УДК 517.954

М. І. Матійчук (Чернів. нац. ун-т)

ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ЗІ СПЕЦІАЛЬНИМ ПАРАБОЛІЧНИМ ОПЕРАТОРОМ ДРОБОВОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

We establish the correctness of the Cauchy problem and a two-point boundary-value problem for an equation with operator of fractional differentiation which corresponds to the singular parabolic Beltrami – Laplace operator on the surface from the Dini class.

Установлена корректность задачи Коши и двухточечной краевой задачи для уравнения с оператором дробного дифференцирования, который соответствует сингулярному параболическому оператору Бельтрами – Лапласа на поверхности из класса Дини.

Задачі Коші і крайові задачі для рівнянь з операторами дробового диференціювання вивчались у багатьох роботах (див., наприклад, [1 – 5]). Інструментом редукції задач до інтегральних рівнянь є спеціальні оператори.

1. Теореми про дію деяких інтегральних операторів. ***1.1. Про фундаментальний розв'язок (ф. р.) параболічного рівняння на поверхні із класу Діні.*** Розглянемо $\mathcal{B}$-параболічне рівняння на поверхні $S^+ = S \times (0, +\infty)$ у просторі E_n^+:

$$\Lambda(D)u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^b \left(\Delta_{x'} + B_{x_n}\right)^b u = 0, \quad n > 2, \tag{1}$$

де $B_{x_n} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \dfrac{2\nu + 1}{x_n}\dfrac{\partial}{\partial x_n}$, $\nu \geq -1/2$, $b \geq 1$.

Припустимо, що поверхня S покривається відкритими множинами $\{S_l\}$, $S = \bigcup S_l$ і S в S_l визначається рівнянням $x_i = \varphi_i^{(l)}(\bar{x}'')$, $i = \overline{1, n-1}$, у криволінійних координатах $\bar{x}'' = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-2})$, до того ж $\varphi_i^{(l)} \in C^{(2b,\omega)}(T_i)$. Оператор Лапласа Δ_x на S_l має вигляд [5]

$$\Delta_l = \left[g^{(l)}(\bar{x}'')\right]^{-1/2} \sum_{i,j=1}^{n-2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\left(\sqrt{g^{(l)}(\bar{x}'')}\, g_l^{ij}(\bar{x}'')\frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

де g_l^{ij} — елементи матриці, яка обернена для матриці з елементів

$$g_{ij}^{(l)}(\bar{x}'') = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi_k^{(l)}(\bar{x}'')}{\partial \bar{x}_i}\frac{\partial \varphi_k^{(l)}(\bar{x}'')}{\partial \bar{x}_j}, \quad g^{(l)}(\bar{x}'') = \det\left(g_{ij}^{(l)}(\bar{x}'')\right).$$

Нехай $\{\psi_l\}$ — сукупність функцій, які утворюють на S розбиття одиниці, $\hat{\psi}_l(x')$ — гладкі функції з носіями в S_l і $\hat{\psi}(x') = 1$, якщо $x' \in \operatorname{supp}\psi_l \subset S_l$. Тоді на S^+ оператор $\Lambda(D)$ набере вигляду

$$\Lambda(D)u = \sum_l \psi_l(x')\,\Lambda_l(D)[\hat{\psi}_l u],$$

де

$$\Lambda_l(D) = \frac{\partial}{\partial t} + (-1)^b\left(\Delta_l + B_{x_n}\right)^b = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{b \leq |k| + 2j \leq 2b} a_{kj}^{(l)}(\bar{x}'')\, D_{x''}^k B_{x_n}^j.$$

Зазначимо, що тут $a_{kj}^{(l)} \in C^{(2b-1,\omega)}(T_l)$, $|k| = 2b$, і при $|k| < 2b$ $a_{kj}^{(l)} \in C^{(0,\omega)}(T_l)$, оскільки $S \in C^{(2b,\omega)}$.

