УДК 517.5

Е. А. Севостьянов (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ЛЕММЫ Е. А. ПОЛЕЦКОГО НА КЛАССЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Problems of space mapping theory are investigated. It is proved that the open discrete mappings $f \in W^{1,n}_{\rm loc}$ such that their outer dilatation $K_O(x, f)$ belongs to $L^{n-1}_{\rm loc}$ and a measure of the set B_f of branching points of f equals to zero have finite length distortion. In other words, under considered mappings $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, the images of almost all curves γ in a domain D are locally rectifiable, f has (N)-property on γ with respect to length, and, in addition, (N)-property holds also in the inverse direction for liftings of curves. The obtained results generalize the well-known Poletskii's lemma proved for quasiregular mappings.

Роботу присвячено дослідженням у області просторових відображень. Доведено, що так звані відкриті дискретні відображення $f \in W^{1,n}_{\rm loc}$ такі, що їх зовнішня дилатація $K_O(x, f)$ належить $L^{n-1}_{\rm loc}$ та міра множини B_f точок розгалуження f дорівнює нулю, мають скінченне спотворення довжини, тобто образи майже всіх кривих γ в області D при таких відображеннях $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, є локально спрямованими, f на γ має (N)-властивість відносно довжини і, крім того, (N)-властивість має місце у зворотному напрямку щодо підняттів кривих. Отримані результати узагальнюють відому лему Є. О. Полецького, що була доведена раніше для квазірегулярних відображень.

1. Введение. В одной из работ Е. А. Полецкого был получен интересный и, по мнению автора, важнейший результат (см. лемму 6 в [1, с. 266]). Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — квазирегулярное отображение, определенное в области D в $\mathbb{R}^n$. Тогда для почти всех кривых $\gamma_* \in f(D)$ кривая γ такая, что $f\circ\gamma = \gamma_*$, абсолютно непрерывна. Отметим, что последнее свойство еще называют ACP^{-1}-свойством отображения f. Другими словами, речь идет об абсолютной непрерывности отображения f на почти всех кривых в „обратную сторону", т. е. абсолютно непрерывными являются прообразы кривых при отображении f. Ниже мы уточним формулировку „для почти всех кривых".

ACP^{-1}-свойство фактически является частью определения отображений с конечным искажением длины, введенных в 2002 г. в [2]. Приведем несколько неформальных вводных понятий, связанных с упомянутым классом. Прежде всего, отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением конечного метрического искажения,* если f имеет (N)-свойство Лузина и почти всюду искажает расстояние между точками в конечное число раз. Один из критериев принадлежности этому классу заключается в том, что f дифференцируемо почти всюду и имеет (N)- и (N^{-1})-свойства (см. следствие 3.14 в [2]). Отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением длины,* если f — отображение конечного метрического искажения и имеет (L)-свойство, т. е., во-первых, образы почти всех кривых γ в D локально спрямляемы и f на γ имеет (N)-свойство относительно длины и, во-вторых, (N)-свойство имеет место и в обратную сторону для поднятий кривых.

Опишем вкратце постановку задачи и цель исследований, которым посвящена данная статья. Для отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, имеющего в D частные производные почти всюду, пусть $f'(x)$ — якобиева матрица отображения f в точке x, $J(x,f)$ — якобиан отображения f в точке x, т. е. детерминант $f'(x)$. В дальнейшем $\|f'(x)\| = \max\limits_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \dfrac{|f'(x)h|}{|h|}$. *Внешняя дилатация* отображения f в точке x есть величина

$$K_O(x,f) = \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,f)|},$$

если $J(x,f)\neq 0,$ $K_O(x,f)=1,$ если $f'(x)=0,$ и $K_O(x,f)=\infty$ в остальных точках. Пусть $l\big(f'(x)\big)=\min\limits_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\dfrac{|f'(x)h|}{|h|}$. Напомним, что *внутренняя дилатация* отображения f в точке x есть величина

$$K_I(x,f)=\frac{|J(x,f)|}{l\left(f'(x)\right)^n},$$

если $J(x,f)\neq 0,$ $K_I(x,f)=1,$ если $f'(x)=0,$ и $K_I(x,f)=\infty$ в остальных точках.

