG_t(\tau, \varphi)}{dt} = P(\varphi_t(\varphi)) G_t(\tau, \varphi), \quad t, \tau \in \mathbb{R}, \quad t \ne \tau, \quad \varphi \in \Phi. \tag{25}$$

Ці співвідношення випливають із властивостей розв'язків диференціальних рівнянь (див. [17]) та означення функції $G_t(\tau, \varphi)$.

Завдяки співвідношенням (19), (22) і (23)

$$u(\varphi_t(\varphi)) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, \varphi_t(\varphi)) F(\varphi_\tau(\varphi_t(\varphi)), u(\varphi_t(\varphi_t(\varphi)))) d\tau \equiv$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} G_t(\tau + t, \varphi) F(\varphi_{\tau+t}(\varphi), u(\varphi_{\tau+t}(\varphi))) d\tau \equiv$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} G_t(\tau, \varphi) F(\varphi_\tau(\varphi), u(\varphi_\tau(\varphi))) d\tau.$$

Тому

$$u(\varphi_\tau(\varphi)) \equiv$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{t} G_t(\tau, \varphi) F(\varphi_\tau(\varphi), u(\varphi_\tau(\varphi))) d\tau + \int_{t}^{+\infty} G_t(\tau, \varphi) F(\varphi_\tau(\varphi), u(\varphi_\tau(\varphi))) d\tau. \tag{26}$$

Диференціюючи обидві частини цієї тотожності по t та враховуючи співвідношення (24) і (25), отримуємо

$$\begin{aligned}\frac{du(\varphi_t(\varphi))}{dt} &\equiv G_t(t-0,\varphi)F\big(\varphi_t(\varphi), u(\varphi_t(\varphi))\big) + \\ &+ P(\varphi_t(\varphi))\int_{-\infty}^{t} G_t(\tau,\varphi)F\big(\varphi_\tau(\varphi), u(\varphi_\tau(\varphi))\big)d\tau - \\ &- G_t(t+0,\varphi)F\big(\varphi_\tau(\varphi), u(\varphi_t(\varphi))\big) + P(\varphi_t(\varphi)) + \\ &+ \int_{-\infty}^{t} G_t(\tau,\varphi)F\big(\varphi_\tau(\varphi), u(\varphi_\tau(\varphi))\big)d\tau \equiv \\ &\equiv P(\varphi_t(\varphi))u(\varphi_t(\varphi)) + F\big(\varphi_\tau(\varphi), u(\varphi_t(\varphi))\big).\end{aligned}$$

Операцію диференціювання можна застосовувати до правої частини тотожності (26) на підставі (21), (25), умов А, Б та неперервності відображення $P:\Phi\to$ $\to L(X,X)$.

Отже, функція $x = u(\varphi_t(\varphi))$ є розв'язком диференціального рівняння (20).

Далі, візьмемо довільну точку $(\varphi_0, x_0)\in\mathcal{M}_u$. З означення множини $\mathcal{M}_u$ випливає, що $x_0 = u(\varphi_0)$. Тоді $\begin{cases}\varphi = \varphi_t(\varphi_0),\\ x = u(\varphi_t(\varphi_0))\end{cases}$ — розв'язок системи рівнянь (1), що задовольняє початкову умову $\varphi(0)=\varphi_0$, $x(0) = x_0$ і $(\varphi_t(\varphi_0),$ $u(\varphi_t(\varphi_0)))\in\mathcal{M}_u$ для всіх $t\in\mathbb{R}$.

Звідси та з включення $u\in C^0(\Phi,X)$ випливає, що $\mathcal{M}_u$ — X-обмежена інваріантна множина системи диференціальних рівнянь (1).

Теорему 2 доведено.

Зауважимо, що нерухома точка $u\in C^0(\Phi,X)$ оператора $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}$ може бути не диференційовною по φ функцією навіть у випадку аналітичних a, P і F (відповідний приклад системи наведено у [2]), хоча складна функція $u(\varphi_t(\varphi))$ завжди є неперервно диференційовною.

6. Умови існування нерухомих точок оператора $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}$. Розглянемо випадок, коли для відображення $F:\Phi\times X\to X$ виконується наступна умова.

Умова Ґ. Для деякого додатного числа L і всіх x_1, $x_2\in X$ справджується нерівність

$$\sup_{\varphi\in\Phi}\|F(\varphi,x_1)-F(\varphi,x_2)\|_X \le L\|x_1-x_2\|_X .$$

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* А, Б, В, Г, Ґ *і*

$$2NL < \nu.$$

Тоді оператор $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}: C^0(\Phi,X)\to C^0(\Phi,X)$ *має єдину нерухому точку.*

Доведення. На підставі умов теореми та рівності (19) виконується нерівність

$$\|(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})u_1-(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})u_2\|_{C^0(\Phi,X)} \le \frac{2NL}{\nu}\|u_1-u_2\|_{C^0(\Phi,X)}$$

для всіх u_1, $u_2\in C^0(\Phi,X)$. Оскільки

$$\frac{2NL}{\nu} < 1,$$

то оператор $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : C^0(\Phi, X) \to C^0(\Phi, X)$ є стискаючим [19]. Тому на підставі принципу стискаючих відображень [19] оператор $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ має єдину нерухому точку $u \in C^0(\Phi, X)$.

Теорему 3 доведено.

1. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
3. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 535 с.
4. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 271 с.
5. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269 – 274.
6. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Там же. – 1981. – **30**, № 3. – С. 443 – 460.
7. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. – 1981. – **116**, № 4. – С. 483 – 501.
8. *Слюсарчук В. Е.* Интегральное представление c-непрерывных линейных операторов // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 8. – С. 34 – 37.
9. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. – 1986. – **130**, № 1. – С. 86 – 104.
10. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 2. – С. 262 – 267.
11. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных и функционально-дифференциальных операторов // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 201 – 205.
12. *Курбатов В. Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990. – 168 с.
13. *Чан Хыу Бонг.* Почти периодические и ограниченные решения линейных функционально-дифференциальных уравнений: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1993. – 255 с.
14. *Слюсарчук В. Е.* Метод c-непрерывных операторов в теории импульсных систем // Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории и приложениям функционально-дифференциальных уравнений. – Душанбе, 1987. – С. 102 – 103.
15. *Слюсарчук В. Е.* Слабо нелинейные возмущения импульсных систем // Мат. физика и нелинейная механика. – 1991. – Вып. 15. – С. 32 – 35.
16. *Слюсарчук В. Ю.* Оборотність нелінійних різницевих операторів. – Рівне: Вид-во Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, 2006. – 233 с.
17. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння. – Київ: Либідь, 2003. – 600 с.
18. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
19. *Колмогоров А. М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – Київ: Вища шк., 1974. – 456 с.

Одержано 23.12.08