Позначимо через $T_{x_n}^{\xi_n} G_0^{(l)}(t, \bar{x}'', x_n; \bar{y}'')$ функцію Гріна задачі Коші для рівняння з параметром

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k|+2j=2b} a_{kj}^{(l)}(\bar{y}'') D_{\bar{x}''}^k B_{x_n}^j u .$$

Головна частина ф. р. рівняння (1) визначається формулою

$$G_0(t, x, \xi) = \sum_l \beta_l(x') T_{x_n}^{\xi_n} G_0^{(l)}\left(t, x'' - \bar{\xi}'', x_n; \bar{\xi}''\right) \frac{\beta_l(\xi')}{\sqrt{g^{(l)}\left(\bar{\xi}''\right)}},$$

де

$$\sum_l \beta_l^2(x') = 1, \quad \operatorname{supp}\beta_l(x') \subset S_l, \quad \beta_l \in C^\infty(S_l).$$

Теорема 1. *Якщо поверхня S в E_{n-1} належить класу $C^{(2b,\omega)}$, то ф.р. рівняння* (1) *визначається формулою*

$$G(t, x, \xi) = G_0(t, x, \xi) + \int_0^t d\tau \int_{S^+} G_0(t-\tau, x, y)\, \Phi(\tau, y, \xi)\, y_n^{\nu_0} dS_y \equiv G_0 + W_\Lambda \tag{2}$$

і для його похідних справджуються оцінки

$$\left| D_\xi^m D_x^k B_{x_n}^j G(t, x, \xi) \right| \le C t^{-(n_\nu - 1 + |k| + 2j + |m|)/2b} T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c\rho(t, x, \xi')} \right\},$$

$$\nu_0 = 2\nu + 1, \quad |k| + 2j \le 2b, \quad |m| \le 1,$$

$$\left| D_\xi^m D_x^k B_{x_n}^j W_\Lambda(t, x, \xi) \right| \le t^{-(n_\nu - 2 + |k| + 2j + |m|)/2b} T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c\rho(t, x, \xi')} \right\},$$

$$\left| \Delta_x D_x^k B_{x_n}^j G(t, x, \xi) \right| \le C t^{-(n_\nu - 1 + 2b)/2b} F(\Delta x, t) T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c\rho(t, x, x + \Delta x, \xi')} \right\},$$

$$\left| \Delta_t D_x^k B_{x_n}^j G(t, x, \xi) \right| \le C t^{-(n_\nu - 1 + 2b)/2b} F\left(\sqrt[2b]{\Delta t}, t \right) \Delta t^{(2b - |k| - 2j)/2b} T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c\rho(t, x, \xi')} \right\},$$

$$F(t) = A\omega(t) \equiv \int_0^t \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau, \qquad F(x, t) = F(|x|) + |x| t^{-1/2b},$$

$$n_\nu = n + 2\nu + 1, \quad 0 < |k| + 2j \le 2b, \quad 0 < \Delta t < \sqrt[2b]{t}.$$

Розв'язок задачі Коші $\Lambda(D)u = f$, $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = 0$ *для довільних* $f \in C^{(0,\omega)}$, $\varphi \in C(S^+)$ *визначається однозначно інтегралами*

$$u(t, x) = \int_{S^+} G(t, x, \xi)\, \varphi(\xi)\, \xi_n^{\nu_0} dS_\xi + \int_0^t d\tau \int_{S^+} G(t - \tau, x, \xi)\, f(\tau, \xi)\, \xi_n^{\nu_0} dS_\xi \tag{3}$$

і належить класу $C^{(2b,F)}(\Gamma)$.

З теореми 1 випливають дві важливі властивості ф. р. рівняння (1).

Властивість 1 (формула згортки):

$$\int_{S^+} G(t,x,y)\,G(\tau,y,\xi)\,y_n^{\nu_0}dS_y \;=\; G(t+\tau,x,\xi)\,.$$

Властивість 2. *Якщо* $P_{k_0}(x)$ *— многочлен степеня* $k_0<2b$, *який є парним по* x_n, *то*

$$\int_{S^+} G(t,x,y)\,P_{k_0}(y)\,y_n^{\nu_0}dS_y \;=\; P_{k_0}(x)\,,$$

внаслідок чого

$$\int_{S^+} D_{x'}^m B_{x_n}^j G(t,x,y)\,(y'-x')^r\;y_n^{\nu_0+2p}dS_y \;=\; \begin{cases} 0, & |m|>r, \quad j>p, \\ C_{mj}^{-1}, & m=r, \quad j=p, \\ P_{r-m}(x')x_n^{2(p-j)}, & |m|<r, \quad j<p, \end{cases}$$

де

$$C_{mj}^{-1} \;=\; 4^j m!\,j!\,\Gamma(\nu+1+j)\,\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\,.$$

Слід зазначити, що для побудови ф. р. за формулою (2), тобто за конструкцією Леві, для щільності $\Phi(t,x,\xi)$ потенціалів W_Λ при застосуванні оператора $\Lambda(D)$ до $G(t,x,\xi)$ отримуємо інтегральне рівняння з квазірегулярним ядром, а вивчення диференціальних властивостей поверхневого інтеграла зводиться згідно з умовами на поверхню S до відповідних об'ємних потенціалів, як у § 6 [5].