Основной целью настоящей статьи является установление взаимосвязи между отображениями класса Соболева и отображениями конечного искажения длины. Такая взаимосвязь, по сути, была отмечена в работе [2] (см. замечание 4.10), однако доказательства приведено не было. Несколько позднее оно было приведено в работе [3], однако методология доказательства была весьма сложной, к тому же многие результаты доказаны с перегруженными априорными условиями (см. теорему 2.1, теорему 4.1 и следствие 4.1 там же). Доказательство, которое приведено ниже (теорема 1), базируется на методе Е. А. Полецкого, является более простым и, в известном смысле, вполне соответствующим понятиям о математической строгости.

Отметим, что наиболее значимым моментом, определяющим упомянутую взаимосвязь, есть доказательство ACP^{-1}-свойства, поскольку, как это будет видно ниже, все остальные характеристики отображений с конечным искажением длины, входящие в определение этого класса, могут быть получены сравнительно легко. При этом мы используем, в частности, известные факты из теории отображений, полученные в работах [4–10], а также подход, использованный в работе [1].

2. Определения и предварительные замечания. Всюду далее D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, $B(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n\colon |x-x_0|<r\}$. Отображение $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y\in\mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества $U\subseteq D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. Запись $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f непрерывно. Запись $G\Subset D$ означает, что $\overline{G}$ – компактное подмножество области D. Будем также предполагать, что отображение f *сохраняет ориентацию,* если топологический индекс $\mu(y,f,G)>0$ для произвольной области $G\Subset D$ и произвольного $y\in f(G)\setminus f(\partial G)$ (см., например, [11]). Через B_f, $B_f\subset D$, будем обозначать множество точек ветвления отображения f, т. е. $x_0\in B_f$ тогда и только тогда, когда f не является гомеоморфизмом ни в какой окрестности точки x_0. Для множества $A\subset\mathbb{R}^n$ запись $|A|$ обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$. Область $G\subset D$ такая, что $G\Subset D$, называется *нормальной областью отображения* f, если $\partial fG=f\partial G$. Окрестность U точки x_0 называется *нормальной окрестностью отображения* f, если U — нормальная область f. Пусть $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ — произвольное отображение и существует область $G\Subset D$ такая, что $\overline{G}\cap f^{-1}\left(f(x)\right)=\{x\}$. Тогда величина $\mu\left(f(x),f,G\right)$, называемая *локальным топологическим индексом*, не зависит от выбора области G и обозначается символом $i(x,f)$. Пусть $V\subset D$ — нормальная область, $y\in f(V)$, $\{x_k\}=f^{-1}(y)\cap V$, тогда функция $\mu(y,f,V)=\mu(f,V)=\sum_k i(x_k,f)$ постоянна в $f(V)$ для произвольного открытого дискретного отображения $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ (см. разд. 4, гл. I [12, с. 18]). Пусть $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение, $U'\subset D$ — нормальная область, $\mu(f,U')=m$. Кривую γ_* назовем *разрешимой*, если существуют m кривых $\gamma_k \subset U'$ таких, что $f \circ \gamma_k = \gamma_*$ для всех $k = 1, \ldots, m$, причем $\gamma_i \cap \gamma_j \subset B_f$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \gamma_i = f^{-1}(\gamma) \cap U'$ (см. §2 [1]). Напомним, что борелева функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если $\int\limits_\gamma \rho(x)\, ds \geq 1$ для всех путей $\gamma \in \Gamma$. В этом случае пишем $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_D \rho^n(x) \ \ dm(x),$$

где $m(x)$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $Q\colon D \to [1, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Говорят, что $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *Q-отображением*, если

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_D Q(x) \rho^n(x)\, dm(x) \tag{1}$$

для любого семейства Γ путей γ в D и для каждой допустимой функции $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$ [2]. Неравенство (1) установлено в [13] для квазиконформных отображений с $Q = K_I(x, f)$, где $K_I(x, f)$ — внутренняя дилатация f в точке x.

Пусть $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi\colon E \to \mathbb{R}^n$. Положим

$$L\,(x, \varphi) = \limsup_{y \to x, y \in E} \frac{|\varphi\,(x) - \varphi\,(y)\,|}{|y - x|}, \qquad l\,(x, \varphi) = \liminf_{y \to x, y \in E} \frac{|\varphi\,(x) - \varphi\,(y)\,|}{|y - x|}.$$

Отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется отображением с *конечным метрическим искажением* (пишут $f \in FMD$), если f имеет (N)-свойство Лузина и для почти всех $x \in D$

$$0 < l\,(x, f) \leq L\,(x, f) < \infty.$$

Говорят, что отображение $f\colon X \to Y$ между пространствами с мерой (X, Σ, μ) и (X', Σ', μ') имеет *(N)-свойство*, если $\mu'\,(f(S)) = 0$, как только $\mu(S) = 0$. Аналогично, f имеет *(N^{-1})-свойство*, если $\mu(S) = 0$, как только $\mu'\,(f(S)) = 0$. Пусть $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ — открытый интервал числовой прямой, $\gamma\colon \Delta \to \mathbb{R}^n$ — локально спрямляемая кривая. Тогда существует единственная неубывающая функция длины $l_\gamma\colon \Delta \to \Delta_\gamma \subseteq \mathbb{R}$ с условием $l_\gamma(t_0) = 0$, $t_0 \in \Delta$, такая, что $l_\gamma(t)$ равно длине подкривой $\gamma\,|_{[t_0, t]}$ кривой γ, если $t > t_0$, и $-l\left(\gamma\,|_{[t, t_0]}\right)$, если $t < t_0$, $t \in \Delta$. Пусть $g\colon |\gamma| \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, где $|\gamma| = \gamma(\Delta) \subseteq \mathbb{R}^n$. Предположим, что кривая $\widetilde{\gamma} = g \circ \gamma$ также локально спрямляема. Тогда существует единственная неубывающая функция $L_{\gamma, g}\colon \Delta_\gamma \to \Delta_{\widetilde{\gamma}}$ такая, что $L_{\gamma, g}\,(l_\gamma(t)) = l_{\widetilde{\gamma}}(t)\ \forall t \in \Delta$. Говорят, что отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ имеет *(L)-свойство*, если выполнены следующие условия: (L_1) для почти всех кривых $\gamma \in D$ кривая $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$ локально спрямляема и функция $L_{\gamma, f}$ имеет (N)-свойство; (L_2) для почти всех кривых $\widetilde{\gamma} \in f\,(D)$ каждое *(полное) поднятие* γ кривой $\widetilde{\gamma}$ локально спрямляемо и функция $L_{\gamma, f}$ имеет $\left(N^{-1}\right)$-свойство. Кривая $\gamma \in D$ называется *полным поднятием кривой* $\widetilde{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ *при отображении* $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, если $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$, и говорят, что некоторое свойство выполнено для *почти всех кривых* области D, если оно имеет место для всех кривых, лежащих в D, кроме некоторого их семейства, модуль которого равен нулю.

Говорят, что отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, является *отображением с конечным искажением длины* (пишут $f \in FLD$), если $f \in FMD$ и имеет (L)-свойство.

Согласно замечанию 4.1 в [2], из (L)-свойства следует ACP*-свойство,* т. е. абсолютная непрерывность функции $L_{\gamma,f}$ на всех замкнутых интервалах Δ_γ для почти всех кривых γ в D. Будем говорить, что отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ имеет ACP^{-1}*-свойство*, если функция $L^{-1}_{\gamma,f}$ абсолютно непрерывна на замкнутых подынтервалах $\Delta_{\widetilde{\gamma}}$ для почти всех кривых $\widetilde{\gamma}$ в $f(D)$ и каждого поднятия γ кривой $\widetilde{\gamma}$. Известно, что отображение f имеет (L)-свойство тогда и только тогда, когда $f \in ACP \cap ACP^{-1}$ (см. предложение 4.3 в [2]).