1.2. Теореми про дію інтегральних операторів типу операторів дробового інтегрування та диференціювання. Розглянемо функції $G^{(\pm l)}(t,x,\xi) = G(t,x,\xi)\,t^{-(2b\pm l)/2b}$ при $t>0$ і $G^{(\pm l)}\equiv 0$ при $t<0$; $(\tau,\xi) = M_0 \in [0,T) \times S^+ = \Gamma$.

Введемо оператори і класи функцій

$$u^{+l}(t,x;M_0) \;=\;$$

$$=\; \int_\tau^t d\beta \int_{S^+} G^{(+l)}\,(t-\beta,x,y)\big[f(\beta,\tau;M_0)-f(t,x;M_0)\big]\,y_n^{\nu_0}dS \;\equiv\; G^{(+l)}(f)\,,$$

$$u^{-l}(t,x;M_0) \;=\; \int_\tau^t d\beta \int_{S^+} G^{(-l)}\,(t-\beta,x,y)\,f(\beta,y;M_0)\,y_n^{\nu_0}dS \;\equiv\; G^{(-l)}(f)\,.$$

Означення 1. *Функція* $f(t,x;\tau,\xi)$ *належить* $C_{\mu,\omega_1}^{(m,\omega_2)}(\Gamma,\Gamma)$, *якщо вона при* $t>\tau$ *має неперервні похідні* $D_x^{\bar{k}}f \equiv D_x^k B_{x_n}^j f$ *до порядку* $[m]$ ($[m]$ *— ціла, а* $\{m\}$ *— дробова частина числа* m), *для яких справджуються оцінки*

1) *при* $|\bar{k}| = |k| + 2j \le [m]$

$$\left| D_x^{\bar{k}} f(t,x;M_0) \right| \le C(t-\tau)^{-(|\bar{k}|+\mu)/2b}\, \omega_1\left(\sqrt[2b]{t-\tau}\right) T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi')}\right\};$$

2) *при* $|\bar{k}| = [m]$ *і* $|\Delta x| < \sqrt[2b]{t-\tau}$

$$\left| \Delta_x D_x^{\bar{k}} f(t,x;M_0) \right| \le C(t-\tau)^{-(m+\mu)/2b}\, \omega_2\left(|\Delta x|\right) |\Delta x|^{\{m\}} T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi')}\right\};$$

3) *при* $|\bar{k}| \le [m]$ *і* $0 < \Delta t < t-\tau$

$$\left| \Delta_t D_x^{\bar{k}} f(t,x;M_0) \right| \le C\Delta t^{(m-|\bar{k}|)/2b}(t-\tau)^{-(m+\mu)/2b}\, \omega_2\left(\sqrt[2b]{\Delta t}\right) T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi')}\right\}.$$

$C_{\mu,\omega_1}^{(m,\omega_2)}(\Gamma)$ — *клас функцій* $f(t,x)$, *похідні яких задовольняють умови* 1 – 3 *при значеннях* $\tau = c = 0$.

Умова $\boldsymbol{K^{(\pm l)}}$**.** Будемо вважати, що для модуля неперервності $\omega(t)$ і чисел $m \ge l > 0$ виконується умова $K^{(\pm l)}$, якщо існують сталі ε, $C > 0$ такі, що для $\tau < t$

$$\omega(t)\, t^{-1+\{m\pm l\}+\varepsilon} \le C\omega(\tau)\, \tau^{-1+\{m\pm l\}+\varepsilon}.$$

Теорема 2. *Оператор* $G^{(+l)}$ *є визначеним на множині функцій* $C_{\mu,\omega_1}^{(m,\omega_2)}(\Gamma,\Gamma)$ *і відображає її в* $C_{\mu+l,\omega}^{(m-l,\omega)}(\Gamma,\Gamma)$, *якщо для* (ω_i, m, l) *справджується умова* $K^{(+l)}$ *і* $\mu \le n_\nu - 1 + 2b$, $m \le 2b-1$, *де* $\omega(t) = \omega_1^{(\mu_\nu)}(t) + \omega_1^{(m-l)}(t) + \omega_2^{(m-l)}(t)$, *а* $\omega_1^{(\lambda)}(t) = \omega_i(t)$ *при* $\lambda > 0$ *і* $\omega_i^{(\lambda)}(t) = F_i(t)$ *при* $\lambda = 0$, $i = 1, 2$; $\mu_\nu = n_\nu - 1 + 2b - \mu$, $\{m\} = 0$.