Отметим, что отображения конечного искажения длины являются Q-отображениями с $Q = K_I(x,f)$ (см. теорему 6.10 в [2]). Пусть $I = [a,b]$. Для заданной кривой $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ определим функцию длины $S(t)$ по правилу $S(t) = S\big(\gamma, \gamma[a,t]\big)$, где $S(\gamma, A)$ обозначает длину кривой $\gamma|_A$. Пусть $B \subset I$, тогда $S(\gamma(B))$ обозначает меру множества значений функции $S(t)$ на множестве B.

Пусть E — множество в $\mathbb{R}^n$ и $\gamma\colon \Delta \to \mathbb{R}^n$ — некоторая локально спрямляемая кривая. Обозначим $\gamma \cap E = \gamma\,(\Delta) \cap E$. Тогда

$$l\,(\gamma \cap E) = \mathrm{mes}_1(E_\gamma),$$

где

$$E_\gamma = l_\gamma\left(\gamma^{-1}\,(E)\right).$$

Здесь $\mathrm{mes}_1(A)$ обозначает длину множества $A \subset \mathbb{R}$, а функция $l_\gamma\colon \Delta \to \Delta_\gamma$ определена выше. Заметим, что

$$E_\gamma = \gamma_0^{-1}\,(E)\,,$$

где $\gamma_0\colon \Delta_\gamma \to \mathbb{R}^n$ — натуральная параметризация кривой γ, и

$$l\,(\gamma \cap E) = \int\limits_{\Delta} \chi_E\,(\gamma(t))\,ds = \int\limits_{\Delta_\gamma} \chi_{E_\gamma}(s)ds.$$

Предложение 1. *Пусть* $\gamma_1\colon I = [0,l] \to \mathbb{R}^n$ *— спрямляемая кривая и* $B = \overline{B} \subset I$, $S(\gamma_1, B) = 0$. *Пусть, кроме того, кривая* $\gamma_2\colon I \to \mathbb{R}^n$ *спрямляема на* $I \setminus B$ *и* $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ *при* $t \in B$. *Тогда кривая* γ_2 *также спрямляема и* $S(\gamma_2, B) = 0$ (*см. лемму* 1 *в* [1]).

Предложение 2. *Пусть* $\gamma\colon I = [0,l] \to \mathbb{R}^n$ *— кривая,* $B = \overline{B} \subset I$ *и множество* $E \subset I$ *таково, что* $\overline{E} \subset E \cup B$ *и* $E \cap B = \varnothing$. *Если* γ *спрямляема на* $I \setminus (E \cup B)$, *для любой точки* $t \in I \setminus B$ *найдется окрестность* V, *в которой* γ *спрямляема, и* $S(\gamma, V) = S(\gamma, V \setminus E)$, *то* γ *спрямляема на* $I \setminus B$ *и* $S(\gamma, I \setminus B) = S\,(\gamma, I \setminus (E \cup B))$ (*см. лемму* 2 *в* [1]).

Предложение 3. *Пусть* $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ *— спрямляемая кривая. Если* $S(\gamma, B) = 0$ *для любого множества* $B \subset I$, *как только* $\mathrm{mes}_1(B) = 0$, *то функция* $S(t)$ *абсолютно непрерывна* (*см. лемму* 3 *в* [1]).

Предложение 4. *Пусть* $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ *— открытое дискретное отображение,* $U' \Subset D$ *— нормальная область,* γ_* *— спрямляемая жорданова кривая в* $f\,(U')$ *и* $l\,((\gamma_* \cap f(B_f))) = 0$. *Тогда* γ_* *разрешима.*

Доказательство предложения 4 дословно повторяет доказательство леммы 4 в [1], поскольку используются лишь общие свойства открытых дискретных отображений, а не именно квазирегулярных, и потому здесь не приводится.

Пусть $V \Subset D$ — нормальная область и $f(V) = V^*$. Определим отображение $g_V\colon V^* \to \mathbb{R}^n$ следующим образом: пусть $y \in V^*$, $f^{-1}(y) \cap V = \{x_i\}$, тогда

$$g_V(y) = \frac{1}{m} \sum_i i(x_i, f) x_i,$$

где $m = \sum i(x_i, f) = \mu(f, V)$.

Предложение 5. *Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ – открытое дискретное отображение класса $W^{1,n}_{\rm loc}(D)$, для которого $K_O(x,f) \in L^{n-1}_{\rm loc}$ и $|B_f| = 0$. Тогда $g_V(y)$ непрерывно в V^* и $g_V(y) \in ACL^n(V^*)$ (см. теорему* 2.1 *в* [3]).

3. Формулировка и доказательство основного результата.

Теорема 1. *Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение класса $W^{1,n}_{\rm loc}(D)$, для которого либо $K_O(x,f) \in L^{n-1}_{\rm loc}$, либо $K_I(x,f) \in L^1_{\rm loc}$ и $|B_f| = 0$. Тогда f является отображением с конечным искажением длины.*

Доказательство. *Шаг* 1. Поскольку отображение f открыто в D и принадлежит классу $W^{1,n}_{\rm loc}(D)$, f дифференцируемо почти всюду (см. теорему 4 в [9, с. 331]) и имеет (N)-свойство (см. [5]). Заметим также, что f имеет $\left(N^{-1}\right)$-свойство (см. теорему 1.2 в [8]). Поскольку $f \in W^{1,n}_{\rm loc}$, $f \in ACP$ (см. п. 28.2 в [10]).

Шаг 2. Покажем, что $f \in ACP^{-1}$. Метод доказательства основан на подходе из работы [1] (см. лемму 6). Перед тем, как непосредственно перейти к доказательству, сделаем несколько замечаний. Пусть Γ — семейство кривых в D и $\Gamma_* = f(\Gamma)$. Не ограничивая общности, можно считать, что все кривые γ_* семейства Γ_* спрямляемы. Пусть s_* — натуральный параметр на γ_* и $\gamma_* = f(\gamma(t))$. Поскольку функция $s_*(t)$ строго монотонна и непрерывна, существует обратная функция $t(s_*)$, которая также строго монотонна и непрерывна. Таким образом, можно рассмотреть параметр s_* на γ. В дальнейшем будем предполагать, что все кривые семейств Γ и Γ_* параметризованы таким образом. Пусть f удовлетворяет условиям теоремы 1, $\widetilde{\Gamma}$ – семейство кривых в D и $\widetilde{\Gamma}_* = f(\widetilde{\Gamma})$. Покажем, что $\gamma(s_*)$ абсолютно непрерывна для почти всех кривых $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$ таких, что $f \circ \gamma = \gamma_*$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\widetilde{\Gamma} \subset U'$, где $U' \Subset D$. Пусть $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$ и I — отрезок, который является областью определения параметра s_*. Покажем, что для почти всех кривых $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$ кривая γ спрямляема на $I \setminus \gamma(B_f)$, где $f \circ \gamma = \gamma_*$ и $\gamma(B_f) = \{s_*\colon \gamma(s_*) \in B_f\}$. Покроем множество $U' \setminus B_f$ счетной системой окрестностей $\{U_l\}$, в каждой из которых отображение $f_l = f|_{U_l}$ гомеоморфно. Пусть $h_l = f_l^{-1}$, $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$. Поскольку либо $K_O(x,f) \in L^{n-1}_{\rm loc}$, либо $K_I(x,f) \in L^1_{\rm loc}$, $h_l = (h_{l1}, \ldots, h_{ln}) \in W^{1,n}_{\rm loc}$ (см. теорему 6.1 в [4] и следствие 2.3 в [3] соответственно) и, следовательно, h_l абсолютно непрерывно для почти всех кривых $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$ (см. п. 28.2 в [10]). Заметим, что если $\gamma(s_*) \in U_l \cap U_j$, то $h_l\left(\gamma_*(s_*)\right) = h_j\left(\gamma_*(s_*)\right)$. Так как кривая γ параметризована посредством параметра s_*, можно определить отображение $g\colon \gamma_*|_{I\setminus\gamma(B_f)} \to \mathbb{R}^n$ такое, что если $\gamma(s_*) \in U_k$, то $g(\gamma_*(s_*)) = h_k\left(\gamma_*(s_*)\right)$. Согласно теореме 4 в [9, с. 331], каждый гомеоморфизм класса $W^{1,n}_{\rm loc}$ дифференцируем почти всюду и, следовательно, h_l дифференцируемо почти всюду в $f_l(D)$. Пусть B^* — множество, где полный дифференциал h_l не существует хотя бы для одного l. Тогда множество B^* борелево и $|B^*| = 0$. По теореме 33.1 в [10] $l\left(\gamma_* \cap B^*\right) = 0$ для почти всех кривых $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$. Следовательно, $\gamma'(s_*)$ существует для почти всех s_* и для почти всех кривых $\gamma_* = f \circ \gamma \in \widetilde{\Gamma}_*$. Положим $\dfrac{\partial g_l}{\partial y_j}(s_*) = \dfrac{\partial h_{kl}}{\partial y_j}\left(\gamma_*(s_*)\right)$. Имеем