Теорема 3. *Якщо* $f \in C_{\mu,\omega_1}^{(m,\omega_2)}(\Gamma,\Gamma)$ *і для* (ω_i, m, l) *виконується умова* $K^{(-l)}$, $\mu \le n_\nu - 1 + 2b$, $m + [\,l\,] < 2b$, *то* $u^{(-l)}(t,x;M_0)$ *належить класу* $C_{\mu-l,\omega^*}^{(m+l,\omega^*)}(\Gamma,\Gamma)$, *де* $t = \omega_1^{(\mu_\nu)}(t) + \omega_1^{\{l\}}(t) + \omega_2^{\{l\}}(t)$.

***Наслідок* 1.** *Якщо* $f \in C^{(m,\omega)}(\Gamma)$, *то*

$$G^{(\pm l)}(f) \in C^{\left(m\mp l,\,\omega^{(m-l)}\right)}(\Gamma).$$

Тепер введемо оператори дробового інтегрування і диференціювання:

$$I_{S^+}^{\alpha}(f) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} G^{(-2ba)}(f)(t,x,M_0) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau}^{t} (t-\beta)^{\alpha-1} d\beta \int_{S^+} G(t-\beta,x,y)\, f(\beta,y;M_0)\, y_n^{\nu_0} dS_y, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$D_{S^+}^{\alpha}(f) = \Lambda(D)\, I_{S^+}^{1-\alpha}(f) =$$

$$= \Lambda(D) \int_{\tau}^{t} (t-\beta)^{-\alpha} d\beta \int_{S^+} G(t-\beta,x,y)\, f(\beta,y;M_0)\, y_n^{\nu_0} dS_y.$$

Теорема 4. *Якщо функція* $f(t,x)$ *сумовна на* $\Gamma=(0,T)\times S^{+}$ *і при* $t>0$ *належить класу Діні* $C^{(0,\omega)}(\Gamma)$, *то* $D^{\alpha}_{S^+}I^{\alpha}_{S^+}(f)=f$.

Доведення. Розглянемо вираз $I^{1-\alpha}(f_\alpha)$, $f_\alpha\equiv I^{\alpha}f$, і скористаємось формулою згортки (властивістю 1). Тоді

$$I^{1-\alpha}(f_\alpha)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\int_{S^+}G(t-\tau,x,\xi)\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\tau}\frac{d\beta}{(\tau-\beta)^{1-\alpha}}\int_{S^+}G(\tau-\beta,\xi,y)\,f\,y_n^{\nu_0}dS_y\right\}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\int_0^{\tau}\frac{d\beta}{(\tau-\beta)^{1-\alpha}}\times$$

$$\times\int_{S^+}\left\{\int_{S^+}G(t-\tau,x,\xi)\,G(\tau-\beta,\xi,y)\,\xi_n^{\nu_0}dS_\xi\right\}f(\beta,y)\,y_n^{\nu_0}dS_y=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\int_0^{\tau}\frac{d\beta}{(\tau-\beta)^{1-\alpha}}\int_{S^+}G(t-\beta,x,y)\,f(\beta,y)\,y_n^{\nu_0}dS_y\,.$$

У перших двох інтегралах поміняємо порядок інтегрування і в інтегралі $\int_\beta^t(t-\tau)^{-\alpha}(\tau-\beta)^{-1+\alpha}\,d\tau$ покладемо $\tau=\beta+\eta(t-\beta)$. В результаті отримаємо

$$I^{1-\alpha}(f_\alpha)=\int_0^t d\tau\int_{S^+}G(t-\beta,x,y)\,f(\beta,y)\,y_n^{\nu_0}dS_y\,.$$

За теоремою 1 і припущенням на $f\in C^{(0,\omega)}$ останній інтеграл має похідні, що входять в оператор $\Lambda(D)$, і, крім цього, $\Lambda(D)I^{1-\alpha}(f_\alpha)=f$.

Теорему доведено.