$$S(\gamma, I\setminus\gamma(B_f)) = \int\limits_{I\setminus\gamma(B_f)} |\gamma'|\, ds_* \le \int\limits_{I\setminus\gamma(B_f)} \left(\sum_{l,j}\left(\frac{\partial g_l}{\partial y_j}\right)^2\right)^{1/2} ds_*$$

для почти всех кривых $\gamma_* = f\circ\gamma \in \widetilde{\Gamma}_*$. Поскольку $h_l \in W^{1,n}_{\rm loc}$ и $|U'| < \infty$,

$$\int\limits_{I\setminus\gamma(B_f)} \left(\sum_{l,j}\left(\frac{\partial g_l}{\partial y_j}\right)^2\right)^{1/2} ds_* < \infty$$

для почти всех кривых $\gamma_* = f\circ\gamma$. Следовательно, для почти всех кривых $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$ кривая γ спрямляема на $I\setminus\gamma(B_f)$. Более того, $S(\gamma, C) = 0$ для почти всех γ_* для каждого множества C, $C \subset I\setminus\gamma(B_f)$, такого, что $\mathrm{mes}_1(C) = 0$. Действительно, $S(\gamma, C) = \int_C |\gamma'|\, ds_* = 0$ для почти всех $\gamma_* = f\circ\gamma \in \widetilde{\Gamma}_*$. Пусть B_l — множество точек ветвления x таких, что $i(x,f) = l$ и $\gamma(B_l) = \{s_* \colon \gamma(s_*) \in B_l\}$. Покажем, что для почти всех кривых γ_* кривая $\gamma(s_*)$ спрямляема на $I\setminus\bigcup\limits_{k>l}\gamma(B_k)$ и $S(\gamma, C) = 0$ для любого множества C такого, что $\mathrm{mes}_1(C) = 0$ и $C \subset I\setminus\bigcup\limits_{k>l}\gamma(B_k)$. Доказательство проведем индукцией по l. При $l = 1$ утверждение доказано. Предположим, что оно справедливо для $l = j-1$, и покажем его справедливость для $l = j$. Поскольку по предположению $|B_f| = 0$, по (N)-свойству также $|f(B_f)| = 0$. Согласно теореме 33.1 в [10], $\mathrm{mes}_1(\gamma(B_f)) = l(\gamma_*\cap f(B_f)) = 0$ для почти всех кривых $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$ и всех кривых γ таких, что $\gamma_* = f\circ\gamma$. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $\mathrm{mes}_1(\gamma(B_f)) = 0$. Покроем B_j счетной системой нормальных областей $\{U_l\}$ таких, что $\mu(f, U_l) = j$, где $\mu(f, U_l) = \sum_{x_l\in U_l} i(x_l, f)$. По предложению 5 отображение $g_l = g\,|_{f(U_l)}$ абсолютно непрерывно на почти всех кривых из $U_l^* = f(U_l)$ (см. п. 28.2 в [10]). Заметим, что при $\gamma_*(s_*) \in f(B_j\cap U_l)$ выполнено $g_l(\gamma_*(s_*)) = \gamma(s_*)$. По предложению 4 $g_l^{-1}\gamma_*$ состоит из не более чем счетного числа кривых $\{\gamma_l\}$ в U_l, причем они совпадают с γ в точках B_f. Применяя поочередно к каждой такой кривой и к кривой γ предложение 1, а также учитывая абсолютную непрерывность g_l, получаем, что $S(\gamma, \gamma(B_j\cap U_l)) = 0$ для почти всех кривых γ_* таких, что $\gamma_* = f\circ\gamma$. Суммируя по всем окрестностям U_l, имеем $S(\gamma, \gamma(B_j)) = 0$ для почти всех кривых γ_* таких, что $\gamma_* = f\circ\gamma$. Полагая в предложении 2 $B := \bigcup\limits_{k>j}\gamma(B_k)$ и $E := \gamma(B_j)$ и используя предположение индукции, убеждаемся, что кривая γ спрямляема на $I\setminus\bigcup\limits_{k>j}\gamma(B_k)$ и $S(\gamma, C) = 0$ при $C \subset I\setminus\bigcup\limits_{k>j}\gamma(B_k)$, $\mathrm{mes}_1(C) = 0$. Поскольку U' — компакт, найдется $M\in\mathbb{N}$ такое, что $i(x,f) \le M$. Тогда на основании доказанного выше $S\left(\gamma, \bigcup\limits_{j=2}^{M}\gamma(B_j)\right) = 0$ для почти всех кривых γ_* таких, что $\gamma_* = f\circ\gamma$. По предложению 3 получаем, что кривая $\gamma(s_*)$ абсолютно непрерывна и спрямляема для почти всех кривых $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$.