Інтегруванням частинами за змінною β виразу $D^{\alpha}_{S^+}(f)$ з урахуванням властивостей ф. р. $G(t,x,\xi)$ можна надати вигляду

$$D^{\alpha}_{S^+}f(t,x;M_0)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}f(t,x;M_0)(t-\tau)^{-\alpha}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}G^{(+2b\alpha)}(f)\,.\qquad(4)$$

Тому дії операторів $D^{\alpha}_{S^+}$ і $I^{\alpha}_{S^+}$ описані теоремами 2 і 3. З них випливають такі твердження.

Наслідок 2. 1. *Нехай для величин* $(\omega_i(t),m,2b\alpha)$ *виконується умова* $K^{(+2b\alpha)}$ *і* $\mu\le\eta_\nu-1+2b$, $m<2b$. *Тоді оператор дробового диференціювання* $D^{\alpha}_{S^+}$ *відображає простір* $C^{(m,\omega_2)}_{\mu,\omega_1}(\tilde\Gamma)$ *в* $C^{(m-l,\omega)}_{\mu+l,\omega}(\tilde\Gamma)$, *де* $\omega(t)=\omega_1^{(\mu_\nu)}(t)+\omega_1^{(m-l)}(t)+\omega_2^{(m-l)}(t)$, *а* $\tilde\Gamma=\Gamma\times\Gamma$ *або* $\tilde\Gamma=\Gamma$.

2. *Якщо* $f \in \overset{\circ}{C}{}^{(m,\omega)}(\Gamma)$, *то* $D^{\alpha}_{S^+} f \in C^{\left(m-2b\alpha,\omega_1^{(m-2b\alpha)}\right)}(\Gamma)$.

2. Задача Коші та двоточкова крайова задача з модифікованим оператором дробового диференціювання. ***2.1. Задача Коші.*** Розглянемо рівняння з оператором дробового диференціювання

$$D^{*\alpha}_{S^+} u \;\equiv\; D^{\alpha}_{S^+} u(t,x) - \frac{t^{-\alpha} u(0,x)}{\Gamma(1-\alpha)} \;=\; \sum_{|k|\le 2b(\alpha)} A_k(t,x)\, D^k u + f(t,x) \tag{5}$$

і будемо шукати розв'язок з початковою умовою

$$u\big|_{t=0} \;=\; \varphi(x), \quad x \in S^+. \tag{6}$$

Означення 2. *Розв'язком задачі Коші* (5), (6) *називається функція* $u(t,x)$, *яка має такі властивості*:

1) $u \in C^{(2b\alpha,\omega)}_{t,x}(\Gamma)$, $\Gamma = (0,T) \times S^+$;

2) *фрактальний інтеграл*

$$W(t,x) \;=\; \Im^{1-\alpha}_{\lambda} u \;=\; \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t d\tau \int_{S^+} \frac{G(t-\tau,x,\xi)}{(t-\tau)^{\alpha}} u(\tau,\xi)\, \xi_n^{\nu_0} dS_{\xi}$$

належить класу $C^{(1,2b)}_{t,x}(\Gamma)$;

3) $u(t,x)$ *задовольняє рівняння* (5) *і умову* (6).

Розв'язок задачі (5), (6) шукаємо у вигляді

$$u(t,x) \;=\; \Im^{\alpha}_{S^+} \nu(t,x). \tag{7}$$

Тоді при підстановці інтеграла (7) у рівняння (5) на підставі теореми 4 для $\nu(t,x)$ отримуємо інтегральне рівняння

$$\nu(t,x) \;=\; \frac{t^{-\alpha}\varphi(x)}{\Gamma(1-\alpha)} + f(t,x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \;\times$$

$$\times \int_{S^+} A(t,x,D)\, G(t-\tau,x,\xi)\, \nu(\tau,\xi)\, \xi_n^{\nu_0} dS_{\xi}. \tag{8}$$

Його ядро

$$K_A(t,\tau,x,\xi) \;\equiv\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,(t-\tau)^{1-\alpha}} A(t,x,D)\, G(t,\tau,x,\xi)$$

для випадку оператора $A \equiv \sum_{|k|\le 2b(\alpha)} A_k D^k_x$ порядку $2b(\alpha) = [2b\alpha]$ згідно з теоремою 1 задовольняє нерівність

$$|\,K_A(t,\tau,x,\xi)\,| \le C_0 (t-\tau)^{-\frac{n_{\nu-1+2b-\{2b\alpha\}}}{2b}}\, T^{\xi_n}_{x_n} \left(e^{-c_1 \left| \frac{(x-\xi')}{(t-\tau)^{1/2b}} \right|^q} \right). \tag{9}$$