Шаг 3. Согласно следствию 3.14 в [2], так как f дифференцируемо почти всюду и имеет (N)- и (N^{-1})-свойства, f является отображением с конечным метрическим искажением, а вследствие того, что $f \in ACP\cap ACP^{-1}$, — еще и отображением с конечным искажением длины (см. предложение 4.3 в [2]).

Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ — отображение класса $W^{1,n}_{\rm loc}$, для которого $K_O(x,f)\in L^p_{\rm loc}$ при некотором $p>n-1$ и $|B_f|=0$. Тогда f является отображением с конечным искажением длины.*

Доказательство непосредственно следует из того, что при указанных условиях отображение f открыто и дискретно (см. [6, 7] и теорему 1).

***Следствие* 2.** *Пусть $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение класса $W^{1,n}_{\rm loc}$, для которого либо $K_O(x,f)\in L^{n-1}_{\rm loc}$, либо $K_I(x,f)\in L^1_{\rm loc}$ и $|B_f|=0$. Тогда f является Q-отображением с $Q=K_I(x,f)$.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы 6.10 в [2] и теоремы 1.

1. *Полецкий Е. А.* Метод модулей для негомеоморфных квазиконфомных отображений // Мат. сб. – 1970. – **83**, № 2. – С. 261 – 272.
2. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. Anal. Math. – 2004. – **93**. – P. 215 – 236.
3. *Koskela P., Onninen J.* Mappings of finite distortion: Capacity and modulus inequalities // J. reine und angew. Math. – 2006. – **599**. – S. 1 – 26.
4. *Heinonen J., Koskela P.* Sobolev mappings with integrable dilatations // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1993. – **125**. – P. 81 – 97.
5. *Maly J., Martio O.* Lusin's condition and mappings of the class // J. reine und angew. Math. – 1995. – **458**. – S. 19 – 36.
6. *Manfredi J. J., Villamor E.* Mappings with integrable dilatation in higher dimensions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1995. – **32**, № 2. – P. 235 – 240.
7. *Manfredi J. J., Villamor E.* An extension of Reshetnyak's theorem // Indiana Univ. Math. J. – 1998. – **47**, № 3. – P. 1131 – 1145.
8. *Koskela P., Maly J.* Mappings of finite distortion: The zero set of Jacobian // J. Eur. Math. Soc. – 2003. – **5**, № 2. – P. 95 – 105.
9. *Решетняк Ю. Г.* Обобщенные производные и дифференцируемость почти всюду // Мат. сб. – 1968. – **75**, № 3. – С. 323 – 334.
10. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – Berlin etc.: Springer, 1971. – **229**.
11. *Rado T., Reichelderfer P. V.* Continuous transformations in analysis. – Berlin etc.: Springer, 1955.
12. *Rickman S.* Quasiregular mappings // Results Math. and Relat. Areas. – 1993. – **26**, № 3.
13. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397 – 1420.

Получено 25.11.08