Тому при $[2b\alpha] > 0$ будується резольвента [5] і розв'язок набирає вигляду

$$\nu(t,x) = F(t,x) + \int_0^t d\tau \int_{S^+} R_A(t,\tau,x,\xi)\, F(\tau,\xi)\, \xi_n^{\nu_0} ds_\xi\,, \tag{10}$$

де

$$R_A(t,\tau,x,\xi) = \sum_{p=1}^{\infty} \int_\tau^t d\beta \int_{S^+} K(t,\beta,x,y)\, K_p(\beta,\tau,y,\xi)\, y_n^{\nu_0} ds_y + K_A(t,\tau,x,\xi), \tag{11}$$

$$F(t,x) \equiv \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\varphi(x) + f(t,x).$$

Ядро K_A є квазірегулярним, тому для резольвенти $R_A(t,\tau,x,\xi)$ також виконується нерівність (9) з іншими додатними сталими C_0, c_1.

Якщо у рівнянні (5) $A \equiv E$, тобто є одиничним, то резольвента виражається за допомогою функції типу Міттаг-Леффлера. Справді,

$$K_2(t,x,\xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \left(\frac{d\tau}{\Gamma(\alpha)(\tau)^{1-\alpha}} \right) \times$$

$$\times \int_{S^+} G(t-\tau,x,y)\, G(\tau,y,\xi)\, y_n^{\nu_0} dy\,. \tag{12_2}$$

Використовуючи формулу згортки для G (властивість 1), знаходимо

$$K_2(t,x;\xi) = \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}\tau^{1-\alpha}} G(t,x,\xi) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} B(\alpha,\alpha)\, t^{2\alpha-1} G(t,x,\xi) = \frac{t^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} G\,.$$

За індукцією доводиться, що

$$K_m(t,x,\xi) = \frac{t^{m\alpha-1}}{\Gamma(m\alpha)} G(t,x,\xi)\,. \tag{12_m}$$

Звідси отримуємо

$$R(t,x,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k\alpha-1}}{\Gamma(k\alpha)} G(t,x,\xi) \equiv E_\alpha(t^\alpha)\, G(t,x,\xi)\, t^{\alpha-1}, \tag{12}$$

де $E_\alpha(t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+\alpha)}$.

Зображення функції $\nu(t,x)$ за формулою (10) дозволяє перевірити для $u(t,x)$ всі умови в означенні 2 і оцінити розв'язок задачі (5), (6). Переконаємось спочатку у виконанні початкової умови (6). Діючи на $\nu(t,x)$ оператором $\Im_{S^+}^\alpha$, знаходимо

$$\Im_S^\alpha \nu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}\tau^\alpha} \int_{S^+} G(t-\tau,x,\xi)\,\varphi(\xi)\, d\xi +$$

$$+\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\int\limits_{S^+} G(t-\tau,x,\xi)\left[\,f(\tau,\xi)+R*F\,\right]\xi_\nu^0 dS_\xi\,.$$

Тут через $R*F$ позначено другий доданок у формулі (10), який при $t\to 0$ має порядок $t^{\frac{[2b\alpha]}{2b}}$.

Внаслідок заміни $t-\tau=th$ у першому доданку $\Im_S^\alpha \nu$ будемо мати

$$\Im_{S^+}^\alpha \nu \;=\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t h^{\alpha-1}(1-h)^{-\alpha}dh\int\limits_{S^+} G(th,x,\xi)\,\varphi(\xi)\,\xi_n^{\nu_0}dS_\xi \;+\; o\!\left(t^{\frac{\{2b\alpha\}}{2b}}\right).$$

Отже, при $t\to 0$ отримуємо співвідношення (6):

$$\lim_{t\to 0} u(t,x) \;=\; \lim_{t\to 0}\Im_S^\alpha \nu(t,x) \;=$$

$$=\;\frac{B(\alpha,1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}\lim_{t\to 0}\int\limits_{S^+} G(th,x,\xi)\,\varphi(\xi)\,\xi_n^{\nu_0}dS_\xi \;=\; \varphi(x)\,.$$

Якщо $\varphi\in C^{(\omega)}(S^+)$, $f\in C_x^{(\omega)}(\Gamma)$, $A_k\in C^{(\omega)}(\Gamma)$, то з формул (11), (10), (8) випливає, що $\nu(t,x)$ задовольняє нерівності

$$\begin{gathered} |\,\nu(t,x)| \le C\left(t^{-\alpha}\,|\,\varphi\,|_{C(S'^+)} + |\,f\,|\right), \\ |\,\Delta_x \nu(t,x)| \le C\omega\left(|\,\Delta_x\,|\right)\left[\,t^{-\alpha}\,|\,\varphi\,|_\omega + |\,f(\omega)\,|\,\right]. \end{gathered} \tag{13}$$

Ці нерівності означають, що $\nu\in C_{2b\alpha}^{(\omega)}(\Gamma)$. Тому за наслідком 1 про дію оператора дробового інтегрування отримуємо $u=\Im_{S^+}^\alpha \nu\in C_0^{(2b\alpha,F)}(\Gamma)$, причому для похідних справджуються нерівності

$$\begin{gathered} \left|\,D_x^k u(t,x)\right| \le C\left[\,t^{-\frac{|k|}{2b}}\,|\,\varphi\,|_\omega + |\,f\,|_\omega\,\right], \\ \left|\,\Delta_x\, D_x^{[2b\alpha]}u(t,x)\right| \le CF(|\,\Delta_x\,|)\left(t^{-\frac{|k|}{2b}}\,|\,\varphi\,|_\omega + |\,f\,|_\omega\right). \end{gathered} \tag{14}$$

Залишилось розглянути фрактальний інтеграл $w=\Im_{S^+}^{(1-\alpha)}(u)$. Оскільки $u=\Im^\alpha \nu$, то за теоремою 4

$$w \;=\; \Im_{S^+}^{(1-\alpha)}\!\left(\Im_{S^+}^{(\alpha)}\nu\right) \;=\; \Im_S \nu \;=\; \int\limits_0^t d\tau\int\limits_{S^+} G(t-\tau,x,y)\,\nu(\tau,\xi)\,dS_\xi\,.$$

Але $\nu\in C_{2b\alpha}^{(\omega)}$, тому, як і в теоремі 1, $w\in C_{x,t}^{(2b,1)}(\Gamma)$.

На завершення підставимо $\nu(t,x)$ із формули (10) у формулу (7) і поміняємо порядок інтегрування. В результаті отримаємо шуканий розв'язок за допомогою функції Гріна

$$u(t,x) = \int_{S^+} Z_1(t,x,\xi)\,\varphi(\xi)\,\xi_n^{\nu_0} d\xi + \int_0^t d\tau \int_{S^+} Z_2(t,\tau,x,\xi)\, f(\tau,\xi)\,\xi_n^{\nu_0} d\xi\,, \qquad (15)$$

де компоненти функції Гріна визначаються формулами

$$Z_1(t,x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{G(t-\tau,x,y)}{(t-\tau)^{1-\alpha}\tau^{\alpha}} d\tau \; +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{d\beta}{\beta^{\alpha}} \int_\beta^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \int_S G(t-\tau,x,\xi)\, R_A(\tau,\beta,\xi,y)\,\xi_n^{\nu_0} dS_\xi\,,$$

$$Z_2(t,\beta,x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,(t-\beta)^{1-\alpha}}\, G(t-\beta,x,y) \; +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\beta^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \int_S G(t-\tau,x,\xi)\, R_A(\tau,\beta,\xi,y)\,\xi_n^{\nu_0} dS_\xi\,.$$

Між компонентами Z_1 і Z_2 існує такий зв'язок:

$$D_t^{1-\alpha} Z_1(t-\tau,x,y) = Z_2(t,\tau,x,y)\,,$$

D_t^{α} — оператор дробового диференціювання для $D_t = \dfrac{d}{dt}$.

Отже, доведено таку теорему.

Теорема 5 (про коректність)**.** *Нехай поверхня* S *в* E_{n-1} *належить класу* $C^{(2b,\omega)}$, *у задачі* (5), (6) $A_k \in C^{(\omega)}(\Gamma)$, $f \in C^{(\omega)}(\Gamma)$, $\varphi \in C^{(\omega)}(S^+)$ *і порядок рівняння у* (5) $2b(\alpha) = [\,2b\alpha\,]$. *Тоді існує функція Гріна задачі* (Z_1, Z_2), *за допомогою якої розв'язок задачі визначається формулою* (15) *і неперервно залежить від даних задачі* (14).

2.2. ***Двоточкова крайова задача.*** В області $\Gamma = (0,T) \times S^+$ розглянемо задачу про знаходження функцій $(u(t,x), P(t,x))$ для рівняння

$$D_{S^+}^{\alpha} u - \frac{t^{-\alpha} u(0,x)}{\Gamma(1-\alpha)} + B(t)\,P(t,x) = \sum_{|k| \le [2b\alpha]} A_k(t,x)\, D_x^k u + f(t,x) \qquad (16)$$

з умовами

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x)\,, \qquad u\big|_{t=T} = \psi(x)\,. \qquad (17)$$

Для розв'язку задачі Коші (16), (17) будемо мати співвідношення

$$u(t,x) = Z_1 * \varphi + Z_2 ** [\,f - B(t)\,P\,]\,. \qquad (18)$$

Тепер задовольнимо в (17) умову $u\big|_{t=T} = \psi(x)$. Тоді отримаємо

$$Z_1 * \varphi\big|_{t=T} + Z_2 ** [\,f - B(t)\,P\,]\big|_{t=T} = \psi(x)\,. \qquad (19)$$

Будемо шукати $P(t,x)$ у вигляді

$$P(t,x) = B(t)\,Z_2(t,0,x,0)\,C\,, \quad C = \text{const}. \qquad (20)$$

Якщо $P(t,x)$ підставити у формулу (19), то для знаходження невідомої величини C дістанемо рівняння

$$\int_0^T B^2(\tau)d\tau \int_{S^+} Z_2(T,\tau,x,\xi)\, Z_2(\tau,0,\xi,0)\, \xi_n^{\nu_0} dS_\xi C \;=\; \Phi_x(\varphi,T,\psi)\,, \tag{21}$$

де

$$\Phi_x(\varphi,T,\psi) \;\equiv\; \int_{S^+} Z_1(T,0,x,\xi)\,\varphi(\xi)\,\xi_n^{\nu_0} d\xi \;+$$

$$+\; \int_0^T d\tau \int_{S^+} Z_2(T,\tau,x,\xi)\, f(\tau,\xi)\,\xi_n^{\nu_0} dS_\xi \;-\; \psi(x)\,. \tag{22}$$

З лінійного рівняння (21) знаходимо C і внаслідок цього отримуємо

$$P(t,x) \;=\; \Phi_x(\varphi,T,\psi)\left(\int_0^T B^2(\tau)d\tau \int_{S^+} Z_2(T,\tau,x,\xi)\, Z_2(\tau,0,\xi,0)\,\xi_n^{\nu_0} dS_\xi\right)^{-1} \times$$

$$\times\; B(t)\, Z_2(t,0,x,0)\,. \tag{23}$$

Якщо для функції $Z_2(t,\tau,x,\xi)$ правильною є формула згортки, то вираз для $P(t,x)$ спрощується:

$$P(t,x) \;=\; \Phi_x(\varphi,\psi,T)\, B(t)\left(\int_0^T B^2(\tau)d\tau\right)^{-1}. \tag{24}$$

Оцінимо $P(t,x)$ за умов, що $\varphi \in C(S^+)$, $f \in C^{(\omega)}(\Gamma)$, $\psi \in C(S^+)$, $B \in$ $\in KC[0,T]$. Тоді $P \in KC(\Gamma)$ і виконується нерівність

$$|P(t,x)| \le C_0\left(|\varphi|_C + |f|_C + |\psi|_C\right)|B|_{KC}\, B_0^{-1}, \tag{25}$$

де $B_0 = \int_0^T B^2(\tau)d\tau$.

Підставимо функцію $P(t,x)$ із (23) у формулу (18) і знайдемо компоненту $u(t,x)$, яка також задовольняє нерівність (25).

1. *Кочубей А. М.* Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. – 1989. – **25**, № 8. – С. 1359 – 1368.
2. *Eidelman S. D., Kochubei A. N.* Cauchy problem for fractional diffusion equations // J. Different. Equat. – 2004. – **199**. – P. 211. – 255.
3. *Самко С., Килбас А. А., Маричев С. И.* Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
4. *Analytic* methods the theory of differential and preudo-differential equations of parabolic type / Eds S.D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei. – Basel etc.: Birkhäuser, 2004. – 390 p.
5. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.

Одержано 03.02.09